# Feszültség és áram mérése – 4. fejezet
## /Képletgyűjtemény/

1. Egyszerű középérték:

$$X_0 = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T x(t) \cdot dt$$

2. Abszolút középérték:

$$X_{abs} = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T |x(t)| \cdot dt$$

3. Effektív érték:

$$X_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T |x(t)|^2 \cdot dt}$$

4. Formatényező

$$k_f = \frac{X_{eff}}{X_{abs}}$$

5. Csúcstényező

$$k_p = \frac{X_p}{X_{eff}}$$

6. Torzítási tényező:

$$k = \sqrt{\frac{\sum_{i=2}^{\infty} X_{ieff}^2}{\sum_{i=1}^{\infty} X_{ieff}^2}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=2}^{\infty} X_{ieff}^2}{X_{1eff}^2}} = \frac{\sqrt{\sum_{i=2}^{\infty} X_{ieff}^2}}{X_{1eff}}$$

7. Abszolút középérték mérők, csúcsértékmérők, effektívérték mérők:
   - Kijelzés mindig szinuszos effektív értékre!
   - Összefoglaló táblázat:

| Jelek | Effektívérték-mérő | | | Abszolútközépérték-mérő | | | Csúcsértékmérő | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Mér | Mutat | Szorzó | Mér | Mutat | Szorzó | Mér | Mutat | Szorzó |
| szinusz | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | 1 | $\frac{2}{\pi}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{\pi}{2\cdot\sqrt{2}}$ | 1 | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ |
| háromszög | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\pi}{4\cdot\sqrt{2}}$ | $\frac{\pi}{2\cdot\sqrt{2}}$ | 1 | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ |
| négyszög | 1 | 1 | 1 | 1 | $\frac{\pi}{2\cdot\sqrt{2}}$ | $\frac{\pi}{2\cdot\sqrt{2}}$ | 1 | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ |

8. Műszer osztálypontosságából származó és a mért értékre vonatkozó hiba:

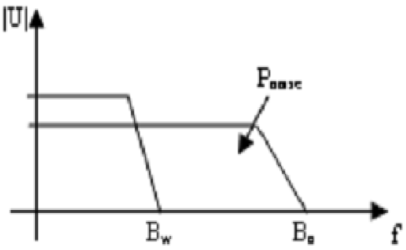
$$h_{rel} = h_{o.v.} + h_{o.r.} \cdot \frac{x_{max}}{x_m}$$

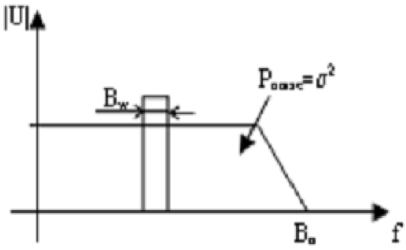
Ahol $h_{o.r.} = op = \text{ osztálypontosság} = \text{méréshatárra vonatkozóhiba}$

9. Jel-zaj viszony:

$$SNR = 10 \cdot \lg \frac{P}{P_0} = 10 \cdot \lg \frac{U^2}{U_0^2} = 20 \cdot \lg \frac{U}{U_0}$$

10. Zajteljesítmény:




$$P'_{noise} = P_{noise} \cdot \frac{B_w}{B_{noise}}$$

$$\sigma'^2 = \sigma^2 \cdot \frac{B_w}{B_{noise}}$$

11. Periodikus jelek:

- Fourier-sorba fejtés:

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} X_k^A \cdot \cos(k \cdot \omega \cdot t) + \sum_{k=1}^{\infty} X_k^B \cdot \sin(k \cdot \omega \cdot t)$$

$$X_k^A = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T x(t) \cdot \cos(k \cdot \omega \cdot t) \cdot dt$$

$$X_k^B = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T x(t) \cdot \sin(k \cdot \omega \cdot t) \cdot dt$$

- Periodikus jel effektív értéke a Fourier együtthatókkal kifejezve:

$$X_{eff} = \sqrt{X_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_{pk}^2}{2}} = \sqrt{X_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} X_k^2}; \quad X_{pk} = \sqrt{\left(X_k^A\right)^2 + \left(X_k^B\right)^2}$$

# Példák
/7. hét/

## 4.27. feladat /ezt nem kellett leadni, de hasznos lehet/

Egy ellenállás értékét akarjuk megmérni a rajta átfolyó áram és a rajta eső feszültség megmérésével. A mérés során 2 különböző, de azonos típusú műszert használunk. A mért feszültség 4mV, az alkalmazott méréshatár 20mV; a mért áram 200μA, a méréshatár 1mA. Mekkora az ellenállás értéke és a mérés bizonytalansága, ha a műszer gépkönyve a következő specifikációt tartalmazza mindkét méréshatárra: ±(0.1% of rd + 0.05% of rn), ahol az első érték a leolvasott értékre, a második pedig a mérési tartományra vonatkozó hiba. Adjuk meg az abszolút és a relatív hibát is.

Megoldás:

1) Az ellenállás várható értéke:

$$\hat{R} = \frac{U}{I} = \frac{4mV}{200\mu A} = \underline{\underline{20\Omega = \hat{R}}}$$

2) Feszültség mérésének relatív hibája:

$$h_u = h_{rd} + \frac{U_{\max}}{U_m} \cdot h_{rn} = 0.1\% + \frac{20mV}{4mV} \cdot 0.05\% = 0.35\%$$

3) Áram mérésének relatív hibája:

$$h_I = h_{rd} + \frac{I_{\max}}{I_m} \cdot h_{rn} = 0.1\% + \frac{1mA}{200\mu A} \cdot 0.05\% = 0.35\%$$

A feladatban nincs megadva, hogy a mérések hibája milyen szabványos esetnek felel meg. Ekkor feltételezhetünk normális eloszlást (ami durva, DE jó közelítés). Ez esetben valószínűségi összegzést alkalmazva az ellenállás relatív hibáját ugyanolyan konfidenciaszinten kapjuk meg, mint a mérések relatív hibáit (lásd 5. gyakorlat 3.21.-es feladat, ahol levezettem, hogy ez az állítás valóban igaz).

$$\frac{\Delta R}{R} = \sqrt{\left(c_I \cdot \frac{I}{R} \cdot h_I\right)^2 + \left(c_U \cdot \frac{U}{R} \cdot h_U\right)^2} = \sqrt{\left(-\frac{R}{I} \cdot \frac{I}{R} \cdot h_I\right)^2 + \left(\frac{R}{U} \cdot \frac{U}{R} \cdot h_U\right)^2} = \sqrt{h_I^2 + h_U^2}$$

$$\underline{\underline{h_R = \frac{\Delta R}{R} = 0.495\%}} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\Delta R = 20\Omega \cdot 0.00495 \cong 0.99\Omega}}$$

Ha nincs semmilyen információnk az eloszlásra, és a normális eloszlással történő közelítés jelentős hibát okoz, akkor a legrosszabb esetet érdemes választani:

$$\underline{\underline{\frac{\Delta R}{R} = |h_I| + |h_U| = 0.7\%}} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\Delta R = 20\Omega \cdot 0.007 = 0.14\Omega}}$$

## 4.28. feladat

Egy forrás Thevenin-helyettesítőképét ($U_g$, $R_g$) szeretnénk megmérni. Ehhez megmérjük a forrás kimenő feszültségét ($U_1$) terheletlenül, illetve ($U_2$) $R_t$ = 100Ω terheléssel. A mérési hiba csökkentésére kompenzációs mérést is végzünk, azaz egy segédforrást alkalmazunk, amely pontosan $U_1$ feszültséget generál. Ezek után a mérendő forrásra kapcsoljuk az Rt ellenállást, és a feszültségmérőnkkel a segédforrás és a mérendő forrás kimenő feszültségének különbségét (dU) mérjük.

a) Mekkora $U_g$ és $R_g$ értéke, valamint mérésük relatív véletlen hibája a két, mérési elrendezésben, ha $U_1$=10.00V, $U_2$ = 9.99V, dU=10.30mV és a műszer belső ellenállása végtelen? A feszültségmérés relatív véletlen hibája minden esetben 0.01%.

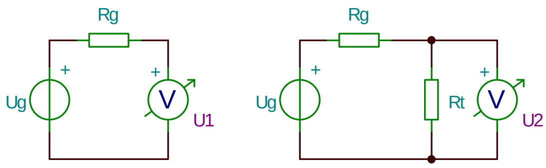
b) Hány tizedesjegyre kell, hogy pontos legyen U1 és U2, ha azt akarjuk, hogy az első módszerrel a belső ellenállást 1% hibával mérjük?

Megoldás:

a) Thevenin helyettesítőkép meghatározása, relatív véletlen hibájukkal

I. $U_1$ és $U_2$ mérésével:

1) Kapcsolási rajz:




2) $U_g$ és relatív hibájának megadása meghatározása:

$$U_g = U_1; \quad \frac{\Delta U_g}{U_g} = 0.01\%$$

3) $R_g$ megadása:

$$U_2 = \frac{R_t}{R_t + R_g} \cdot U_1 \quad \Rightarrow \quad R_g = R_t \cdot \frac{U_1 - U_2}{U_2} \cong 0.1\Omega$$

4) $R_g$ relatív hibájának megadása:

$$c_1 = \frac{\partial R_g}{\partial U_1} = \frac{R_g}{U_1 - U_2}; \quad c_2 = \frac{\partial R_g}{\partial U_2} = R_t \cdot \frac{-1 \cdot U_2 - (U_1 - U_2) \cdot 1}{U_2^2}$$

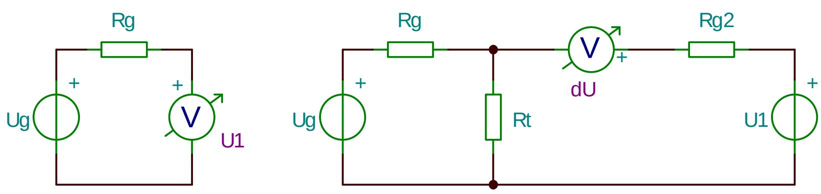
$$\left.\frac{\Delta R_g}{R_g}\right|_1 = \frac{U_1}{U_1 - U_2} \cdot h_1; \quad \left.\frac{\Delta R_g}{R_g}\right|_2 = R_t \cdot \frac{U_1}{U_2^2} \cdot \frac{U_2}{R_t \cdot (U_1 - U_2)} \cdot U_2 = \frac{U_1}{U_1 - U_2} \cdot h_2$$

$$\frac{\Delta R_g}{R_g} = \frac{U_1}{U_1 - U_2} \cdot \sqrt{h_1^2 + h_2^2} = \frac{U_1}{U_1 - U_2} \cdot \sqrt{2} \cdot h, \ mert\ h = h_1 = h_2$$

$$\underline{\underline{\frac{\Delta R_g}{R_g} = 14.14\%}}$$

II. $U_1$ és dU mérésével

1) Kapcsolási rajz:




2) $U_g$ és relatív hibájának megadása meghatározása:

$$U_g = U_1; \quad \frac{\Delta U_g}{U_g} = 0.01\%$$

3) $R_g$ megadása:

$$U_2 = \frac{R_t}{R_t + R_g} \cdot U_1 \quad \Rightarrow \quad R_g = R_t \cdot \frac{U_1 - U_2}{U_2}; \ és\ dU = U_1 - U_2$$

$$R_g = R_t \cdot \frac{dU}{U_2} \cong 0.1031\Omega$$

4) $R_g$ relatív hibájának megadása:

$$c_1 = \frac{\partial R_g}{\partial (dU)} = \frac{R_g}{dU}; \quad c_2 = \frac{\partial R_g}{\partial U_2} = -\frac{R_g}{U_2}$$

$$\left.\frac{\Delta R_g}{R_g}\right|_1 = h_1; \quad \left.\frac{\Delta R_g}{R_g}\right|_2 = h_2$$

$$\frac{\Delta R_g}{R_g} = \sqrt{h_1^2 + h_2^2} = \sqrt{2} \cdot h, \; mert \; h = h_1 = h_2$$

$$\frac{\Delta R_g}{R_g} = 0.01414\%$$

b) Tizedesjegy pontossága

Az első módszerrel az $R_g$ mérésének hibája a következőképp fejezhető ki:

$$h_{Rg} = \frac{U_1}{U_1 - U_2} \cdot h_e$$

Ahol $h_e$ a mérésből származó eredő relatív hiba, értéke attól függ, hogy milyen (valószínűségi vagy worst case) hibaösszegzést használtunk. Ezek alapján:

$$h_e = \frac{U_1 - U_2}{U_1} \cdot h_{Rg} = \frac{0.01V}{10V} \cdot 1\% = 0.001\% = 10^{-5}$$

Tehát feszültségmérés hibája nagyságrendileg $10^{-6}$-n kell, hogy legyen, amihez legalább 7 számjegy kijelzése szükséges.