1. feladat (8 pont)
A definíció segítségével igazolja, hogy

$$\lim_{x\to 3}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{5}. \qquad \delta(\varepsilon)=?$$

Megoldás: $\left|\frac{1}{x+2}-\frac{1}{5}\right|<\varepsilon\,\boxed{\textbf{2p.}} \iff \left|\frac{5-(x+2)}{5(x+2)}\right|<\varepsilon\,\boxed{\textbf{1p.}}$

Ha $|x-3|<4\,\boxed{\textbf{1p.}}$, akkor $x+2>1$, így $\left|\frac{5-(x+2)}{5(x+2)}\right|\le\frac{|x-3|}{5}<\varepsilon\,\boxed{\textbf{2p.}}$ miatt

$\delta(\varepsilon)=\min\{4,5\varepsilon\}$ jó választás. $\boxed{\textbf{2p.}}$

2. feladat (12 pont)
Hol és milyen típusú szakadásai vannak a következő függvénynek? A szakadási helyeken határozza meg a bal és jobb oldali határértékeket!

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}, & \text{ha } x>2,\\[2mm] \dfrac{\sin^2\left(\frac{\pi}{8}x\right)}{3x^2}, & \text{ha } x\le 2.\end{cases}$$

Megoldás: Tanult tételek szerint $\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$ folytonos, így $x>2$ esetén nincs szakadás, és $\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{8}x\right)}{3x^2}$ is folytonos, így $x<2$ esetén is csak a nevező zérushelyén, azaz $x=0$-ban van. És lehet még $x=2$-ben is. $\boxed{\textbf{2p.}}$

$\underline{x=2:}$ $\lim\limits_{x\to 2+}f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{x+2}\right)^2-2^2}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{x+2}+2}=\frac{1}{4}.$

$\lim\limits_{x\to 2-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{8}x\right)}{3x^2}=\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{8}2\right)}{3\cdot 2^2}=\frac{1}{24}.$

Mivel a féloldali határértékek léteznek, végesek de különbözőek, ezért itt véges ugrás van. $\boxed{\textbf{5p.}}$

$\underline{x=0:}$ $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{8}x\right)}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{8}x\right)}{\frac{\pi}{8}x}\right)^2\frac{\pi^2}{192}=1^2\frac{\pi^2}{192}.$

Mivel itt létezik véges határérték, ezért itt megszüntethető szakadás van. $\boxed{\textbf{5p.}}$

3. feladat (4+4+2=10 pont)

$$f(x) = \operatorname{arctg}\frac{x+2}{2-x}, \qquad g(x) = (1+x^2)^x.$$

a) Határozza meg a fenti f és g függvény deriváltját!

b) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = ?$

Megoldás: $f'(x) = \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{x+2}{2-x}\right)^2}\dfrac{1\cdot(2-x)-(x+2)\cdot(-1)}{(2-x)^2}\boxed{\textbf{4p.}} = \dfrac{2}{4+x^2}.$

$g'(x) = \left(e^{x\ln(1+x^2)}\right)' = e^{x\ln(1+x^2)}\left(1\cdot\ln(1+x^2)+x\dfrac{1}{1+x^2}2x\right)\boxed{\textbf{4p.}} =$
$(1+x^2)^x\left(\ln(1+x^2)+\dfrac{2x^2}{1+x^2}\right).$

Mivel $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+2}{2-x} = -1$, ezért $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \operatorname{arctg}(-1) = -\dfrac{\pi}{4}\boxed{\textbf{2p.}}$.

4. feladat (5+5=10 pont)

Határozza meg a következő határértékeket!

$$a) \quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}\right) = ?, \qquad b) \quad \lim_{x\to\infty}\frac{\operatorname{sh}(5x+2)}{\operatorname{ch}(5x-3)} = ?$$

Megoldás: a)$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-(e^x-1)}{x(e^x-1)} \overset{\frac{0}{0}\text{L'H}}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^x}{e^x-1+xe^x}\boxed{\textbf{3p.}} \overset{\frac{0}{0}\text{L'H}}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-e^x}{e^x+e^x+xe^x} =$
$-\dfrac{1}{2}\boxed{\textbf{2p.}}$

b)$= \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{5x+2}-e^{-5x-2}}{e^{5x-3}+e^{-5x+3}}\boxed{\textbf{1p.}} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^2-e^{-10x-2}}{e^{-3}+e^{-10x+3}}\boxed{\textbf{2p.}} = \dfrac{e^2}{e^{-3}} = e^5\boxed{\textbf{2p.}}$

5. feladat (10 pont)

Melyek azok a legbővebb nyílt intervallumok, ahol az

$$f(x) = \frac{x-3}{(x+5)^2}$$

függvény szigorúan monoton nő illetve szigorúan monoton csökken? Hol, milyen jellegű lokális szélsőértéke van a függvénynek?

Megoldás: $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-5\}$ $\boxed{\textbf{1p.}}$.

$f'(x) = \dfrac{(x+5)^2-(x-3)2(x+5)}{(x+5)^4} = \dfrac{11-x}{(x+5)^3}$, $f'(x) = 0 \iff 11 = x$ $\boxed{\textbf{2p.}}$

	$]-\infty,-5[$	$]-5,11[$	11	$]11,\infty[$	**2p.**
f	$\downarrow$	$\uparrow$	lok.max.	$\downarrow$	**3p.**
f'	-	+	0	-	**2p.**