

1. feladat (18 pont)

Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet. (A megoldást elég implicit alakban megadni.)

$$y' = \frac{y \ln^2(y)}{x^2 - 2x - 3}$$

Mo. Szeperálható differenciálegyenlet, $y \equiv 1$ megoldás **(2p)**. A tanult módszerrel:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y \ln^2(y)}{x^2 - 2x - 3} \implies \int \frac{1}{y \ln^2(y)} dy = \int \frac{1}{x^2 - 2x - 3} dx \quad \mathbf{(2p)}$$

Az egyenlőség bal oldala:

$$\int \frac{1}{y \ln^2(y)} dy = -\frac{1}{\ln(y)} + C_1 \quad (C_1 \in \mathbb{R}) \quad \mathbf{(6p)}$$

Az egyenlőség jobb oldala:

$$\int \frac{1}{x^2 - 2x - 3} dx = \int \frac{1}{(x-3)(x+1)} dx \quad \mathbf{(2p)}$$

Parciális törtekre bontással:

$$\frac{1}{(x-3)(x+1)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1) + B(x-3)}{(x-3)(x+1)}$$

Ebből pedig $A = \frac{1}{4}$, $B = -\frac{1}{4}$ adódik **(2p)**.

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x-3)(x+1)} dx &= \frac{1}{4} \int \frac{1}{x-3} dx - \frac{1}{4} \int \frac{1}{x+1} dx = \\ &= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-3}{x+1} \right| + C_2 \quad (C_2 \in \mathbb{R}) \quad \mathbf{(2p)} \end{aligned}$$

Tehát a megoldások:

$$y \equiv 1 \quad \text{és} \quad -\frac{1}{\ln(y)} = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-3}{x+1} \right| + C \quad (C \in \mathbb{R}) \quad \mathbf{(2p)}$$

2. feladat (20 pont)

Oldjuk meg az alábbi kezdetiérték-problémát.

$$y' - \frac{2y}{x+4} = e^x(x+4)^3 \quad (x \neq -4), \quad y(-3) = 2$$

Mo. Inhomogén lineáris egyenlet, a hozzá tartozó homogén egyenlet:

$$y' - \frac{2y}{x+4} = 0 \implies y_{h,\acute{a}}(x) = C(x+4)^2 \quad (C \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R} \setminus \{-4\}) \quad (6\text{p})$$

(Megoldva szeparálhatóként, vagy a megoldás általános alakjának ismeretéből.)
Az inhomogén egyenlet megoldása: keressük a megoldást $y(x) = c(x)(x+4)^2$ alakban (ahol c egy $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvény) **(1p)**.
Behelyettesítve a differenciálegyenletbe:

$$\underbrace{c'(x)(x+4)^2 + 2c(x)(x+4)}_{y'(x)} - \underbrace{2c(x)(x+4)}_{\frac{2y(x)}{x+4}} = e^x(x+4)^3 \quad (2\text{p})$$

Ebből pedig $c'(x) = e^x(x+4)$. Parciális integrálással

$$\int e^x(x+4) dx = e^x(x+4) - \int e^x dx = e^x(x+3) + D \quad (D \in \mathbb{R}) \quad (4\text{p}),$$

tehát a $D = 0$ választással $c(x) := e^x(x+3)$, így az inhomogén egyenlet egy partikuáris megoldása:

$$y_{i,p}(x) = c(x)(x+4)^2 = e^x(x+3)(x+4)^2 \quad (1\text{p})$$

Amiből az általános megoldás:

$$y_{i,\acute{a}}(x) \stackrel{(2\text{p})}{=} y_{i,p}(x) + y_{h,\acute{a}}(x) \stackrel{(1\text{p})}{=} e^x(x+3)(x+4)^2 + C(x+4)^2 \quad (C \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R} \setminus \{-4\})$$

Jelölje \tilde{y} a kezdeti feltételt kielégítő megoldást. $\tilde{y}(-3) = 2 \implies C = 2$ **(1p)**,
azaz

$$\tilde{y}(x) = e^x(x+3)(x+4)^2 + 2(x+4)^2 \quad (C \in \mathbb{R}, x > -4) \quad (2\text{p})$$

3. feladat (22 pont)

Adjuk meg az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását.

$$y''' + 4y'' + 3y' = 10e^{2x} + 18x$$

Mo. Harmadrendű, lineáris állandó együtthatós, inhomogén egyenlet. A homogén egyenlethez tartozó karakterisztikus egyenlet:

$$\lambda^3 + 4\lambda^2 + 3\lambda = 0 \quad (2\text{p}),$$

gyökei: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = -3$ **(2p)**. Ebből a homogén egyenlet általános megoldása:

$$y_{h,\acute{a}}(x) = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 e^{-3x} \quad (x \in \mathbb{R}, C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}) \quad (4p)$$

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását keressük az $y(x) = Ae^{2x} + Bx + C$ alak (rezonancia) **(2p)** helyett $y(x) = Ae^{2x} + Bx^2 + Cx$ alakban **(2p)** ($x \in \mathbb{R}$, $A, B, C \in \mathbb{R}$). Deriválva háromszor **(3p)**:

$$\begin{aligned} y(x) &= Ae^{2x} + Bx^2 + Cx & | \cdot 0 \\ y'(x) &= 2Ae^{2x} + 2Bx + C & | \cdot 3 \\ y''(x) &= 4Ae^{2x} + 2B & | \cdot 4 \\ y'''(x) &= 8Ae^{2x} & | \cdot 1 \end{aligned}$$

Behelyettesítve a differenciálegyenletbe:

$$30Ae^{2x} + 6Bx + 3C + 8B = 10e^{2x} + 18x \quad (2p) \implies A = \frac{1}{3}, B = 3, C = -8 \quad (2p),$$

tehát az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása:

$$y_{i,p}(x) = \frac{1}{3}e^{2x} + 3x^2 - 8x \quad (x \in \mathbb{R}) \quad (1p)$$

A differenciálegyenlet általános megoldása:

$$\begin{aligned} y_{i,\acute{a}}(x) &= y_{i,p}(x) + y_{h,\acute{a}}(x) = \\ &= \frac{1}{3}e^{2x} + 3x^2 - 8x + C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 e^{-3x} \quad (x \in \mathbb{R}, C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}) \quad (2p) \end{aligned}$$

4. feladat (8+8+8=24 pont)

Konvergensek-e az alábbi sorok?

$$a) \sum_{n \in \mathbb{N}^+} \frac{(-1)^n}{n^2 \ln^2(n+1)} \quad b) \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{n^2+1}{n^2+2} \right)^{n^3} \quad c) \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{n^2+1}{n^2+2} \right)^{n^3} \cdot \frac{n!}{n^n}$$

Mo. a) Legyen $a_n := \frac{(-1)^n}{n^2 \ln^2(n+1)}$ ($n \in \mathbb{N}^+$).

Első megoldás.

$$|a_n| \leq \frac{1}{n^2} \quad (\text{ha } n \geq 2) \quad (4p),$$

és a $\sum_{n \in \mathbb{N}^+} \frac{1}{n^2}$ numerikus sor konvergens **(1p)**, tehát a majoráns kritérium alapján $\sum_{n \in \mathbb{N}^+} a_n$ abszolút konvergens **(2p)**, következésképpen konvergens **(1p)**.

Második megoldás. A $\sum_{n \in \mathbb{N}^+} a_n$ sor alternál **(1p)**, az $\left(\frac{1}{n^2 \ln^2(n+1)}\right)_{n \in \mathbb{N}^+}$ sorozat monoton csökkenő **(3p)** (hiszen egy nemnegatív monoton növekvő sorozat reciproka), és 0-hoz tart **(2p)**, tehát a Leibniz-kritérium alapján $\sum_{n \in \mathbb{N}^+} a_n$ konvergens **(2p)**.

b) Legyen $b_n := \left(\frac{n^2+1}{n^2+2}\right)^{n^3}$ ($n \in \mathbb{N}$).

$$\sqrt[n]{b_n} \stackrel{(2p)}{=} \left(\frac{n^2+1}{n^2+2}\right)^{n^2} \stackrel{(2p)}{=} \frac{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}}{\left(1+\frac{2}{n^2}\right)^{n^2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{e}{e^2} = \frac{1}{e} < 1 \quad (1p)$$

tehát a gyökkritérium alapján $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n$ konvergens **(2p)**.

c) Legyen $c_n := \left(\frac{n^2+1}{n^2+2}\right)^{n^3} \cdot \frac{n!}{n^n}$ ($n \in \mathbb{N}$).

Első megoldás. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$0 \leq c_n \leq b_n \quad (4p),$$

tehát a b) rész és a majoráns kritérium alapján **(2p)**, a $\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n$ sor konvergens **(2p)**

Második megoldás. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$0 \leq c_n \leq \frac{n!}{n^n} \quad (3p),$$

és a $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{n!}{n^n}$ sor konvergens **(3p)** (hányadoskritériummal, vagy mert szerepelt előadáson), így majoráns kritérium alapján a $\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n$ sor konvergens **(2p)**.

5. feladat (6+10=16 pont)

a) Mikor nevezünk egy numerikus sort abszolút konvergensnek? Mi a kapcsolat egy sor konvergenciája és abszolút konvergenciája között?

b) Konvergens-e a

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^+} (-1)^n \frac{n!}{(2n+1)n^n}$$

numerikus sor?

Mo. a) A $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ numerikus sor abszolút konvergens, ha a $\sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|$ sor konvergens. **(3p)**

Minden abszolút konvergens sor konvergens. **(3p)**

b) *Első megoldás.* Legyen $a_n := (-1)^n \frac{n!}{(2n+1)n^n}$ ($n \in \mathbb{N}$). Vizsgáljuk a $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ sor abszolút konvergenciáját **(3p)** :

$$\begin{aligned} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &= \frac{(n+1)!}{(2n+3)(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{(2n+1)n^n}{n!} = \\ &\stackrel{\text{(2p)}}{=} \frac{(n+1)(2n+1)}{(2n+3)(n+1)} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{(2p)}} \frac{1}{e} < 1, \end{aligned}$$

tehát a hányadoskritérium alapján a $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ sor abszolút konvergens **(1p)**, következésképpen konvergens **(2p)**.

Második megoldás. Legyen $a_n := (-1)^n \frac{n!}{(2n+1)n^n}$ ($n \in \mathbb{N}$). A $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ sor alternál **(1p)**,

$$|a_n| = \frac{n!}{(2n+1)n^n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \quad \text{(2p)},$$

$$\begin{aligned} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &= \frac{(n+1)!}{(2n+3)(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{(2n+1)n^n}{n!} = \\ &\stackrel{\text{(2p)}}{=} \frac{(n+1)(2n+1)}{(2n+3)(n+1)} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \leq 1 \quad (n \in \mathbb{N}) \quad \text{(2p)}, \end{aligned}$$

azaz $(|a_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton csökkenő **(1p)**. Tehát a Leibniz-kritérium alapján $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ konvergens **(2p)**.

IMSc feladat (15 IMSc pont) Adjunk példát olyan pozitív tagú konvergens sorra, amelynek konvergenciáját a hányadoskritériummal nem tudjuk eldönteni, a gyökkritériummal viszont igen. Indokoljunk!

(*Segítség:* keressünk olyan $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ numerikus sort, amelyre teljesülnek a $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ és $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ egyenlőtlenségek.)

Mo. Legyen például

$$a_n := \begin{cases} \frac{1}{2^n} & , \text{ ha } n \in \mathbb{N} \text{ és } n \text{ páros,} \\ \frac{1}{3^n} & , \text{ ha } n \in \mathbb{N} \text{ és } n \text{ páratlan.} \end{cases} \quad \text{(5p)}$$

Ekkor az $(\sqrt[n]{a_n})_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat torlódási pontjai: $\frac{1}{2}$ és $\frac{1}{3}$ **(2p)**, tehát

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2} < 1 \quad \mathbf{(1p)}$$

tehát a gyökkritérium alapján a $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ sor konvergens **(2p)**. Ugyanakkor

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} := \begin{cases} \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^n, & \text{ha } n \in \mathbb{N} \text{ és } n \text{ páros,} \\ \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}\right)^n, & \text{ha } n \in \mathbb{N} \text{ és } n \text{ páratlan.} \end{cases} \quad \mathbf{(3p)},$$

tehát $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = +\infty$ és $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$ **(2p)**, tehát a hányadoskritérium nem alkalmazható a $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ sorra.
