Kombinatorikus optimalizálás (VISZMA06)

3. ZH javítókulcs (2016. 05. 17.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

1. Legyen $\mathcal{M}$ a jobboldalon látható mátrix meghatározta lineáris matroid. Határozzuk meg az $\mathcal{M} \vee \mathcal{M}^*$ összegmatroid rangját, és azt is, hogy konkrétan mi ez a matroid.

$$\begin{pmatrix} 3 & 9 & 7 & -5 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ -2 & -6 & -1 & -3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Az $\mathcal{M}^*$ duális matroid a bázisai pontosan az $\mathcal{M}$ matroid bázisainak komplementerei. (2 pont)
Az $\mathcal{M} \vee \mathcal{M}^*$ matroid független halmazai pontosan azok a halmazok, amelyek előállnak egy $\mathcal{M}$-beli és egy $\mathcal{M}^*$-beli független halmaz uniójaként. (2 pont)
Mivel a bázisok maximális méretű független halmazok, ezért (bármi is legyen az $\mathcal{M}$ matroid), az $\mathcal{M}$ teljes alaphalmaza előáll egy $\mathcal{M}$ beli bázis és egy $\mathcal{M}^*$-beli bázis uniójaként, (2 pont)
tehát a teljes alaphalmaz független (így bázis) $\mathcal{M} \vee \mathcal{M}^*$-ban. (1 pont)
Ezért $\mathcal{M} \vee \mathcal{M}^*$ rangja éppen $\mathcal{M}$ alaphalmazának a mérete, jelen esetben 6, (1 pont)
és az $\mathcal{M} \vee \mathcal{M}^*$ matroid pedig a triviális 6-elemű matroid, amelyben minden halmaz független (más szóval izomorf $\mathcal{U}_{6,6}$-tal). (2 pont)

Aki hivatkozik az ESÁ ismert tulajdonságára, majd ennek segítségével lépcsős alakra hoz, és talál $\mathcal{M}$-ben egy bázist, az ezért a munkáért legfeljebb 4 pontot kaphat.

---

2. Tegyük fel, hogy adott egy $G = (V, E)$ gráf és éleinek egy színezése. Adjunk szükséges és elégséges feltételt arra nézve, hogy mikor van G-nek olyan feszítőfája, amelynek élei csupa különböző színre vannak kiszínezve.

Legyen $\mathcal{M}_G$ a G körmatroidja, és $\mathcal{M}$ pedig az a partíciós matroid E-n, amit az azonos színű élek határoznak meg: $\mathcal{M}$-ben tehát egy élhalmaz pontosan akkor a független ha nem tartalmaz két azonos színű élt. (2 pont)
A G feszítőfái pontosan az $\mathcal{M}_G$ matroid $|V| - 1$ elemű független halmazainak felelnek meg, (2 pont)
így a keresett tarka feszítőfa pontosan akkor létezik, ha $\mathcal{M}_G$-nek és $\mathcal{M}$-nek van egy $|V| - 1$ méretű közös független halmaza. (2 pont)
A matroid metszet tétel szerint az $\mathcal{M}_1 = (E, \mathcal{F}_1)$ és $\mathcal{M}_2 = (E, \mathcal{F}_2)$ matroidokban a közös független maximális elemszámára $\max\{|F| : F \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2\} = \min\{r_1(X) + r_2(E \setminus X) : X \subseteq E\}$ igaz, (2 pont)
ezért a keresett tarka fa pontosan akkor létezik, ha $|V| - 1 \leq \min\{r_{\mathcal{M}_G}(X) + r_{\mathcal{M}}(X) : X \subseteq E\}$, ahol $r_{\mathcal{M}_G}(X)$ az X élhalmazból kiválasztható maximális körmentes részhalmaz mérete, míg $r_{\mathcal{M}}(E \setminus X)$ az X élhalmazba nem tartozó éleken előforduló színek számat jelenti. (2 pont)

---

3. Tegyük fel, hogy a G gráfban az elvágó pontok és az elvágó élek száma egyaránt 8, továbbá a 8 elvágó él diszjunkt, semelyik kettőnek sincs közös csúcsa. Legkevesebb hány élet kell behúzni G-be ahhoz, hogy az így kapott gráf 2-összefüggő legyen?

A 7 elvágó élnek nincs közös pontja, tehát összesen 14 végpontjuk van. (1 pont)
Egy elvágó él mindkét végpontja elvágó pont, kivéve, ha az adott végpont elsőfokú. (2 pont)
Ez azt jelenti, hogy a 7 elvágó él mindegyike egy-egy elsőfokú pontot köt össze a gráf maradék részével. (1 pont)
A mi feladatunk az, hogy a lehető legkevesebb él behúzásával érjük el, hogy a gráfnak ne legyen elvágó pontja. (1 pont)

G minden elsőfokú pontjából kell tehát indulnia legalább egy új élnek, ezért az új élek végpontjainak száma legalább 8, vagyis legalább 4 élre van szükség. (1 pont)

Ennyi él viszont elegendő is, hiszen ha a 8 db elsőfokú csúcsra egy 4 élből álló teljes párosítást illesztünk, akkor az így kapott G' gráfban a G gráf 8 elvágó pontjának egyike sem lesz elvágó pont. (3 pont)

A válasz tehát az, hogy legalább négy élt kell behúzni G-be a feladatban megadott feltétel eléréséhez. (1 pont)