Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Méréstechnika és Információs Rendszerek Tanszék

Kooperáció és Intelligencia

Nem-kooperatív játékelmélet (2/2. rész)

Kovács Dániel László

Intelligens Rendszerek kutatócsoport

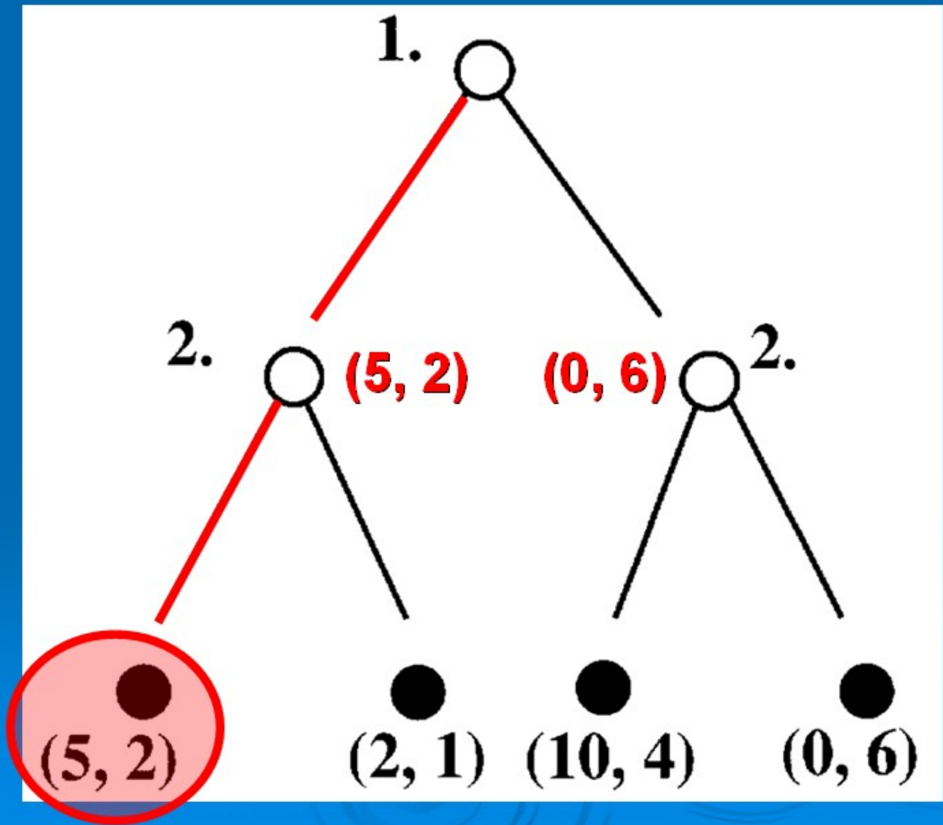
dkovacs@mit.bme.hu

Előzmények

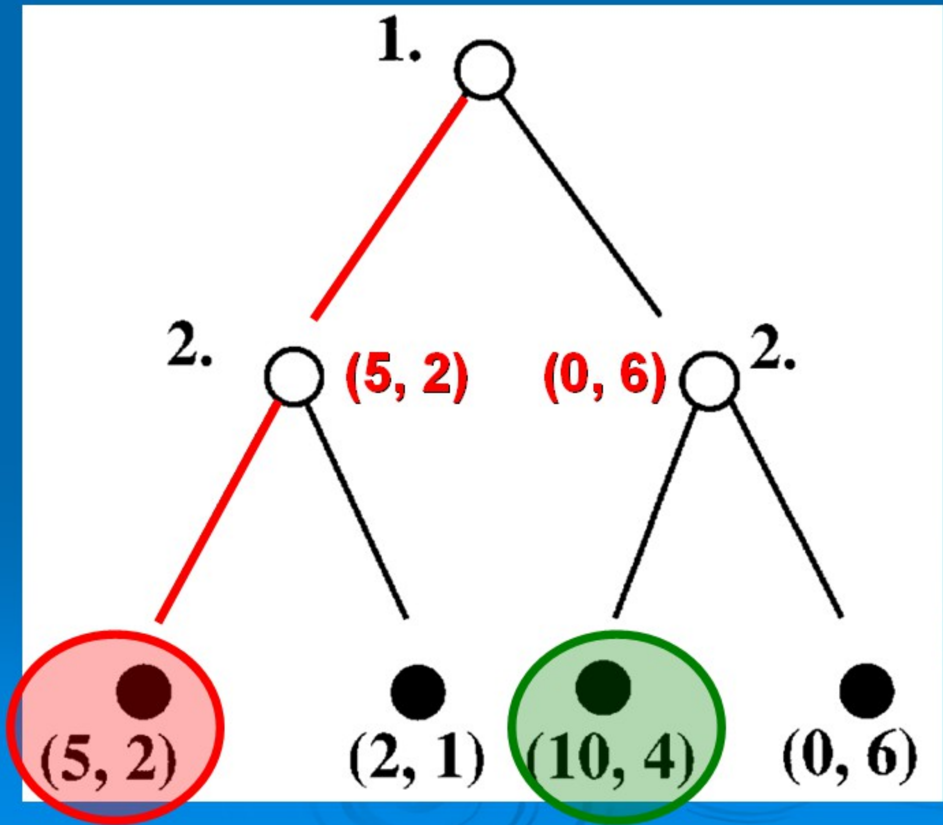
- 1 és 1.000.000 dolláros játék
- FD, IFD, GyNy, NH, VÜ, SKD, FP, KPO játékok
- Játékelmélet történeti áttekintése
- Játékok normál alakja
- Szimmetrikus és aszimmetrikus játékok
- Zéró-összegű játékok
- Dominált stratégiák, és a Nash-egyensúly
- Tiszta és kevert stratégiák
- Nash-egyensúly létezése
  - Minimax tétel (és bizonyítása)
  - Nash tétele
- Nash-egyensúly számítása
  - Tiszta eset: Dominált stratégiák eliminációja
  - Kevert eset: Egyenletrendszerek megoldása

Tartalomjegyzék

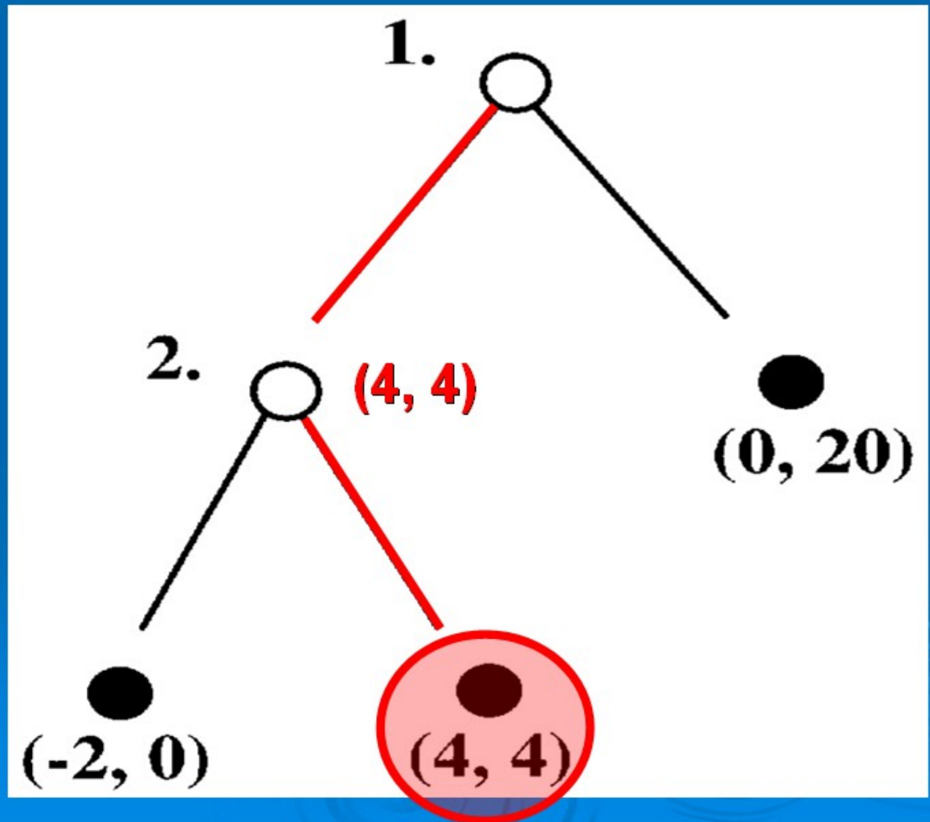
Szekvenciális játékok és hátráló indukció



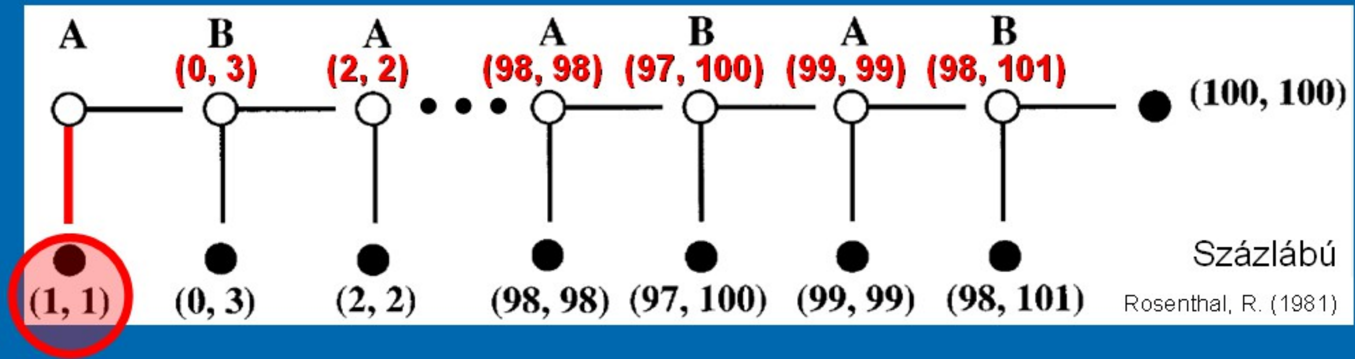
Szekvenciális játékok és hátráló indukció



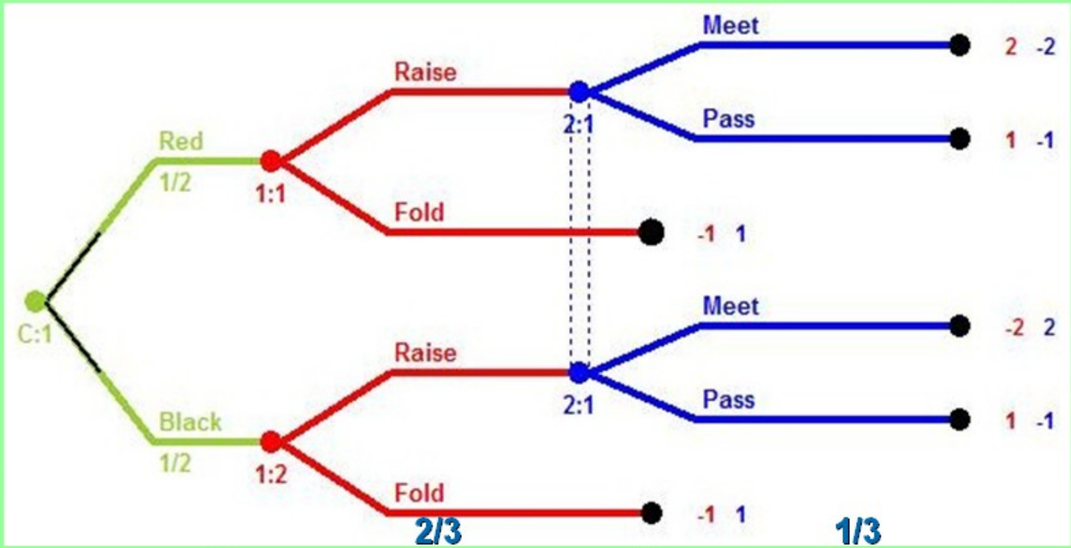
Szekvenciális játékok és hátráló indukció



Szekvenciális játékok és hátráló indukció

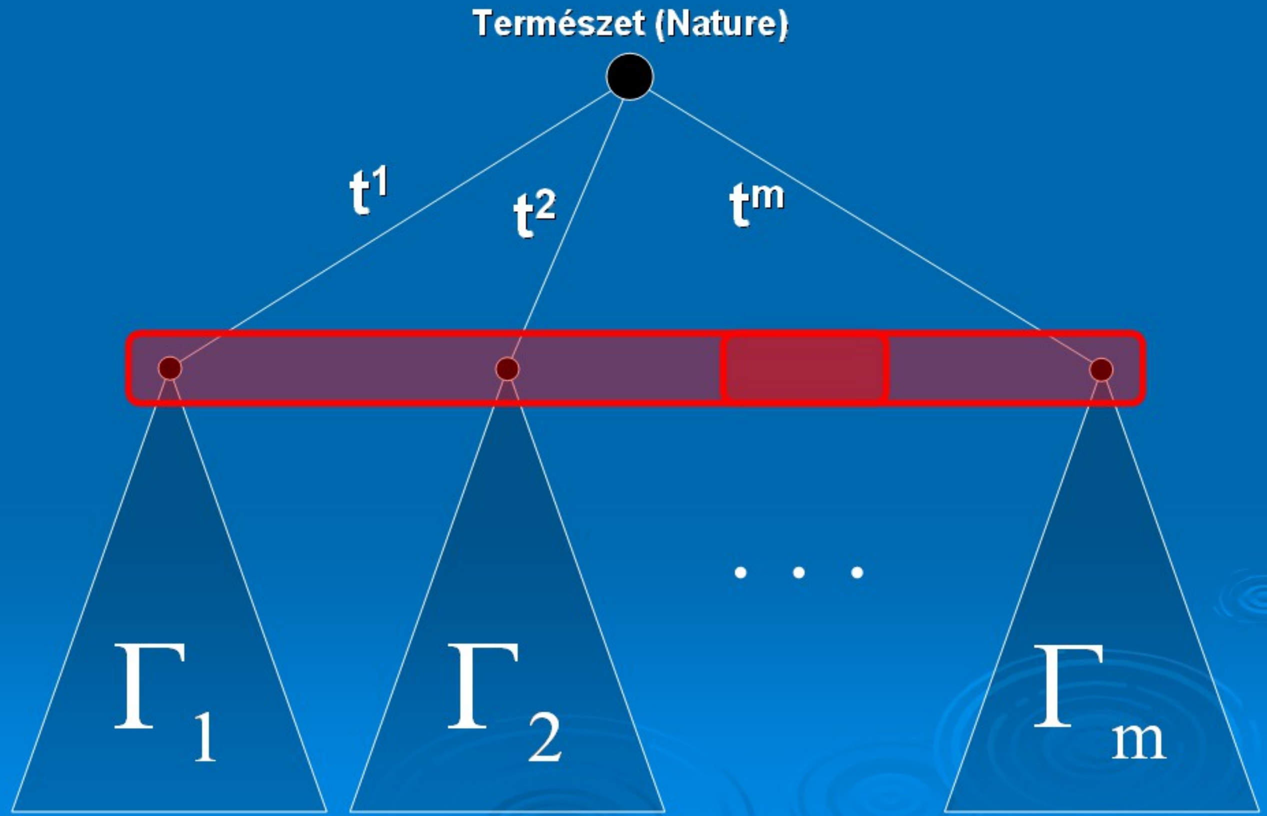


Játékok extenzív alakja



		2/3		1/3	
		1		2	
1/3	11	0	0	1	-1
2/3	12	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{2}$	0	0
0	21	$\frac{-3}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	0
0	22	-1	1	-1	1

Nem-teljes információs játékok



Bayes-i játékok normál alakja

Játék

$$\Gamma = \left(N, \{S_i\}_{i\in N}, \{T_i\}_{i\in N}, \{u_i\}_{i\in N}, \{p_i\}_{i\in N}\right)$$

Bayes-i játékok normál alakja

Játék

$$\Gamma = \left(N, \{S_i\}_{i\in N}, \{T_i\}_{i\in N}, \{u_i\}_{i\in N}, p\right)$$

Típusok és hiedelmek

Típusfüggetlenség

$$p \in \Delta(T), \text{ ahol } T = T_1 \times T_2 \times \cdots \times T_n = \times\prod_{i=1}^{n} T_i$$

$$p_i\left(t_{-i} \mid t_i\right) = \frac{p\left(t_{-i}, t_i\right)}{p\left(t_i\right)} = \frac{p\left(t_{-i}, t_i\right)}{\sum_{t_{-i}\in T_{-i}} p\left(t_{-i}, t_i\right)}$$

Bayes-i játékok normál alakja

Stratégia-profilok és kombinációik

$$\{f_i(t_i)\}_{t_i \in T_i}, \text{ ahol } f_i : T_i \to Q_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

$$f = (f_1, f_2, \ldots, f_n) \in F = \times_{i=1}^{n} F_i, \text{ azaz } f : T \to Q$$

$$f(t) = \big(f_1(t_1), f_2(t_2), \ldots, f_n(t_n)\big) \in Q \;\; \forall t \in T\text{-re}$$

Haszonfüggvények

i-nek a típusa

$$\forall i \in N\text{-re } u_i : F \times T_i \to \Re$$

$$u_i(f; t_i) = \sum_{t_{-i} \in T_{-i}} p_i(t_{-i} | t_i) \cdot u_i\big(f(t_{-i}, t_i); t_i\big)$$

Fontosabb definíciók

Bayes-i Nash-egyensúly

$f^* = \left(f_1^*, f_2^*, \ldots, f_n^*\right) \in F$ stratégiaprofil-kombináció BNE,

ha $\forall i \in N$ és $t_i \in T_i$ esetén $f_i^*\left(t_i\right) \in Q_i$ megoldása a

$$\max_{q_i \in Q_i} \sum_{t_{-i} \in T_{-i}} p_i\left(t_{-i} | t_i\right) \cdot u_i\left(\underbrace{\left(q_i, f_{-i}^*\left(t_{-i}\right)\right)}_{\text{kevert stratégia-kombináció}}; t_i\right)$$ feladatnak.

Fontosabb definíciók

Bayes-i Nash-egyensúly

$f^* = \left(f_1^*, f_2^*, \ldots, f_n^*\right) \in F$ stratégiaprofil-kombináció BNE,

ha $\forall i \in N$ és $t_i \in T_i$ esetén $f_i^*(t_i) \in Q_i$ megoldása a

$$\max_{q_i \in Q_i} \sum_{t_{-i} \in T_{-i}} p_i\left(t_{-i} | t_i\right) \cdot u_i\left(\left(q_i, f_{-i}^*\left(t_{-i}\right)\right); t_i\right)$$ feladatnak.

Példa (2 játékos esetén)

$$\sum_{t_2 \in T_2} p_1\left(t_2 | t_1\right) \cdot u_1\left(\left(f_1^*\left(t_1\right), f_2^*\left(t_2\right)\right); t_1\right) \geq \sum_{t_2 \in T_2} p_1\left(t_2 | t_1\right) \cdot u_1\left(\left(f_1\left(t_1\right), f_2^*\left(t_2\right)\right); t_1\right) \ \forall f_1, t_1\text{-re}$$

$$\sum_{t_1 \in T_1} p_2\left(t_1 | t_2\right) \cdot u_2\left(\left(f_1^*\left(t_1\right), f_2^*\left(t_2\right)\right); t_2\right) \geq \sum_{t_1 \in T_1} p_2\left(t_1 | t_2\right) \cdot u_2\left(\left(f_1^*\left(t_1\right), f_2\left(t_2\right)\right); t_2\right) \ \forall f_2, t_2\text{-re}$$

Egyszerű példa BNE számítására

$$N = \{1, 2\}$$

$$S_1 = \{\text{Fel}, \text{Le}\}, \text{ és } S_2 = \{\text{Bal}, \text{Jobb}\}$$

$$T_1 = \{t_1^1\}, \text{ és } T_2 = \{t_2^1, t_2^2\}$$

$$p\left(t_1^1, t_2^1\right) = \frac{1}{2}, \text{ és } p\left(t_1^1, t_2^2\right) = \frac{1}{2}$$

Egyszerű példa BNE számítására

1 \ 2	t_2^1		t_2^2	
	Bal	Jobb	Bal	Jobb
Fel	(3, 1)	(2, 0)	(3, 0)	(2, 1)
Le	(0, 1)	(4, 0)	(0, 0)	(4, 1)

Egyszerű példa BNE számítására

2 / 1	t_2^1		t_2^2	
	Bal	Jobb	Bal	Jobb
Fel	(3, 1)	(2, 0)	(3, 0)	(2, 1)
Le	(0, 1)	(4, 0)	(0, 0)	(4, 1)

Egyszerű példa BNE számítására

2 / 1	t_2^1		t_2^2	
	Bal	Jobb	Bal	Jobb
Fel	(3, 1)	(2, 0)	(3, 0)	(2, 1)
Le	(0, 1)	(4, 0)	(0, 0)	(4, 1)

Egyszerű példa BNE számítására

2 / 1	t_2^1		t_2^2	
	Bal	Jobb	Bal	Jobb
Fel	(3, 1)	(2, 0)	(3, 0)	(2, 1)
Le	(0, 1)	(4, 0)	(0, 0)	(4, 1)

Egyszerű példa BNE számítására

2 / 1	t_2^1		t_2^2	
	Bal	Jobb	Bal	Jobb
Fel	(3, 1)	(2, 0)	(3, 0)	(2, 1)
Le	(0, 1)	(4, 0)	(0, 0)	(4, 1)

Egyszerű példa BNE számítására

2 / 1	t_2^1		t_2^2	
	Bal	Jobb	Bal	Jobb
Fel (3+2)/2	(3, 1)	(2, 0)	(3, 0)	(2, 1)
Le (0+4)/2	(0, 1)	(4, 0)	(0, 0)	(4, 1)

Egyszerű példa BNE számítására

2 / 1	t_2^1		t_2^2	
	Bal	**Jobb**	**Bal**	**Jobb**
Fel	(3, 1)	(2, 0)	(3, 0)	(2, 1)
Le	(0, 1)	(4, 0)	(0, 0)	(4, 1)

Egyszerű példa BNE számítására

$$N = \{1, 2\}$$

$$S_1 = \{\text{Fel}, \text{Le}\}, \text{ és } S_2 = \{\text{Bal}, \text{Jobb}\}$$

$$T_1 = \{t_1^1\}, \text{ és } T_2 = \{t_2^1, t_2^2\}$$

$$p\left(t_1^1, t_2^1\right) = \frac{1}{2}, \text{ és } p\left(t_1^1, t_2^2\right) = \frac{1}{2}$$

$$f_1^*\left(t_1^1\right) = (1, 0), \text{ és } f_2^*\left(t_2^1\right) = (1, 0), \; f_2^*\left(t_2^2\right) = (0, 1)$$

Kölcsönös tudás

Kalapok rejtélye: 3 ágens (mondjuk hölgy) ül egy kerekasztal körül, a fejükön 1-1 kalap. A kalapok lehetnek pirosak, vagy feketék, de tegyük fel, hogy most mind piros. Mindegyik ágens látja a másik 2 ágens kalapját (s így nyilván annak színét is), de a sajátjáról nincs tudomása. Ekkor egy külső szemlélő, aki mindnyájukat látja, sorra megkérdezi tőlük, hogy tudják-e a kalapjuk színét? Mindenki „**Nem**"-mel válaszol. Ezek után a külső szemlélő kijelenti, hogy legalább egyikőjükön piros kalap van (ami végső soron igaz is), majd újra, sorra felteszi az előbbi kérdést. Az 1-es ágens válasza „**Nem**", a 2-esé is „**Nem**", viszont a 3-as ágens „**Igen**"-nel válaszol! *Hogy lehet ez?*

Kölcsönös tudás

	a	b	c	d	e	f	g	h
1	P	P	P	P	F	F	F	F
2	P	P	F	F	P	P	F	F
3	P	F	P	F	P	F	P	F

Kölcsönös tudás

	a	b	c	d	e	f	g	h
1	P	P	P	P	F	F	F	F
2	P	P	F	F	P	P	F	F
3	P	F	P	F	P	F	P	F

Ω a világ lehetséges állapotainak halmaza

$P_i : \Omega \to 2^{\Omega} \setminus \{\varnothing\}$ az i információs függvénye

$P_i(\omega)$ az i információs halmaza $\omega \in \Omega$-ban

$\forall i$-re és $\omega \in \Omega$-ra $\omega \in P_i(\omega)$ teljesül

Kölcsönös tudás

	a	b	c	d	e	f	g	h
1	P	P	P	P	F	F	F	F
2	P	P	F	F	P	P	F	F
3	P	F	P	F	P	F	P	F

Most például $\Omega = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, és

például $P_1(a) = \{a, e\}$, vagy $P_2(a) = \{a, c\}$

$\forall i\ \mathbf{P}_\mathrm{i} = \{P_i(\omega)\}_{\omega\in\Omega}$ az i információs partíciója

Például $\mathbf{P}_1 = \{\{a, e\}, \{b, f\}, \{c, g\}, \{d, h\}\}$

Kölcsönös tudás

	a	b	c	d	e	f	g	h
1	P	P	P	P	F	F	F	F
2	P	P	F	F	P	P	F	F
3	P	F	P	F	P	F	P	F

$$\mathbf{P}_1^0 = \{\{a,e\},\{b,f\},\{c,g\},\{d,h\}\}$$

$$\mathbf{P}_2^0 = \{\{a,c\},\{b,d\},\{e,g\},\{f,h\}\}$$

$$\mathbf{P}_3^0 = \{\{a,b\},\{c,d\},\{e,f\},\{g,h\}\}$$

Kölcsönös tudás

	a	b	c	d	e	f	g	h
1	P	P	P	P	F	F	F	F
2	P	P	F	F	P	P	F	F
3	P	F	P	F	P	F	P	F

$$\mathbf{P}_1^0 = \{\{a,e\},\{b,f\},\{c,g\},\{d,h\}\}$$

$$\mathbf{P}_2^0 = \{\{a,c\},\{b,d\},\{e,g\},\{f,h\}\}$$

$$\mathbf{P}_3^0 = \{\{a,b\},\{c,d\},\{e,f\},\{g,h\}\}$$

Kölcsönös tudás

	a	b	c	d	e	f	g	h
1	P	P	P	P	F	F	F	F
2	P	P	F	F	P	P	F	F
3	P	F	P	F	P	F	P	F

$$\mathbf{P}_1^0 = \{\{a,e\},\{b,f\},\{c,g\},\{d,h\}\}$$

$$\mathbf{P}_2^0 = \{\{a,c\},\{b,d\},\{e,g\},\{f,h\}\}$$

$$\mathbf{P}_3^0 = \{\{a,b\},\{c,d\},\{e,f\},\{g,h\}\}$$

Kölcsönös tudás

	a	b	c	d	e	f	g	h
1	P	P	P	P	F	F	F	F
2	P	P	F	F	P	P	F	F
3	P	F	P	F	P	F	P	F

$$\mathbf{P}_1^0 = \{\{a,e\},\{b,f\},\{c,g\},\{d,h\}\}$$

$$\mathbf{P}_2^0 = \{\{a,c\},\{b,d\},\{e,g\},\{f,h\}\}$$

$$\mathbf{P}_3^0 = \{\{a,b\},\{c,d\},\{e,f\},\{g,h\}\}$$

Kölcsönös tudás

	a	b	c	d	e	f	g	h
1	P	P	P	P	F	F	F	F
2	P	P	F	F	P	P	F	F
3	P	F	P	F	P	F	P	F

$$\mathbf{P}_1^0 = \{\{a,e\},\{b,f\},\{c,g\},\{d,h\}\}$$

$$\mathbf{P}_2^0 = \{\{a,c\},\{b,d\},\{e,g\},\{f,h\}\}$$

$$\mathbf{P}_3^0 = \{\{a,b\},\{c,d\},\{e,f\},\{g,h\}\}$$

Kölcsönös tudás

	a	b	c	d	e	f	g	h
1	P	P	P	P	F	F	F	F
2	P	P	F	F	P	P	F	F
3	P	F	P	F	P	F	P	F

$$\mathbf{P}_1^0 = \{\{a,e\},\{b,f\},\{c,g\},\{d,h\}\}$$

$$\mathbf{P}_2^0 = \{\{a,c\},\{b,d\},\{e,g\},\{f,h\}\}$$

$$\mathbf{P}_3^0 = \{\{a,b\},\{c,d\},\{e,f\},\{g,h\}\}$$

Kölcsönös tudás

	a	b	c	d	e	f	g	h
1	P	P	P	P	F	F	F	F
2	P	P	F	F	P	P	F	F
3	P	F	P	F	P	F	P	F

Legalább egy piros kalap van.

$$\mathbf{P}_1^0 = \{\{a,e\},\{b,f\},\{c,g\},\{d,h\}\}$$

$$\mathbf{P}_2^0 = \{\{a,c\},\{b,d\},\{e,g\},\{f,h\}\}$$

$$\mathbf{P}_3^0 = \{\{a,b\},\{c,d\},\{e,f\},\{g,h\}\}$$

Kölcsönös tudás

	a	b	c	d	e	f	g	h
1	P	P	P	P	F	F	F	F
2	P	P	F	F	P	P	F	F
3	P	F	P	F	P	F	P	F

$$\mathbf{P}_1^1 = \{\{a,e\},\{b,f\},\{c,g\},\{d\},\{h\}\}$$

$$\mathbf{P}_2^1 = \{\{a,c\},\{b,d\},\{e,g\},\{f\},\{h\}\}$$

$$\mathbf{P}_3^1 = \{\{a,b\},\{c,d\},\{e,f\},\{g\},\{h\}\}$$

Kölcsönös tudás

	a	b	c	d	e	f	g	h
1	P	P	P	P	F	F	F	F
2	P	P	F	F	P	P	F	F
3	P	F	P	F	P	F	P	F

1-es kijelenti, hogy nem tudja a kalapja színét.

$$\mathbf{P}_1^1 = \{\{a,e\},\{b,f\},\{c,g\},\{d\},\{h\}\}$$

$$\mathbf{P}_2^1 = \{\{a,c\},\{b,d\},\{e,g\},\{f\},\{h\}\}$$

$$\mathbf{P}_3^1 = \{\{a,b\},\{c,d\},\{e,f\},\{g\},\{h\}\}$$

Kölcsönös tudás

	a	b	c	d	e	f	g	h
1	P	P	P	P	F	F	F	F
2	P	P	F	F	P	P	F	F
3	P	F	P	F	P	F	P	F

$$\mathbf{P}_1^2 = \{\{a,e\},\{b,f\},\{c,g\},\{d\},\{h\}\}$$

$$\mathbf{P}_2^2 = \{\{a,c\},\{b\},\{d\},\{e,g\},\{f\},\{h\}\}$$

$$\mathbf{P}_3^2 = \{\{a,b\},\{c\},\{d\},\{e,f\},\{g\},\{h\}\}$$

Kölcsönös tudás

	a	b	c	d	e	f	g	h
1	P	P	P	P	F	F	F	F
2	P	P	F	F	P	P	F	F
3	P	F	P	F	P	F	P	F

2-es kijelenti, hogy nem tudja a kalapja színét.

$$\mathbf{P}_1^2 = \{\{a,e\},\{b,f\},\{c,g\},\{d\},\{h\}\}$$

$$\mathbf{P}_2^2 = \{\{a,c\},\{b\},\{d\},\{e,g\},\{f\},\{h\}\}$$

$$\mathbf{P}_3^2 = \{\{a,b\},\{c\},\{d\},\{e,f\},\{g\},\{h\}\}$$

Kölcsönös tudás

	a	b	c	d	e	f	g	h
1	P	P	P	P	F	F	F	F
2	P	P	F	F	P	P	F	F
3	P	F	P	F	P	F	P	F

$$\mathbf{P}_1^3 = \{\{a,e\},\{b\},\{f\},\{c,g\},\{d\},\{h\}\}$$

$$\mathbf{P}_2^3 = \{\{a,c\},\{b\},\{d\},\{e,g\},\{f\},\{h\}\}$$

$$\mathbf{P}_3^3 = \{\{a\},\{b\},\{c\},\{d\},\{e\},\{f\},\{g\},\{h\}\}$$

Kölcsönös tudás

	a	b	c	d	e	f	g	h
1	P	P	P	P	F	F	F	F
2	P	P	F	F	P	P	F	F
3	P	F	P	F	P	F	P	F

3-as kijelenti, hogy tudja a kalapja színét.

$$\mathbf{P}_1^3 = \{\{a,e\},\{b\},\{f\},\{c,g\},\{d\},\{h\}\}$$

$$\mathbf{P}_2^3 = \{\{a,c\},\{b\},\{d\},\{e,g\},\{f\},\{h\}\}$$

$$\mathbf{P}_3^3 = \{\{a\},\{b\},\{c\},\{d\},\{e\},\{f\},\{g\},\{h\}\}$$

Kölcsönös tudás

$$\mathbf{P}_1^3 = \{\{a,e\},\{b\},\{f\},\{c,g\},\{d\},\{h\}\}$$

$$\mathbf{P}_2^3 = \{\{a,c\},\{b\},\{d\},\{e,g\},\{f\},\{h\}\}$$

$$\mathbf{P}_3^3 = \{\{a\},\{b\},\{c\},\{d\},\{e\},\{f\},\{g\},\{h\}\}$$

Kölcsönös tudás

$$\mathbf{P}_1^3 = \{\{a,e\},\{b\},\{f\},\{c,g\},\{d\},\{h\}\}$$

$$\mathbf{P}_2^3 = \{\{a,c\},\{b\},\{d\},\{e,g\},\{f\},\{h\}\}$$

$$\mathbf{P}_3^3 = \{\{a\},\{b\},\{c\},\{d\},\{e\},\{f\},\{g\},\{h\}\}$$

Bármely $E \subseteq \Omega$ részhalmaz **esemény**

i **tudja** E eseményt $\omega \in \Omega$-ban, ha $P_i(\omega) \subseteq E$

$K_i(E) = \{\omega \in \Omega \mid P_i(\omega) \subseteq E\}$ az i **tudás fv**.-e

Könnyen belátható, hogy $K_i(E) = \bigcup_{P_i(\omega) \subseteq E} P_i(\omega)$

Kölcsönös tudás

$$\mathbf{P}_1^3 = \{\{a,e\},\{b\},\{f\},\{c,g\},\{d\},\{h\}\}$$

$$\mathbf{P}_2^3 = \{\{a,c\},\{b\},\{d\},\{e,g\},\{f\},\{h\}\}$$

$$\mathbf{P}_3^3 = \{\{a\},\{b\},\{c\},\{d\},\{e\},\{f\},\{g\},\{h\}\}$$

Például fentebb $K_1(\{a,c,e\}) = \{a,e\}$, vagy $K_i(\{a,c,e,g\}) = \{a,c,e,g\}$ $(i = 1,2,3)$

Az $E \subseteq \Omega$ esemény **nyilvánvaló** i-nek, ha $E = \bigcup\limits_{P_i(\omega)\subseteq E} P_i(\omega)$, azaz ha $K_i(E) = E$

Kölcsönös tudás

Egy $E \subseteq \Omega$ esemény **kölcsönös tudás** két ágens $(1\text{-es és } 2\text{-es})$ számára $\omega \in \Omega$-ban, ha ω eleme a köv. végtelen sor minden elemének:

$$K_1(E), K_2(E), K_1(K_2(E)), K_2(K_1(E)), \ldots$$

Egy $E \subseteq \Omega$ esemény **kölcsönös tudás** egy ágenscsoport számára $\omega \in \Omega$-ban, ha ω eleme bármely olyan $F \subseteq E$ részeseménynek, amely nyilvánvaló a csoport minden tagja számára.

Kölcsönös tudás

A_i legyen az i ágens cselekvéseinek halmaza

Ekkor i egy $s_i \in S_i$ stratégiája $s_i : \mathbf{P_i} \to A_i$

Legyen $E_{a_i} = \left\{\omega \in \Omega \mid s_i\left(P_i(\omega)\right) = a_i\right\}$

Ekkor egy j ágens, amely tudja P_i-t és s_i-t $\omega \in \Omega$ állapotban, akkor és csak akkor fogja tudni, hogy i az a_i-t cselekszi $\omega \in \Omega$-ban, ha tudja az E_{a_i} eseményt.

Kölcsönös tudás

Hasonlóan, ha P_i és s_i kölcsönös tudás az $\omega \in \Omega$ állapotban, akkor az, hogy i az a_i-t cselekszi $\omega \in \Omega$-ban, akkor és csak akkor kölcsönös tudás, ha E_{a_i} is kölcsönös tudás.

Unió-konzisztencia feltétel

s_i unió-konzisztens, ha $\forall E, F$ információs halmazra $s_i(E) = s_i(F) \Rightarrow s_i(E) = s_i(E \cup F)$

Kölcsönös tudás

Tétel (Egyetértési tétel)

Ha minden ágens ugyanazon π stratégia szerint cselekszik, továbbá az aktuális $\omega \in \Omega$ állapotban kölcsönös tudás, hogy ki-mit tesz, akkor mind ugyanazt teszik.

Kölcsönös tudás

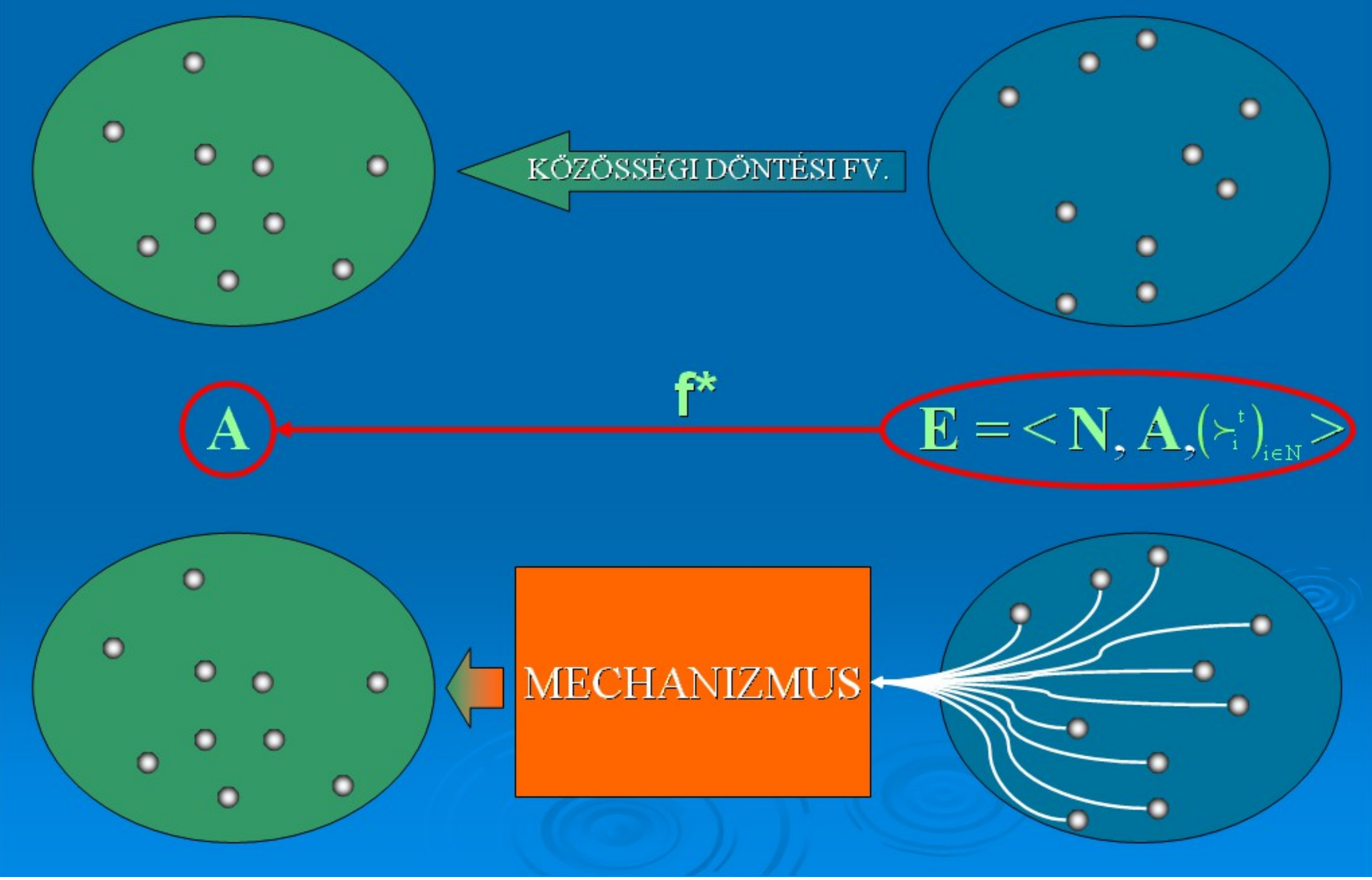
Bizonyítás (Egyetértési tétel)

Ha $\omega \in \Omega$ állapotban kölcsönös tudás, hogy i az a_i-t cselekszi, akkor E_{a_i} is kölcsönös tudás.

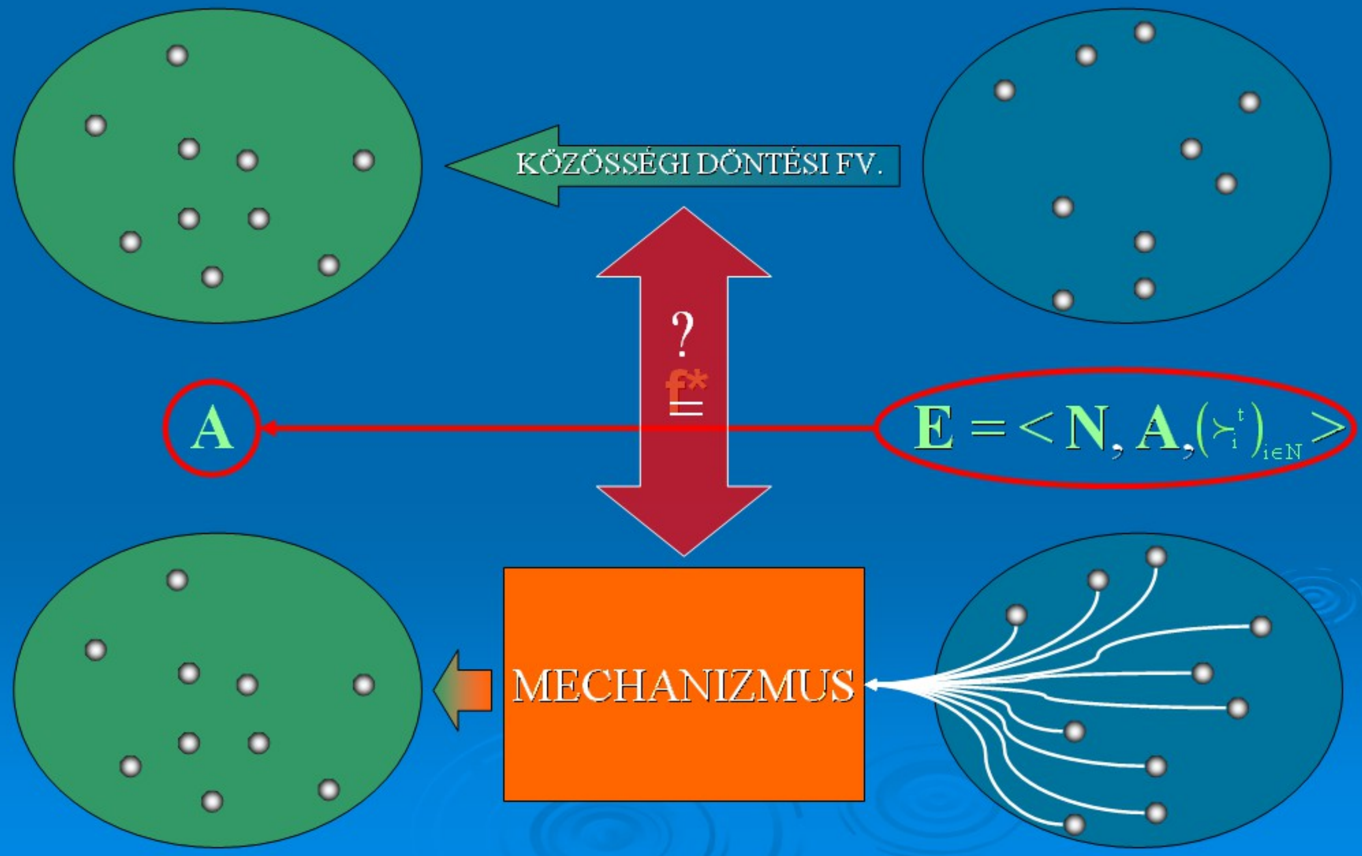
Mivel $E := E_{a_i}$ kölcsönös tudás, ezért E $\forall i$-re nyilvánvaló, azaz $E = \bigcup_{\omega \in E} P_i(\omega)$ $\forall i$-re.

Ekkor pedig az unió-konzisztencia feltételből adódóan $a_i = \pi\left(E_{a_i}\right) = \pi\left(E\right) = a_j$ $\forall j$-re. ■

Mechanizmus tervezés



Mechanizmus tervezés



Mechanizmus tervezés

Mechanizmus

$\Gamma = \left\langle \{M_i\}_{i\in N}, g, \{p_i\}_{i\in N} \right\rangle$ **mechanizmus**, ahol M_i az $i \in N$ **ágens mechanizmuson belüli stratégiáinak** halmaza, $M = \times_{i\in N} M_i$ a **mechanizmuson belüli stratégia-kombinációk** halmaza, $g : M \to \Delta(A)$ a **kimeneteli függvény (outcome function)**, és $p_i : M \to \Re$ az $i \in N$ **ágens kifizetési függvénye (payment function)**.

Mechanizmus tervezés

Indukált játék és tulajdonságai

$\left(\Gamma, E\right) = \left\langle N, \{M_i\}_{i\in N}, \{T_i\}_{i\in N}, \{q_i\}_{i\in N}, \{u_i\}_{i\in N} \right\rangle$ **indukált (nem teljes információs) játék**, ahol $u_i : A \times T_i \to \Re$ az $i \in N$ **ágens haszna (utility function)**, amely $\forall m \in M, \forall t_i \in T_i : u_i\left(g(m), t_i\right) = v_i\left(g(m), t_i\right) + p_i(m)$ <u>kvázi lineáris</u>.

A Γ mechanizmus **egyénileg racionális** egy E környezetben, ha $\forall i \in N, t_i \in T_i$, és $m \in M$ -re $u_i\left(g(m), t_i\right) \geq 0$. A $\left(\Gamma, E\right)$ indukált játékban $\sigma_i : T_i \to \Delta(M_i)$ az $i \in N$ játékos egy **stratégia profilja**, a $\sigma = \left(\sigma_i\right)_{i\in N}$ leképezés n-es pedig egy **stratégia-profil kombináció**. Adott stratégia-profil kombináció esetén $i \in N$ játékos $t_i \in T_i$ típusának **várható haszna**

$$u_i\left(g(\sigma) \mid t_i\right) = \sum_{t_{-i} \in T_{-i}} q_i\left(t_{-i} \mid t_i\right) \cdot u_i\left(g\left(\sigma\left(t_{-i}, t_i\right)\right); t_i\right).$$

Mechanizmus tervezés

Közösségi döntési függvények

$f:T\to\Delta(A)$ **közösségi döntési függvény**. Adott f esetén $i\in N$ játékos $t_i\in T_i$ típusának **várható haszna** $v_i(f\mid t_i)=\sum_{t_{-i}\in T_{-i}} q_i(t_{-i}\mid t_i)\cdot v_i\big(f(t_{-i},t_i);t_i\big)$.

Két közösségi döntési függvény, f és h **ekvivalens**, ha $\forall t\in T$-re $f(t)=h(t)$.

Játékelméleti döntési elv

$\mathrm{S}(\Gamma,E)$ jelöli az S **játékelméleti döntési elv által** (Γ,E) indukált játékban **előírt** $\{\sigma=(\sigma_i)_{i\in N}\}$ stratégia-profil kombinációk halmazát.

Implementáció

Ha adott E, és f esetén létezik olyan Γ mechanizmus, hogy $g\big(\mathrm{S}(\Gamma,E)\big)=f$, akkor azt mondjuk, hogy f S-**implementálható**.

Mechanizmus tervezés

Domináns egyensúly

A $\sigma = (\sigma_i)_{i \in N}$ stratégia-profil kombinációt a (Γ, E) játék **domináns egyensúlyának** nevezzük, ha $\forall i \in N$, és $\forall t_i \in T_i$ esetén $\sigma_i(t_i) = \arg\max_{m_i \in \Delta(M_i)} \sum_{t_{-i} \in T_{-i}} q_i(t_{-i} \mid t_i) \cdot u_i\left(g\left(\sigma'_{-i}(t_{-i}), m_i\right), t_i\right)$ tetszőleges σ'_{-i}-re, azaz ha mindegyik játékos mindegyik típusának az a legjobb, ha egyensúlyi stratégia-profiljának megfelelően cselekszik *független attól, hogy a többi játékos mit tesz*.

Bayes-i (Nash) egyensúly

A $\sigma = (\sigma_i)_{i \in N}$ stratégia-profil kombinációt a (Γ, E) játék **Bayes-i (Nash) egyensúlyának** nevezzük, ha $\forall i \in N$ és $\forall t_i \in T_i$ esetén $\sigma_i(t_i) = \arg\max_{m_i \in \Delta(M_i)} \sum_{t_{-i} \in T_{-i}} q_i(t_{-i} \mid t_i) \cdot u_i\left(g\left(\sigma_{-i}(t_{-i}), m_i\right), t_i\right)$, azaz ha egyik játékos egyik típusának se éri meg *egyedülálló módon* eltérnie az egyensúlyi stratégia-profiljától.

Mechanizmus tervezés

Mechanizmusok további tulajdonságai

A $\Gamma = \left\langle \{M_i\}_{i\in N}, g, \{p_i\}_{i\in N} \right\rangle$ mechanizmus **direkt**, ha $\forall i \in N$ esetén $M_i = T_i$, továbbá $g = f$. A $\sigma = (\sigma_i)_{i\in N}$ stratégia-profil kombináció **igazmondás** a Γ direkt mechanizmus által indukált (Γ, E) játékban, ha $\sigma(t) = t$ teljesül $\forall t \in T$-re, azaz, ha σ identikus. A Γ mechanizmus **indíték kompatibilis (incentive compatible)** egy E környezet esetén, ha direkt, és az általa indukált (Γ, E) játékban az igazmondás egyensúly. A Γ mechanizmus **igazmondó (truthful)**, ha indíték kompatibilis, és az általa indukált (Γ, E) játékban az igazmondás domináns egyensúly. A Γ mechanizmus **erősen igazmondó (strongly truthful)** ha igazmondó, és az általa indukált (Γ, E) játékban az igazmondás az ***egyetlen*** domináns egyensúly.

Mechanizmus tervezés

Tétel (Revelációs elv)

Ha létezik olyan $\Gamma = \left\langle \{M_i\}_{i\in N}, g, \{p_i\}_{i\in N} \right\rangle$ mechanizmus, amely adott E környezetben **D**-implementál egy f közösségi döntési függvényt, akkor olyan $\Gamma^* = \left\langle \{T_i\}_{i\in N}, f, \{p_i^*\}_{i\in N} \right\rangle$ igazmondó mechanizmus is létezik, amely ugyancsak **D**-implementálja f-et E-ben.

Bizonyítás

Jelölje $\forall t \in T$ -re $\sigma(t) \in \Delta(M)$ a (Γ, E) indukált játék domináns egyensúlyi stratégia-kombinációját. Ha ekkor $\forall i \in N$ -re és $\forall t \in T$ -re $\mathbf{p}_i^*(\mathbf{t}) = \mathbf{p}_i(\sigma(\mathbf{t}))$, akkor mivel $\forall t \in T$ esetén $f(t) = g(\sigma(t))$, hiszen a Γ mechanizmus **D**-implementálja f-et E-ben, úgy $\forall i \in N$ -re és $\forall t \in T$ -re $u_i(g(\sigma(t)); t_i) = v_i(g(\sigma(t)); t_i) + p_i(\sigma(t)) = v_i(f(t); t_i) + p_i^*(t)$ teljesül. ■

Mechanizmus tervezés

VCG mechanizmusok

$\Gamma = \left\langle \{T_i\}_{i\in N}, f, \{p_i\}_{i\in N} \right\rangle$ direkt mechanizmus **VCG (Vickrey-Clarke-Groves) mechanizmus**, ha $\forall i \in N$ -re és $\forall t \in T$ -re $p_i(t) = \sum_{\substack{j\in N \\ j\neq i}} v_j\left(f(t);t_j\right) + h_i(t_{-i})$,

ahol $h_i(t_{-i})$ tetszőleges valós függvénye $t_{-i} \in T_{-i}$ -nek. Azaz egy VGC által indukált játékban $u_i\left(f(t);t_i\right) = v_i\left(f(t);t_i\right) + p_i(t) = \sum_{j\in N} v_j\left(f(t);t_j\right) + h_i(t_{-i})$ teljesül $\forall i \in N$ -re és $\forall t \in T$ -re. Bizonyított, hogy minden VCG mechanizmus igazmondó (Groves, 1973).

Mechanizmus tervezés

Esettanulmány: intelligens router-t kívánunk létrehozni, amely feltérképezi a környező Internet hálózat topológiáját (a késleltetéseket is beleértve), és ennek fényében meghatározza a legrövidebb utat adott (***x,y***) csomópontok között. Az adatnak ennek során számos köztes router-en kell majd áthaladnia. Eddig az ilyesmit a router-ek önkéntes alapon végezték (feltehetőleg az adatcsomagok továbbításának alacsony költsége miatt), viszont amennyiben nagyobb adatmennyiségek átmozgatásáról van szó (pl. videók), és a sávszélességet különböző szolgáltatási (QoS) protokolloknak megfelelően kell kezelni, úgy a router-ek eddigi altruista magatartása nem biztos, hogy továbbra is fenntartható. Ebben az esetben olyan protokollt kell kidolgoznunk, amely számításba veszi a router-ek egyéni érdekeit is.

Mechanizmus tervezés

Feladat modellje

A kommunikációs hálózatot modellezzük egy irányított G gráffal, amelyben kiemelten szerepel az x, és y csúcs. A gráf e éleit tekintsük egy-egy ágensnek. Az e ágens privát információja (típusa) $t_e \geq 0$ egy-egy üzenet átküldésének költségét jelentse e számára. Célunk, hogy megtaláljuk az x-ből y-ba vezető legolcsóbb utat (és majd át is küldjünk rajta egy üzenetet x-ből y-ba). Az alternatívák halmaza tehát az x és y közt menő utak halmaza. Az e ágens értékelése (valuation) 0, ha az e él nem része az adott útvonalnak (alternatívának), míg egyébként $-t_e$. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a gráfban az élek most kétirányúak.

Mechanizmus tervezés

Router-ünk kezdetben lépjen kapcsolatba a környező hálózat többi router-ével, és kérdezze le tőlük az üzenetek átvitelének költségét, majd pedig a kapott „térkép” alapján készítse el a megfelelő, legrövidebb útvonalat. Jó lenne, ha a router-ek a valódi költségüket közölnék velünk. Lényegében tehát egy olyan direkt mechanizmus létrehozása lenne a cél, amelyben az igazmondás egyensúly (hiszen így tudunk majd a valóságnak megfelelő, valóban legrövidebb útvonalat/alternatívát előállítani az egyes e ágensek által bejelentett, valódi t_e költségek alapján). A kimeneteli függvény (outcome function) tehát a bejelentések alapján a legrövidebb út, mint alternatíva kiszámításáért felelős. Az ágensek mechanizmuson belüli kifizetési függvénye (payment function) pedig legyen a következő: $\forall e$-re $p_e = d_{G|e=\infty} - d_{G|e=0}$, ahol $d_{G|e=\infty}$ jelöli annak a (bejelentések alapján számított) legrövidebb útnak a hosszát, amit az e él nélkül kapunk, míg $d_{G|e=0}$ jelöli annak a (bejelentések alapján számított) legrövidebb útnak a hosszát, amit úgy kapunk, hogy az e él t_e költségét zérusnak tekintjük.

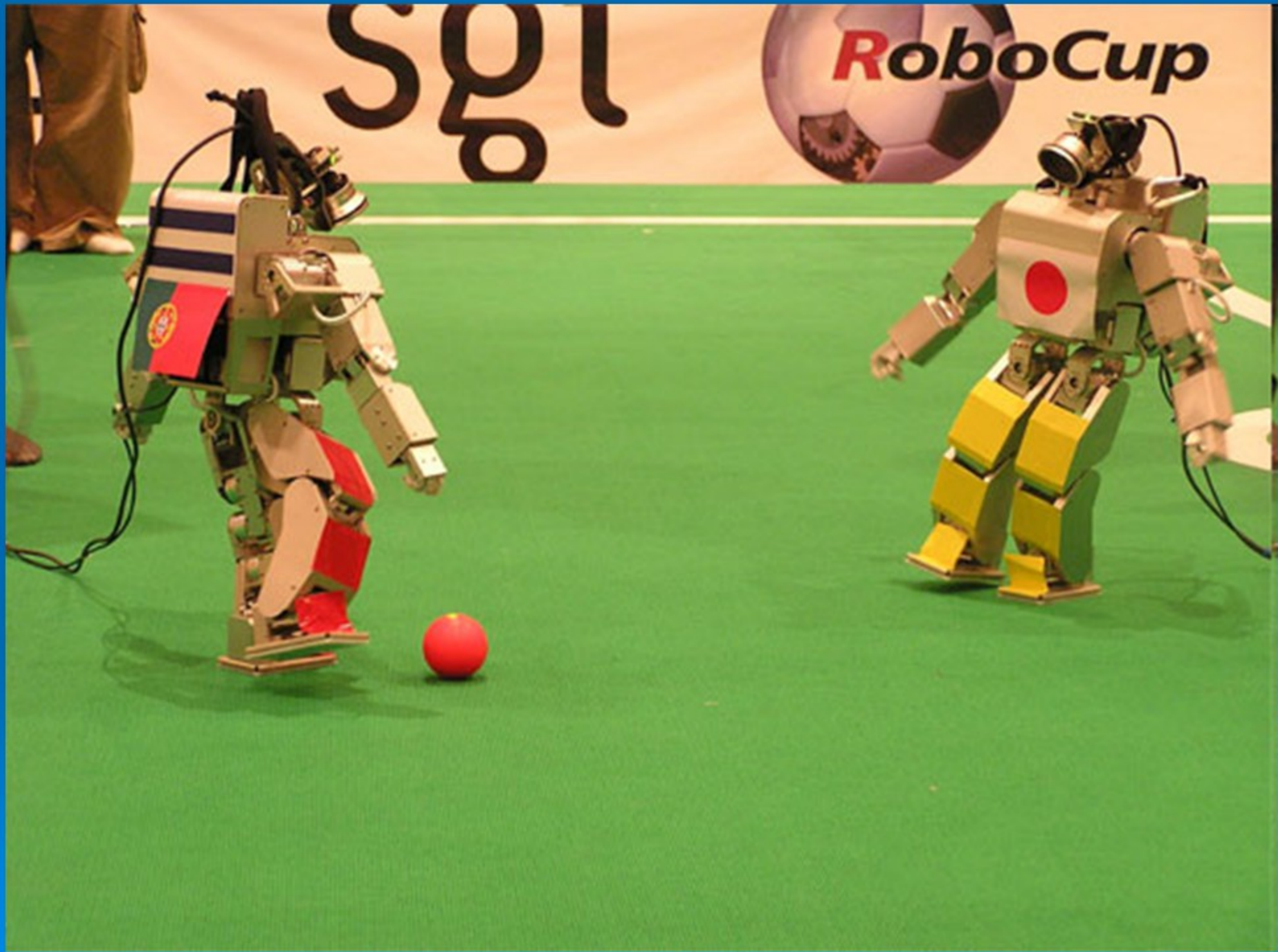
Mechanizmus tervezés

Feladat megoldása

Vegyük észre, hogy amennyiben az ágensek a hasznukat (egyéni értékelés + kifizetés) maximalizálják, úgy gyakorlatilag a negatív t_e költségek összegét maximalizálják (a $-d_{G|e=0}$ tagtól eltekintve, ami ugye pozitív), avagy a megoldás összköltségét minimalizálják. Vegyük továbbá észre, hogy a $d_{G|e=\infty}$ tag éppen a VGC mechanizmusok kifizetési függvényének képletében a szummás résznek felel meg, míg $d_{G|e=0}$ a szummához hozzáadott $h_i(t_{-i})$ függvénynek. Magyarán <u>a kidolgozott router-ünk éppen egy VCG mechanizmus szerint működik, amiről viszont tudjuk, hogy **igazmondó**</u>. *Megjegyzés: router-ünk az ágensek számára a kifizetéseket igen sokféleképp realizálhatja a gyakorlatban, pl. magasabb prioritást ad a csomagjaiknak, stb.*

Jellegzetes alkalmazási területek

- Csoportos robot-koordináció
- Intelligens játékprogramok fejlesztése
- Gazdasági versengés modellezése
- Politikai versengés modellezése
- Árverések, szavazási protokollok
- Informatikai rendszerek modellezése
- Fizikai jelenségek modellezése


RoboCup


Robo-Erectus
Robotinho
Bodo
Jürgen
Rudi
E
D
C
LOLA
LOLA