

Gyakorlatok

2010. tavasz

Tartalomjegyzék

1. Közönséges differenciálegyenletek	2
1.1. Bevezető	2
1.2. Szétválasztható változójú differenciálegyenletek	3
1.3. Lineáris elsőrendű differenciálegyenlet	8
1.4. Új változó bevezetése	12
1.5. Iránymező, izoklinák	16
1.5.1. További gyakorló feladatok a témához:	18
1.6. Magasabbrendű, homogén, lineáris, állandó együtthatós differenciálegyenletek .	18
1.7. Magasabbrendű, inhomogén, lineáris, állandó együtthatós differenciálegyenletek	20
1.8. Lineáris rekurzió	23
1.9. Alkalmazások	24
2. Függvénysorok	28
2.1. Hányados- és gyökkritérium (numerikus sorok)	28
2.2. Weierstrass-kritérium függvénysorok egyenletes konvergenciájára	32
2.3. Hatványsorok konvergencia sugara, konvergenciatartománya	33
2.4. Hatványsorok összegfüggvénye	36
2.5. Taylor-polinom	38
2.6. Taylor-sor	40
2.7. Binomiális sorfejtés	48
2.8. Fourier-sor	50
3. Többváltozós függvények	54
3.1. Határérték, folytonosság	54
3.2. Parciális deriváltak, totális derivált	57
3.3. Érintősík, differenciál, iránymenti derivált	61
3.4. Összetett függvény deriválása	67
3.5. Szélsőértékszámítás	69
3.6. Kétszeres integrál téglalap- és normál tartományokon	72
3.7. Kettős integrálok transzformációja	76
3.8. Hármassz integrál	79
4. Komplex függvénytan	84
4.1. Cauchy–Riemann egyenletek, differenciálhatóság, regularitás, harmonikus társ	84
4.2. Elemi függvények, egyenletek megoldása	86
4.3. Komplex vonalintegrál	88
4.4. Cauchy-féle integrálformulák	90

1. Közönséges differenciálegyenletek

1.1. Bevezető

Néhány egyszerű példa az alapfogalmak megértéséhez:

1. Feladat: Mutassuk meg, hogy

$$y = e^x \int_0^x e^{t^2} dt + 3e^x$$

megoldása az alábbi differenciálegyenletnek!

$$y' - y = e^{x+x^2}$$

Megoldás.

(Ez egy elsőrendű differenciálegyenlet. Azt, hogy a függvény megoldása a differenciálegyenletnek, mondjuk úgy is, hogy kielégíti a differenciálegyenletet.)

A megadott függvény deriválható, mert deriválható függvények összetétele. (Felhívjuk a figyelmet az integrálfüggvényre, emlékezzünk az integrálszámítás II. alaptételére is, az integrandusz folytonos!)

$$y' = (e^x)' \cdot \int_0^x e^{t^2} dt + e^x \cdot \left(\int_0^x e^{t^2} dt \right)' + (3e^x)' = e^x \cdot \int_0^x e^{t^2} dt + e^x \cdot e^{x^2} + 3e^x$$

Behelyettesítve a differenciálegyenlet bal oldalába y -t és y' -öt:

$$y' - y = e^x \cdot e^{x^2} = e^{x+x^2}$$

Tehát valóban a jobb oldalt kaptuk.

2. Feladat:

$$y'' = e^{-3x} + 2x$$

a) Adjuk meg a differenciálegyenlet általános megoldását!

b) Adjuk meg azt a partikuláris megoldást, mely eleget tesz az $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$ kezdeti feltételeknek!

Megoldás.

a) A differenciálegyenletből: $y' = -\frac{1}{3}e^{-3x} + x^2 + C_1$

Ebből az általános megoldás: $y = \frac{1}{9}e^{-3x} + \frac{x^3}{3} + C_1x + C_2$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

b) $y(0) = 1$: a megoldásban x helyére 0-át, y helyére 1-et helyettesítve:

$$1 = \frac{1}{9} + C_2 \implies C_2 = \frac{8}{9}$$

$y'(0) = 2$: az y' -re kapott egyenletben elvégezve a helyettesítést ($x = 0$, $y' = 2$)

$$2 = -\frac{1}{3} + C_1 \implies C_1 = \frac{7}{3}$$

Így a keresett partikuláris megoldás:

$$y = \frac{1}{9}e^{-3x} + \frac{x^3}{3} + \frac{7}{3}x + \frac{8}{9}$$

1.2. Szétválasztható változójú differenciálegyenletek

Foglaljuk össze a lényeget a példamegoldás előtt!

3. Feladat:

Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet!

$$y' = \frac{x}{y} e^{2x-3y^2}, \quad y \neq 0$$

Megoldás.

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{e^{-3y^2}}{y} x e^{2x} \\ \Rightarrow \underbrace{\int \frac{y}{e^{-3y^2}} dy}_{\frac{1}{6} \int 6y e^{3y^2} dy} &= \underbrace{\int x e^{2x} dx}_{\text{parciális integrálás}} \end{aligned}$$

...

Így a megoldás:

$$\frac{1}{6} e^{3y^2} = \frac{x}{2} e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Nem kell erőltetni az y -ra való kifejezést. De, ha kifejezzük, akkor ne felejtsük el a \pm -t! Adott $y(x_0) = y_0$ kezdeti érték probléma megoldásánál természetesen csak az egyik előjel szerepel majd, hiszen a megoldás egyértelmű, mert $y_0 > 0$, vagy $y_0 < 0$.

4. Feladat:

$$y' = \frac{y-2}{xy}, \quad x \neq 0, \quad y \neq 0$$

- a) Oldja meg a differenciálegyenletet!
 b) Oldja meg az $y(1) = 2$, $y(1) = 3$, illetve az $y(-1) = -3$ kezdeti érték problémákat!

Megoldás.

- a) $y \equiv 2$ megoldás. (Persze az $x > 0$, vagy $x < 0$ része!)
 (Jó lenne felrajzolni azokat a síkrészeket, ahova eső kezdeti érték probléma egyértelműen megoldható)

Ha $y \neq 2$:

$$\int \underbrace{\frac{y}{y-2}}_{1+\frac{2}{y-2}} dy = \int \frac{1}{x} dx$$

Innen a megoldás:

$$y + 2 \ln |y - 2| = \ln |x| + C$$

b) $y(1) = 2 : y \equiv 2$

$y(1) = 3 : \dots y + 2 \ln(y - 2) = \ln x + 3$

$y(-1) = -3 : \dots y + 2 \ln(2 - y) = \ln(-x) - 3 + 2 \ln 5$

Hívjuk fel a figyelmet az abszolút érték jelek elhagyására!

5. Feladat:

Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet!

$$y' = \frac{y^2 + 4y + 9}{(x - 1)(x + 5)}, \quad x \neq 1, \quad x \neq -5$$

Megoldás.

$$\int \frac{1}{(y + 2)^2 + 5} dy = \int \frac{1}{(x - 1)(x + 5)} dx$$

⋮

$$\frac{1}{5} \sqrt{5} \operatorname{arctg} \frac{y + 2}{\sqrt{5}} = \frac{1}{6} (\ln|x - 1| - \ln|x + 5|) + C$$

6. Feladat:

A rádium bomlási sebessége arányos a pillanatnyi rádiummennyiséggel.

Tudjuk, hogy a rádium felezési ideje 1600 év.

A kiindulási anyag mennyiségének hány százaléka bomlik fel 100 év alatt?

Megoldás.

Jelöljük $R(t)$ -vel a rádium mennyiségét a t időpontban, k -val az arányossági tényezőt (pozitívnak választjuk).

A kapott differenciálegyenlet:

$$\frac{dR}{dt} = -k R$$

(A negatív előjel mutatja, hogy a bomlás következtében a rádium mennyisége csökken.) A szétválasztható változójú differenciálegyenlet megoldása: $\dots R = C e^{-k t}$

Ha a $t = 0$ időpontban a kiindulási anyag mennyisége R_0 , tehát az $R(0) = R_0$ kezdeti érték problémánk van:

$$R_0 = C e^{-k \cdot 0} \implies C = R_0$$

Tehát a keresett partikuláris megoldás: $R = R_0 e^{-k t}$.

Mivel ismerjük a felezési időt, meghatározható a k arányossági tényező:

$$\frac{1}{2} R_0 = R_0 e^{-k \cdot 1600} \implies k = \frac{\ln 2}{1600}$$

Tehát a rádium mennyisége az idő függvényében:

$$R(t) = R_0 e^{-\frac{\ln 2}{1600} t}$$

Így a 100 év múlva megmaradt mennyiség:

$$R(100) = R_0 e^{-\frac{\ln 2}{16}} = R_0 e^{-0,0433} \implies \frac{R(100)}{R_0} = e^{-0,0433} = 0,958$$

Vagyis 95,8%, tehát az eredeti mennyiség 4,2%-a bomlott el.

További feladatok:

Oldja meg az alábbi differenciálegyenleteket!

7. Feladat: $y' = (3x - 1)^5 (y^2 - 4y)$

Megoldás.

$y \equiv 0$ és $y \equiv 4$ megoldás. Egyébként:

$$\int \frac{1}{y(y-4)} dy = \int (3x-1)^5 dx$$

⋮

$$\frac{1}{4} (-\ln|y| + \ln|y-4|) = \frac{1}{3} \frac{(3x-1)^6}{6} + C$$

Keresse meg az $y(0) = 2$, illetve az $y(0) = 4$ kezdeti feltételeket kielégítő megoldásokat!

...

8. Feladat: $y' = \frac{\operatorname{sh} y}{\operatorname{ch} y} x (2x^2 + 1)^6$

Megoldás.

$y \equiv 0$ megoldás. Ha $y \neq 0$:

$$\int \frac{\operatorname{ch} y}{\operatorname{sh} y} dy = \int x (2x^2 + 1)^6 dx$$

$$\ln|\operatorname{sh} y| = \frac{1}{4} \frac{(2x^2 + 1)^7}{7} + C$$

9. Feladat: $y' = (\operatorname{ctg} y) \ln(x-2)$, $y(3) = \pi/3$, illetve $y(3) = \pi/2$

Megoldás.

$$x > 2, \quad y \neq k\pi$$

$$y \equiv \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{megoldás. Egyébként:}$$

$$\int \frac{\sin y}{\cos y} dy = \int \ln(x-2) dx$$

$$\frac{f'}{f} \text{ alakú} \quad \text{parciális integrálás}$$

...

$$-\ln|\cos y| = x \ln(x-2) - x - 2 \ln(x-2) + C$$

$$y(3) = \pi/3 : \quad \dots \quad C = 3 + \ln 2, \quad \text{így}$$

$$-\ln(\cos y) = x \ln(x-2) - x - 2 \ln(x-2) + 3 + \ln 2,$$

$$y \in (0, \frac{\pi}{2}) \quad \text{és} \quad x > 2$$

$$y(3) = \pi/2 : \quad y \equiv \frac{\pi}{2} \quad x > 2 \text{ része}$$

$$\mathbf{10. Feladat:} \quad \boxed{y' = \frac{2y^2 + 3}{y} 2x e^{-4x^2}, \quad y \neq 0}$$

Megoldás.

$$\int \frac{y}{2y^2 + 3} dy = \int 2x e^{-4x^2} dx$$

$$f'/f \quad \quad \quad f' e^f$$

$$\frac{1}{4} \int \frac{4y}{2y^2 + 3} dy = -\frac{1}{4} \int -4 \cdot 2x e^{-4x^2} dx$$

$$\frac{1}{4} \ln(2y^2 + 3) = -\frac{1}{4} e^{-4x^2} + C$$

Vagyis

$$\ln(2y^2 + 3) = -e^{-4x^2} + C$$

$$\mathbf{11. Feladat:} \quad \boxed{y' = (y+3)^2 \arcsin x, \quad |x| < 1}$$

Megoldás.

$$y \equiv -3, \quad |x| < 1 \quad \text{része megoldás. Ha } y \neq -3:$$

$$\int \frac{1}{(y+3)^2} dy = \int 1 \cdot \arcsin x dx$$

parc. int.

...

$$\frac{(y+3)^{-1}}{-1} = x \arcsin x + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{1-x^2}}{\frac{1}{2}} + C$$

12. Feladat: $y' = \frac{y^2+3}{y^2+1} \quad 2x \operatorname{arctg} 2x$

Megoldás.

$$\int \frac{y^2+1}{y^2+3} dy = \int 2x \operatorname{arctg} 2x dx$$

áltört parc. int.

$$y - \frac{2}{3} \frac{\operatorname{arctg} \frac{y}{\sqrt{3}}}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = x^2 \operatorname{arctg} 2x - \frac{1}{2} \left(x - \frac{\operatorname{arctg} 2x}{2} \right) + C$$

13. Feladat:

$$y' = \frac{(2y^2-8) \operatorname{arctg} x}{y(1+x^2)}, \quad y \neq 0$$

- a) Határozza meg az $x_0 = 0$, $y_0 = -1$ ponton áthaladó megoldást!
 b) Határozza meg az $x_0 = 0$, $y_0 = -2$ ponton áthaladó megoldást!

Megoldás.

 $y \equiv \pm 2$ megoldás. Ha $|y| \neq 2$:

$$\frac{1}{4} \int \frac{4y}{2y^2-8} dy = \int \frac{1}{1+x^2} \operatorname{arctg} x dx$$

$$\implies \frac{1}{4} \ln |2y^2-8| = \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{2} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

a) $y(0) = -1$: ... $C = \frac{1}{4} \ln 6$

$$\frac{1}{4} \ln |2y^2-8| = \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{2} + \frac{1}{4} \ln 6, \quad y < 0$$

b) $y(0) = -1$: $y \equiv -2$

14. Feladat:
$$y' = \frac{y^2 - 9}{x^2 + 25}$$

Megoldás.

...

15. Feladat:
$$y' = y \ln^2 y \ln x, \quad x > 0, \quad y > 0$$

Megoldás.

...

16. Feladat:

Írjuk fel azoknak az első negyedbe eső sígörbéknek az egyenletét, melyekre teljesül, hogy bármely pontjában húzott érintőjének a koordinátatengelyek közötti szakaszát az érintési pont felezi.

Megoldás.

...

1.3. Lineáris elsőrendű differenciálegyenlet

Beszélgjünk meg először a megoldás menetét!

($y_{iá} = y_H + y_{ip}$, y_H : szétválasztható változójú, y_{ip} : állandó variálásával)

A homogén egyenlet megoldásánál nem alkalmazható a képlet, minden esetben végig kell csinálni az alábbi két példában mutatott módszerek valamelyikével.

17. Feladat:

Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet!

$$y' - \frac{x}{x^2 + 4} y = 6x, \quad y(0) = 4$$

Megoldás. $y_{iá} = y_H + y_{ip}$

$$(H): \quad y' - \frac{x}{x^2+4} y = 0 \quad \implies \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x}{x^2+4} y, \quad y \equiv 0 \text{ megoldás}$$

Ha $y \neq 0$:

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{y} &= \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+4} dx \\ \implies \ln|y| &= \frac{1}{2} \ln(x^2+4) + C_1 \implies |y| = e^{C_1} e^{\ln\sqrt{x^2+4}} \\ \implies y &= \pm e^{C_1} \sqrt{x^2+4}, \text{ illetve } y \equiv 0 \end{aligned}$$

Tehát a homogén egyenlet általános megoldása:

$$y_{H\text{ált}} = C \sqrt{x^2+4}, \quad C \in \mathbb{R}$$

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldásának keresése:

$$y_p = c(x) \sqrt{x^2+4}, \quad y'_p = c'(x) \sqrt{x^2+4} + c(x) \frac{1}{2\sqrt{x^2+4}} 2x$$

Behelyettesítve (I)-be: ...

$$c'(x) = \frac{6x}{\sqrt{x^2+4}} \quad \implies \quad c(x) = 3 \int 2x \cdot (x^2+4)^{-1/2} dx = 6\sqrt{x^2+4} + K$$

Mivel egyetlen y_p megoldást keresünk, $K = 0$ választható, így

$$y_p = 6(x^2+4).$$

Az inhomogén egyenlet általános megoldása:

$$y_{I\text{ált}} = C \sqrt{x^2+4} + 6(x^2+4) \quad (C \in \mathbb{R})$$

Az $y(0)=4$ kezdetiérték probléma megoldása:

$$4 = C \cdot 2 + 24 \quad \implies \quad C = -10 \quad \implies \quad y = -10\sqrt{x^2+4} + 6(x^2+4)$$

18. Feladat:

$$y' - \frac{2}{x} y = x, \quad x \neq 0$$

- Általános megoldás?
- $y(1) = 3$ kezdeti feltételt kielégítő megoldás?
- $y(-e) = 3e^2$ kezdeti feltételt kielégítő megoldás?

Megoldás.

- a) Minden olyan tartományban, melyben $x \neq 0$ a differenciálegyenlet egyértelműen megoldható.

$$(H): \quad y' - \frac{2}{x} y = 0 \quad \implies \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2}{x} y$$

Az előadásból tudjuk, hogy $y_{H\text{ált}} = C \cdot Y(x)$ alakú, ahol Y a homogén egyenlet

egy megoldása, mely sehose nulla. Ezt kihasználva a megoldás kevesebb munkával is megkapható.

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{2}{x} dx \implies \ln y = 2 \ln x, \quad \text{így } y = x^2 \quad (Y = x^2)$$

Tehát a homogén egyenlet általános megoldása:

$$y_{H\grave{a}lt} = C x^2, \quad C \in \mathbb{R}$$

Kérdés:

$Y(x) = x^2$ vesz fel 0 értéket, márpedig a bizonyításban e^{\dots} alakúra jött ki (a jegyzetben $Y(x)$ helyett $\varphi(x)$ jelölés van), tehát nem lehetne 0. Hol az ellentmondás?

Válasz:

Az elején beszéltünk róla, hogy az $x > 0$, vagy az $x < 0$ félsíkon dolgozunk és ekkor már valóban teljesül, hogy $Y(x) \neq 0$ a vizsgált tartományban.

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldásának keresése:

$$y_p = c(x) x^2, \quad y'_p = c'(x) x^2 + c(x) 2x$$

Behelyettesítve (I)-be: \dots

$$c'(x) = \frac{1}{x} \implies c(x) = \ln |x|$$

$$y_p = x^2 \ln |x| \implies y_{I\grave{a}lt} = C x^2 + x^2 \ln |x|$$

b) $y(1) = 3$ kezdeti érték probléma megoldása: $3 = C + \ln 1$, tehát $C = 3$.

Így a keresett megoldás: $y = 3x^2 + x^2 \ln x$

c) $y(-e) = 3e^2$ kezdeti érték probléma megoldása: $3e^2 = C e^2 + e^2 \cdot 1$, tehát $C = 2$.

Így a keresett megoldás: $y = 2x^2 + x^2 \ln(-x)$

(Itt már ne szerepeljen abszolút érték a megoldásban!)

19. Feladat:

Írja fel az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását:

$$y' - 3x^2 y = 6x^2$$

Megoldás.

A differenciálegyenlet lineáris elsőrendű, de ugyanakkor szeparábilis is. Így rövidebb a megoldás, ezért most így oldjuk meg:

$$y' = 3x^2 y + 6x^2 \implies \frac{dy}{dx} = 3x^2 (y + 2)$$

$y \equiv -2$ megoldás. Ha $y \neq -2$:

$$\int \frac{dy}{y+2} = \int 3x^2 dx \implies \ln |y+2| = x^3 + C_1$$

...

$$y + 2 = \pm e^{C_1} e^{x^3}, \text{ illetve } y \equiv -2 \implies y = -2 + C e^{x^3}, \quad C \in \mathbb{R}$$

(M) Oldja meg a differenciálegyenletet lineáris elsőrendűként is és hasonlítsa össze az eredményeket!

20. Feladat:

Írja fel az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását:

$$y' + 2e^x y = 3e^{-2e^x}$$

Megoldás.

$$(H) \quad y' + 2e^x y = 0 \quad \dots \quad y_H = C e^{-2e^x}, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$(I) \quad y_p = c(x) e^{-2e^x} \quad \dots \quad c(x) = 3x$$

$$\implies y_{I\acute{a}lt} = y_H + y_p = C e^{-2e^x} + 3x e^{-2e^x}$$

21. Feladat:

Írja fel az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását:

$$y' = -\frac{2}{x} y + \frac{1}{1+x^2}, \quad x \neq 0$$

Megoldás.

$$(H) \quad y' + \frac{2}{x} y = 0 \quad \dots \quad y_H = \frac{C}{x^2}, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$(I) \quad y_p = \frac{c(x)}{x^2} \quad \dots \quad c'(x) = \frac{x^2}{1+x^2} \implies c(x) = x - \operatorname{arctg} x$$

$$\implies y_{I\acute{a}lt} = y_H + y_p = \frac{C}{x^2} + \frac{1}{x} - \frac{\operatorname{arctg} x}{x}$$

22. Feladat:

Írja fel az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását:

$$y' + \frac{5}{x} y = e^x x^{-4}, \quad x \neq 0$$

Megoldás.

$$(H) \quad y' + \frac{5}{x} y = 0 \quad \dots \quad y_H = \frac{C}{x^5}, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$(I) \quad y_p = \frac{c(x)}{x^5} \quad \dots \quad c'(x) = x e^x \quad \Longrightarrow \quad c(x) = (x-1)e^x \quad (\text{parc. integrálással})$$

$$\Longrightarrow \quad y_{\text{I\acute{a}lt}} = y_H + y_p = \frac{C}{x^5} + \frac{(x-1)e^x}{x^5}$$

1.4. Új változó bevezetése

Mi mindig megadjuk, hogy milyen helyettesítést alkalmazzunk.

23. Feladat:

$u = \frac{y}{x}$ helyettesítéssel oldja meg az alábbi differenciálegyenletet!

$$x y' = y (1 + \ln y - \ln x), \quad x > 0, \quad y > 0$$

Megoldás.

$$y(x) = u(x) \cdot x \quad \Longrightarrow \quad y' = u' \cdot x + u \cdot 1$$

Behelyettesítve a $y' = \frac{y}{x} \left(1 + \ln \frac{y}{x}\right)$ differenciálegyenletbe:

$$u' x + u = u(1 + \ln u) \quad \Longrightarrow \quad u' x = u \ln u \quad (\text{szeparábilis})$$

$x > 0, y > 0$ miatt $u > 0$.

$u \equiv 1$ egyensúlyi helyzet, tehát $y = x$ megoldás.

Ha $u \neq 1$:

$$\int \underbrace{\frac{1}{u \cdot \ln u}}_{f'/f \text{ alakú}} du = \int \frac{1}{x} dx$$

Innen a megoldás:

$$\ln |\ln u| = \ln |x| + C_1 \quad (C_1 \in \mathbb{R}) \quad \Longrightarrow \quad |\ln u| = e^{C_1} |x| = K |x| \quad (K > 0)$$

$$\Longrightarrow \quad \ln u = \pm K x \quad \Longrightarrow \quad u = e^{\pm K x}, \quad \text{illetve} \quad u \equiv 1$$

Így írhatjuk a következő alakban is: $u = e^{C x}$, $C \in \mathbb{R}$

A visszahelyettesítést elvégezve kapjuk a végeredményt:

$$y = x e^{C x}, \quad C \in \mathbb{R}$$

24. Feladat:

Oldja meg az alábbi differenciálegyenleteket!
Szükség esetén alkalmazza az $u = x + y$ helyettesítést!

a) $y' = x + y$

b) $y' = \frac{1}{x + y}$

Megoldás.

a) Ez lineáris elsőrendű differenciálegyenlet. (Hf.)

b) Ez csak helyettesítéssel oldható meg: $(x + y \neq 0)$

$$u(x) := x + y(x) \implies y = u - x \implies y' = u' - 1$$

Behelyettesítve:

$$u' - 1 = \frac{1}{u} \implies u' = 1 + \frac{1}{u} \implies \frac{du}{dx} = \frac{u+1}{u}$$

Ez szeparálható differenciálegyenlet.

$u \equiv -1$ megoldás, tehát $y = -1 - x$ megoldja a differenciálegyenletet.

Ha $u \neq -1$:

$$\int \underbrace{\frac{u}{u+1}}_{\frac{u+1-1}{u+1} = 1 - \frac{1}{u+1}} du = \int dx \implies u - \ln|u+1| = x + C$$

A visszahelyettesítést elvégezve kapjuk a végeredményt:

$$x + y - \ln|x + y + 1| = x + C,$$

azaz $y - \ln|x + y + 1| = C$, illetve $y = -1 - x$

25. Feladat:

$u = y^4$ helyettesítéssel oldja meg az alábbi differenciálegyenletet!

$$x y' + y = \frac{\ln x}{y^3}, \quad y \neq 0, \quad x > 0$$

Adja meg az $y(1) = -1$ kezdeti feltételnek eleget tevő megoldást!

Megoldás.

$$u' = 4y^3 y'$$

Ezért átrendezzük a differenciálegyenletet: $x y^3 y' + y^4 = \ln x$

Behelyettesítünk:

$$\frac{1}{4} x u' + u = \ln x \implies u' + \frac{4}{x} u = \frac{4}{x} \ln x$$

Lineáris elsőrendű differenciálegyenletet kaptunk.

$$(H): \quad u' + \frac{4}{x} u = 0 \quad \dots \quad u_H = \frac{C}{x^4}; \quad C \in \mathbb{R}$$

$$(I): \quad u_{ip} = \frac{c(x)}{x^4} \quad \dots \quad c' = 4x^3 \ln x$$

Innen parciális integrálással kapjuk:

$$c(x) = x^4 \ln x - \frac{x^4}{4} \implies u_{ip} = \ln x - \frac{1}{4} \implies u_{iá} = u_H + u_{ip} = \frac{C}{x^4} + \ln x - \frac{1}{4}$$

Visszahelyettesítéssel az eredeti differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y^4 = \frac{C}{x^4} + \ln x - \frac{1}{4}, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$y(1) = -1 : \quad 1 = C + 0 - \frac{1}{4} \implies C = \frac{5}{4}$$

Így a keresett partikuláris megoldás:

$$y = -\sqrt[4]{\frac{5}{4x^4} + \ln x} - \frac{1}{4}$$

26. Feladat:

$u(x) = y^3(x) + x^2$ helyettesítéssel oldja meg az alábbi kezdeti érték problémát!

$$3y^2 y' = -2x + \frac{\cos x}{\sin(y^3 + x^2)}, \quad y(0) = \sqrt[3]{\frac{\pi}{4}}$$

Megoldás.

$$u' = 3y^2 y' + 2x \implies 3y^2 y' = u' - 2x$$

Elvégezve a behelyettesítést:

$$u' - 2x = -2x + \frac{\cos x}{\sin u} \implies \int \sin u \, du = \int \cos x \, dx$$

A megoldás:

$$-\cos u = \sin x + C \implies -\cos(y^3 + x^2) = \sin x + C$$

$$y(0) = \sqrt[3]{\frac{\pi}{4}} :$$

$$-\cos(y^3 + x^2) = \sin x - \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \text{vagyis}$$

$$y = \sqrt[3]{\arccos\left(-\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - x^2}$$

27. Feladat:

Az $u = x + y$ új változó bevezetésével oldja meg az alábbi differenciálegyenletet!

$$y' = \frac{2}{x+y}, \quad x > 0, \quad y > 0$$

Megoldás.

$$y = u - x \implies y' = u' - 1$$

Behelyettesítve:

$$u' - 1 = \frac{2}{u} \implies u' = \frac{u+2}{u} : \text{szeparábilis differenciálegyenlet.}$$

Ezt megoldja:

$$u \equiv -2 \text{ (egyensúlyi helyzet) } \implies x + y = -2 : \text{ ez nem felel meg a kikötéseknek.}$$

$u \neq -2 :$

$$\int \frac{u}{u+2} \, du = \int dx \quad \dots \quad u - \ln(u+2)^2 = x + C$$

Így a megoldás:

$$x + y - \ln(x + y + 2)^2 = x + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

28. Feladat:

Vezesse be az $u = y^3$ új változót az alábbi differenciálegyenletbe, majd határozza meg az $y(0) = \frac{1}{2}$ kezdeti értékhez tartozó megoldását:

$$3y^2 y' - 2y^3 = e^{2x} + x$$

Megoldás.

$$u' = 3y^2 y'$$

Behelyettesítve:

$$u' - 2u = e^{2x} + x : \text{lineáris elsőrendű differenciálegyenlet.}$$

...

$$u_{\text{ált}} = C e^{2x} + x e^{2x} - \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$$

Így az eredeti differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y^3 = C e^{2x} + x e^{2x} - \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$$

$$y(0) = \frac{1}{2} : \quad \frac{1}{8} = C - \frac{1}{4} \implies C = \frac{3}{8}$$

Tehát a keresett partikuláris megoldás:

$$y^3 = \frac{3}{8} e^{2x} + x e^{2x} - \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$$

$$\left(y = \sqrt[3]{\frac{3}{8} e^{2x} + x e^{2x} - \frac{x}{2} - \frac{1}{4}} \right)$$

29. Feladat:

Hajtsa végre az $u = y^3 + 2x$ helyettesítést az alábbi kezdetiérték problémánál!

$$3y^2 y' = (y^3 + 2x + 1)^3 \cos(\pi x) - 2, \quad y(1) = -1$$

Milyen differenciálegyenlethez jutott?

Ne oldja meg a kapott differenciálegyenletet!

Megoldás.

$$u' = 3y^2 y' + 2 \implies 3y^2 y' = u' - 2$$

Elvégezve a behelyettesítést:

$$u' - 2 = (u + 1)^3 \cos(\pi x) - 2 \implies u' = (u + 1)^3 \cos(\pi x)$$

Szétválasztható változójú differenciálegyenletet kaptunk.

$$y(1) = -1 : \quad u(1) = y^3 + 2x|_{x=1, y=-1} = -1 + 2 = 1$$

1.5. Iránymező, izoklinák

30. Feladat:

a) Írja fel az

$$y' = e^{y+2} - x$$

differenciálegyenlet izoklináinak egyenletét! Rajzoljon fel kettőt!

b) Van-e lokális szélsőértéke a $P_0(e, -1)$ ponton áthaladó megoldásnak P_0 -ban?

Megoldás.

$$a) y' = \boxed{e^{y+2} - x = K} \implies y = \ln(x + K) - 2 \text{ az izoklinák egyenlete}$$

$$Pl. K := 0 : y = \ln x - 2$$

(Vonalelemek vízszintesek)

$$K := -1 : y = \ln(x - 1) - 2$$

(Vonalelemek hajlásszöge: $-\frac{\pi}{4}$)

1. ábra

2. ábra

$$b) y'(e) = e^{y+2} - x|_{x=e, y=-1} = e - e = 0 \quad : \text{lehet lokális szélsőérték}$$

$$y'' = e^{y+2} y' - 1; \quad y''(e) = e^1 \cdot 0 - 1 = -1 < 0 \implies \text{lok. max.}$$

31. Feladat:

$$y' = (y^2 - 4)x + x - 1$$

a) A sík mely pontjaiban párhuzamos az iránymező az $y = -x$ egyenessel?

Vázoljuk ezeket a pontokat és jelöljük be néhány vonalelemet!

b) Van-e lokális szélsőértéke vagy inflexiós pontja az $x_0 = 1, y_0 = 2$ ponton átmenő megoldásnak a szóbanforgó pontban? (Feltéve, hogy van ilyen megoldás.)

Megoldás.

$$a) y = -x \text{ meredeksége: } -1$$

$$\text{Az izoklinák egyenlete: } (y^2 - 4)x + x - 1 = K$$

Most $K = -1$ érdekel bennünket:

$$(y^2 - 4)x + x - 1 = -1 \implies (y^2 - 4 + 1)x = 0$$

Ennek megoldása: $y^2 = 3$, tehát $y = \pm\sqrt{3}$, illetve $x = 0$.

3. ábra

b) $y(1) = 2$

$$y'(1) = (y^2 - 4)x + x - 1 \Big|_{x=1, y=2} = 0, \quad \text{tehát lokális szélsőérték lehet itt.}$$

$$y'' = 2y \cdot y' \cdot x + (y^2 - 4) \cdot 1 + 1$$

$$y''(1) = 2y(1) \cdot y'(1) \cdot 1 + (y(1)^2 - 4) \cdot 1 + 1 = 1$$

Tehát az adott pontban lokális minimuma van a megoldásfüggvénynek.
(Inflexiós pont nem lehet, mert $y''(1) \neq 0$.)

32. Feladat:

Az akárhányszor deriválható $y = y(x)$, $x \in \mathbb{R}$ megoldása az

$$y' = y^3 - x^2$$

differenciálegyenletnek és átmegy az $(1, 1)$ ponton.

a) Van-e ennek a megoldásnak lokális szélsőértéke az $x = 1$ helyen?

b) Írja fel ennek a megoldásnak az $x_0 = 1$ pont körüli harmadfokú $T_3(x)$ Taylor polinomját!

Megoldás.

a) $y(1) = 1$

$$y'(1) = 1 - 1 = 0, \quad \text{tehát lokális szélsőérték lehet itt.}$$

$$y'' = 3y^2 y' - 2x \implies y''(1) = 0 - 2 = -2 < 0$$

Tehát az adott pontban lokális maximuma van a megoldásfüggvénynek.
($y(1) = 1$ értékkel.)

b) Az $x_0 = 1$ bázispontú harmadrendű Taylor polinom:

$$T_3(x) = y(1) + \frac{y'(1)}{1!} (x - 1) + \frac{y''(1)}{2!} (x - 1)^2 + \frac{y'''(1)}{3!} (x - 1)^3$$

(Még nem tanultuk, majd hamarosan tanuljuk. Az évközi zárthelyikben nem lesz ilyen példa, de vizsgán lehet.)

Még $y'''(1)$ hiányzik a behelyettesítéshez.

$$y''' = 3(2y y') y' + 3y^2 y'' - 2 \implies y'''(1) = -8$$

Elvégezve a behelyettesítést, kapjuk a keresett Taylor polinomot:

$$T_3(x) = 1 - \frac{2}{2} (x - 1)^2 - \frac{8}{6} (x - 1)^3$$

1.5.1. További gyakorló feladatok a témához:**33. Feladat:** A Feladatgyűjteményből:

1.4.3. b), c) (Feltéve, hogy minden kezdeti érték problémának van megoldása.)

1.4.4.

34. Feladat:

$$y' = 3x^2 + 6y^2 - 18$$

- Írja fel az $x_0 = 3$, $y_0 = 1$ ponton áthaladó megoldás adott pontbeli érintőegyenésének egyenletét!
- Írja fel a differenciálegyenlet izoklínáinak egyenletét!
- Hol lehet lokális szélsőértéke a megoldásfüggvényeknek? Rajzolja fel ezeket a pontokat!

35. Feladat:

$$y' = x^2 - y^2, \quad y(x_0) = y_0$$

- Jelölje ki azokat a pontokat, melyeken a megoldásgörbe
 - lokálisan növekedően,
 - lokálisan csökkenően
 halad át.
- ⁺⁺ Mely pontokban van lokális szélsőértéke a megoldásgörbéknek? Milyen jellegű?

36. Feladat: Tudjuk, hogy az

$$y' = y^2 - 2y + x^2$$

differenciálegyenletnek minden $y(x_0) = y_0$ kezdeti értékhez létezik pontosan egy megoldása, amely akárhányszor differenciálható.

- Milyen lokális tulajdonsága van a $P_0(-1, 1)$ ponton átmenő megoldásgörbének ebben a pontban?
- Írja fel az izoklinák egyenletét! Rajzoljon fel néhányat!
Hol lehet lokális szélsőértéke a megoldásfüggvényeknek?
- Vannak-e olyan megoldások, amelyeknek az $x = 0$ helyen inflexiós pontjuk van?

1.6. Magasabbrendű, homogén, lineáris, állandó együtthatós differenciálegyenletek

Oldja meg az alábbi homogén differenciálegyenleteket!

37. Feladat:

$$y''' + 2y'' + y' = 0$$

Megoldás.

$$\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda = \lambda(\lambda + 1)^2 = 0 \implies \lambda_1 = 0, \lambda_{2,3} = -1 \quad (\text{belső rezonancia})$$

$$y_H = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 x e^{-x}, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$$

38. Feladat:

$$y''' + 4y'' + 13y' = 0$$

Megoldás.

$$\lambda^3 + 4\lambda^2 + 13\lambda = \lambda(\lambda^2 + 4\lambda + 13) = 0 \implies \lambda_1 = 0, \lambda_{2,3} = -2 \pm j3$$

$$y_H = C_1 + C_2 e^{-2x} \cos 3x + C_3 e^{-2x} \sin 3x, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$$

39. Feladat:

Írjon fel egy olyan legalacsonyabbrendű valós konstans együtthatós homogén lineáris differenciálegyenletet, melynek megoldásai az alábbi függvények! Írja fel az adott differenciálegyenlet általános megoldását is!

a) $2e^{5x} - e^{-3x}$

b) $6x^2 + 5e^{2x}$

c) $7x, \sin 5x$

d) $3x^2 e^{2x}, e^{3x}$

e) $6 + e^{3x} \sin x$

Megoldás.

a) e^{5x} miatt $\lambda_1 = 5$, e^{-3x} miatt $\lambda_2 = -3$

Így a karakterisztikus egyenlet:

$$(\lambda - 5)(\lambda + 3) = 0 \implies \lambda^2 - 2\lambda - 15 = 0$$

A differenciálegyenlet:

$$y'' - 2y - 15 = 0$$

A differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y_H = C_1 e^{5x} + C_2 e^{-3x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

b) x^2 miatt $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, e^{2x} miatt $\lambda_4 = 2$

Így a karakterisztikus egyenlet:

$$(\lambda - 0)^3 (\lambda - 2) = 0 \implies \lambda^4 - 2\lambda^3 = 0$$

A differenciálegyenlet:

$$y^{IV} - 2y''' = 0$$

A differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y_H = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 e^{2x}, \quad C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}$$

c) a karakterisztikus egyenlet:

$$(\lambda - 0)^2 (\lambda - j5) (\lambda + j5) = \lambda^2 (\lambda^2 + 25) = \lambda^4 + 25\lambda^2 = 0$$

A differenciálegyenlet: $y^{IV} + 25y'' = 0$

A differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y_H = C_1 + C_2 x + C_3 \sin 5x + C_4 \cos 5x, \quad C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}$$

$$d) (\lambda - 2)^3 (\lambda - 3) = 0 \dots$$

$$e) (\lambda - 0) (\lambda - (3 + j)) (\lambda - (3 - j)) = \lambda ((\lambda - 3) - j) ((\lambda - 3) + j) = \lambda ((\lambda - 3)^2 + 1) = \\ = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 10\lambda = 0 \quad \dots$$

1.7. Magasabbrendű, inhomogén, lineáris, állandó együtthatós differenciálegyenletek

40. Feladat: $y'' - 5y' + 6y = 2 \sin 2x$

Megoldás.

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \implies \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$$

A homogén egyenlet általános megoldása:

$$y_H = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$$

$$6 \cdot \left| \begin{array}{l} y_{ip} := A \sin 2x + B \cos 2x \end{array} \right.$$

$$-5 \cdot \left| \begin{array}{l} y'_{ip} = 2A \cos 2x - 2B \sin 2x \end{array} \right.$$

$$1 \cdot \left| \begin{array}{l} y''_{ip} = -4A \sin 2x - 4B \cos 2x \end{array} \right.$$

$$\dots \quad A = \frac{1}{26}, \quad B = \frac{5}{26}$$

$$y_{i\acute{a}} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + \frac{1}{26} \sin 2x + \frac{5}{26} \cos 2x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

41. Feladat: $y'' - 6y' + 13y = 39$

Megoldás.

$$\lambda^2 - 6\lambda + 13 = 0 \implies \lambda_{1,2} = 3 \pm j2$$

Mivel $e^{(3+j2)x} = e^{3x} (\cos 2x + j \sin 2x)$, a homogén egyenlet általános megoldása:

$$y_H = C_1 e^{3x} \cos 2x + C_2 e^{3x} \sin 2x$$

$$y_{ip} := A, \quad 13A = 39 \implies A = 3$$

$$y_{i\acute{a}} = C_1 e^{3x} \cos 2x + C_2 e^{3x} \sin 2x + 3, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

42. Feladat: $y'' - 5y' + 6y = 2x e^x, \quad y(x) = ?$

Megoldás.

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \implies \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3 \implies y_H = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$$

$y_{ip} = (Ax + B)e^x$ alakban keressük.

$$\dots \quad A = 1, \quad B = \frac{3}{2} \quad \implies \quad y_{ip} = \left(x + \frac{3}{2}\right) e^x$$

Így a keresett általános megoldás:

$$y_{ia} = y_H + y_{ip} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + \left(x + \frac{3}{2}\right) e^x$$

43. Feladat:

$$y'' - y' - 2y = 3e^{2x}, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 1, \quad y(x) = ?$$

Megoldás.

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \quad \implies \quad \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = -1 \quad \implies \quad y_H = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}$$

$$-2 \cdot \left| \begin{array}{l} y_{ip} := A x e^{2x} \quad (\text{külső rezonancia}) \end{array} \right.$$

$$-1 \cdot \left| \begin{array}{l} y'_{ip} = A e^{2x} + 2A x e^{2x} \end{array} \right.$$

$$1 \cdot \left| \begin{array}{l} y''_{ip} = 2A e^{2x} + 2A e^{2x} + 4A x e^{2x} \end{array} \right.$$

$$x e^{2x} \cdot (-2A - 2A + 4A) + e^{2x} \cdot (-A + 4A) = 3e^{2x} \quad \implies \quad 3A = 3, \quad \text{tehát } A = 1.$$

$$\implies \quad y_{ip} = x e^{2x}$$

Így a keresett általános megoldás:

$$y_{ia} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} + x e^{2x}$$

$$\text{Mivel } y'_{ia} = 2C_1 e^{2x} - C_2 e^{-x} + e^{2x} + 2x e^{2x}$$

A keresett partikuláris megoldás:

$$y(0) = 3 : \quad 3 = C_1 + C_2$$

$$y'(0) = 1 : \quad 1 = 2C_1 - C_2 + 1$$

$$\implies \quad C_1 = 1, \quad C_2 = 2$$

Vagyis a keresett partikuláris megoldás: $y = e^{2x} + 2e^{-x} + x e^{2x}$

Írjuk fel a példát, írjuk fel a homogén általános megoldását! Beszéljük meg a kísérletező függvényt és csak a felvett konstansokra kapott értékeket írjuk fel, legyen házi feladat a meghatározásuk!

44. Feladat:

$$y^{(4)} - 8y''' + 16y'' = 2x - 9, \quad y(x) = ?$$

Megoldás.

$$\lambda^4 - 8\lambda^3 + 16\lambda^2 = \lambda^2(\lambda - 4)^2 = 0 \quad \implies \quad \lambda_{1,2} = 0, \quad \lambda_{3,4} = 4 \quad (\text{belső rezonancia})$$

$$\implies \quad y_H = C_1 + C_2 x + C_3 e^{4x} + C_4 x e^{4x}$$

$y_{ip} = (Ax + B)x^2 = Ax^3 + Bx^2$ alakban keressük. (Külső rezonancia)

$$\dots \quad A = \frac{1}{48}, \quad B = -\frac{1}{4} \quad \implies \quad y_{ip} = \left(\frac{1}{48}x - \frac{1}{4}\right) x^2$$

Így a keresett általános megoldás:

$$y_{i\acute{a}} = y_H + y_{ip} = C_1 + C_2 x + C_3 e^{4x} + C_4 x e^{4x} + \left(\frac{1}{48} x - \frac{1}{4} \right) x^2$$

45. Feladat:

$$y'' + y = 2 \sin x \cos x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1, \quad y(x) = ?$$

Megoldás.

$$\lambda^2 + 1 = 0 \implies \lambda_{1,2} = \pm j \implies y_H = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

Mivel $f(x) = \sin 2x$, ezért a próbafüggvény:

$$y_{ip} = A \sin 2x + B \cos 2x$$

$$\dots \quad A = -\frac{1}{3}, \quad B = 0 \implies y_{ip} = -\frac{1}{3} \sin 2x$$

Így a keresett általános megoldás:

$$y_{i\acute{a}} = y_H + y_{ip} = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{1}{3} \sin 2x$$

$$\text{Mivel } y'_{i\acute{a}} = -C_1 \sin x + C_2 \cos x - \frac{2}{3} \cos 2x$$

A keresett partikuláris megoldás:

$$y(0) = 1 : \quad 1 = C_1 + 0 - 0 \implies C_1 = 1$$

$$y'(0) = 1 : \quad 1 = 0 + C_2 - \frac{2}{3} \implies C_2 = \frac{5}{3}$$

$$\text{Vagyis: } \quad y = \cos x + \frac{5}{3} \sin x - \frac{1}{3} \sin 2x$$

46. Feladat:

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = \operatorname{ch} 2x, \quad y(x) = ?$$

Megoldás.

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = 0 \implies \lambda^2(\lambda - 2) - (\lambda - 2) = 0 \implies (\lambda - 2)(\lambda^2 - 1) = 0$$

$$\implies \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1 \implies y_H = C_1 e^{2x} + C_2 e^x + C_3 e^{-x}$$

Mivel $f(x) = \frac{1}{2} e^{2x} + \frac{1}{2} e^{-2x}$, ezért a próbafüggvény:

$$A e^{2x} + B e^{-2x} \text{ helyett } y_{ip} = A x e^{2x} + B e^{-2x} \quad (\text{külső rezonancia})$$

$$\dots \quad A = \frac{1}{6}, \quad B = -\frac{1}{24} \implies y_{ip} = \frac{1}{6} x e^{2x} - \frac{1}{24} e^{-2x}$$

Így a keresett általános megoldás:

$$y_{i\acute{a}} = y_H + y_{ip} = C_1 e^{2x} + C_2 e^x + C_3 e^{-x} + \frac{1}{6} x e^{2x} - \frac{1}{24} e^{-2x}$$

47. Feladat: A Feladatgyűjteményből: 1.5.1. - 1.5.11.

1.8. Lineáris rekurzió

48. Feladat:

- $$f(n) = 4f(n-1) - 3f(n-2)$$
- a) Adja meg a lineáris rekurziót kielégítő összes számsorozatot!
- b) Adja meg az $f(0) = 2, f(1) = 6$ kezdeti feltételt kielégítő megoldást!
- c) Írja fel az összes $O(1)$ típusú megoldást!

Megoldás.

a) Tudjuk, hogy van $f(n) = q^n$ ($q \neq 0$) alakú megoldás:

$$\begin{aligned} q^n &= 4q^{n-1} - 3q^{n-2}, \quad q \neq 0 \implies q^2 = 4q - 3 \\ \implies q^2 - 4q + 3 &= (q-1)(q-3) = 0 \implies q_1 = 1, \quad q_2 = 3 \end{aligned}$$

Az általános megoldás: $f(n) = C_1 + C_2 3^n, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

b) $f(0) = 2 : \quad C_1 + C_2 = 2$
 $f(1) = 6 : \quad C_1 + 3C_2 = 6$
 $\implies C_1 = 0, \quad C_2 = 2$

Tehát $f(n) = 2 \cdot 3^n$

c) $f(n) = O(1)$ jelentése:

$\exists K : |f(n)| \leq K \cdot 1, \quad n > N$ (legfeljebb véges sok kivétellel)

Tehát $f(n)$ - nek korlátosnak kell lennie, ehhez $C_2 = 0$ választás kell.

49. Feladat:

- a) Adja meg az $f(n+1) = \frac{5}{2}f(n) - f(n-1)$ lineáris rekurziót kielégítő összes számsorozatot!
- b) Van-e $f(n) = O(1)$ tulajdonságú megoldás?
- c) Adja meg az $f(0) = 1, f(1) = 5$ kezdeti feltételt kielégítő megoldást?

Megoldás.

a) $f(n) = q^n$ alakú megoldást keresünk. Helyettesítsünk be az egyenletbe!

$$q^{n+1} = \frac{5}{2}q^n - q^{n-1} \xrightarrow{q \neq 0} q^2 - \frac{5}{2}q + 1 = 0 \implies q_1 = 2, \quad q_2 = \frac{1}{2}$$

Így az összes megoldás: $f(n) = C_1 2^n + C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

b) $f(n) = O(1)$ jelentése: $f(n)$ korlátos.

Ez $C_1 = 0, C_2 \in \mathbb{R}$ esetén teljesül.

c)
$$\left. \begin{aligned} n=0 : \quad C_1 + C_2 &= 1 \\ n=1 : \quad 2C_1 + \frac{1}{2}C_2 &= 1 \end{aligned} \right\} \implies C_1 = 3, \quad C_2 = -2$$

Így a keresett megoldás: $f(n) = 3 \cdot 2^n - 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$

50. Feladat:

Adja meg a lineáris rekurziót kielégítő összes számsorozatot!

Írja fel az összes $O(1)$, $O(n)$, illetve $O(3^n)$, típusú megoldást!

a) $f(n) = \frac{10}{3} f(n-1) - f(n-2)$

b) $f(n) = 5 f(n-1) - 4 f(n-2)$

c) $f(n) = 5 f(n-1) - 6 f(n-2)$

51. Feladat:

Írja fel a rekurzió adott kezdő értékhez tartozó megoldását!

a) $f(n) = \frac{10}{3} f(n-1) - f(n-2)$, $f(0) = 3$, $f(1) = \frac{11}{3}$

b) $f(n) = -f(n-1) + 12 f(n-2)$, $f(0) = 3$, $f(1) = 2$

c) $f(n) = -3 f(n-1) + 10 f(n-2)$, $f(0) = 3$, $f(1) = 6$

d) $f(n) = 5 f(n-1) + 6 f(n-2)$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$

1.9. Alkalmazások**52. Feladat: Harmonikus rezgőmozgás**

Az ideális rugó által kifejtett F erő arányos, és ellentétes irányú a rugó x megnyúlásával, $F(x) = -Dx$. Hogyan mozog (egydimenzióban) az a test, amelyre egyetlen rugó hat?

Megoldás.

Newton II. törvénye értelmében $F(x) = m\ddot{x}$. Beírva a rugóerő alakját, a

$$-Dx(t) = m\ddot{x}(t)$$

másodrendű differenciálegyenlethez jutunk, melynek általános megoldása

$$x(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t),$$

ahol $\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$.

(Az egyenletet visszavezethetjük elsőrendűre, ha megszorozzuk $\dot{x}(t)$ -vel, és felhasználjuk, hogy $2\dot{x}(t)x(t) = \frac{d}{dt}(x^2(t))$, valamint $2\ddot{x}(t)\dot{x}(t) = \frac{d}{dt}(\dot{x}^2(t))$.)

53. Feladat: Kondenzátor kisülése

A C kapacitású, Q_0 kezdeti töltéssel feltöltött kondenzátort az R ellenálláson keresztül kisütjük. Határozzuk meg a kondenzátor $Q(t)$ töltésének időfüggését, az áramkörben folyó $I(t)$ áramot, valamint a kondenzátor kapcsain mérhető $U(t)$ feszültséget az idő függvényében!

Megoldás.

A szükséges fizikai ismeretek: A kondenzátor $U(t)$ feszültsége, $Q(t)$ töltése és C kapacitása között minden pillanatban fennáll, hogy $C = \frac{Q}{U}$. Az ellenálláson folyó áram és a sarkai

közt mérhető feszültség kapcsolata: $R = \frac{U}{I}$. Végül a kondenzátor töltése és az áram közti kapcsolat: $Q(t) = Q_0 + \int_{\tau=t_0}^t I(\tau)d\tau$, azaz $\dot{Q}(t) = I(t)$.

Az áramkörben nincsen telep, tehát az ellenálláson és a kondenzátoron eső feszültségek összege minden pillanatban zérus, $U_C(t) + U_R(t) = 0$. Az $U_C(t)$ feszültség a kondenzátor töltésével kifejezve: $U_C(t) = \frac{Q(t)}{C}$. Az áramkörben folyó áram $I(t) = \dot{Q}(t)$, tehát az ellenálláson eső feszültség $U_R(t) = RI(t) = R\dot{Q}(t)$. De e két feszültség összege zérus, tehát a

$$\frac{Q(t)}{C} + R\dot{Q}(t) = 0, \quad Q(0) = Q_0$$

differenciálegyenletet kapjuk, aminek a kezdeti feltételt kielégítő megoldása:

$$Q(t) = Q_0 e^{-\frac{C}{R}t}.$$

54. Feladat: Radioaktív bomlás

Radioaktív bomlás során az időegység alatt elbomlott atomok száma arányos a még el nem bomlott atomok számával. Határozzuk meg, hogyan változik az idő függvényében a még el nem bomlott atomok száma, valamint a minta aktivitása (időegységre jutó bomlások száma)!

Megoldás.

Legyen a még el nem bomlott atomok száma $N(t)$. Rövid dt idő alatt elbomlott atomok száma arányos ($N(t)$ -vel és dt -vel, azaz $N(t) - N(t+dt) = N(t)\lambda dt$, ahonnan $\dot{N}(t) = -\lambda N(t)$) differenciálegyenlethez jutunk. Ennek megoldása: $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$; a minta aktivitásának időfüggése pedig $A(t) = -\dot{N}(t) = N_0 \lambda e^{-\lambda t}$.

55. Feladat: Oszlopra tekert kötél

A matrózok úgy tartják a nagy hajókat a partnál, hogy a kikötőkötelet előbb néhányszor a kikötőhöz betonozott függőleges oszlopra csavarják, és a felcsavart kötél másik végét húzzák. Vajon miért teszik ezt? Mennyivel tudnak így nagyobb erőt kifejteni, mintha a kötelet közvetlenül húznák?

Megoldás.

Az oszlopra csavart kötél ráfeszül az oszlopra, és az oszlop és a kötél közt ébredő súrlódási erő segít megtartani a hajót.

Jelölje az oszlop sugarát R . Legyen φ az oszlopra csavart kötél pontjait jellemző szög ($\varphi = 0$ a hajó felé eső kötélpont, $\varphi = \varphi_0$ pedig a matróz felé eső kötélpont), és legyen $K(\varphi)$ a kötelet a φ szöggel jellemzett pontban feszítő erő. (Tehát K iránya az oszlop érintőjébe esik.) Szemeljünk ki egy φ -nél elhelyezkedő, kis $d\varphi$ kötélrészletet. E kis kötélrészletre a két végénél $K(\varphi)$, ill. $K(\varphi + d\varphi) \approx K(\varphi)$ erő hat. A két erő iránya közel ellentétes, a hatásvonalaik szöge $d\varphi$. Egyszerű geometriai megfontolásból adódik, hogy ($d\varphi \ll 1$ esetében) a két erő eredője közel sugár irányú, és nagysága $dN(\varphi) \approx K(\varphi)d\varphi$. Ekkora nyomóerőnél a tapadási súrlódási erő maximuma $dS(\varphi) = \mu_0 dN(\varphi) \approx \mu_0 K(\varphi)d\varphi$. A kiszemelt $d\varphi$ szögű kötélrészlet nyugalomban van, tehát a rá ható érintő irányú erők eredője zérus, azaz $K(\varphi) = K(\varphi + d\varphi) + dS(\varphi)$. Innen a kötelet feszítő erőre, mint a felcsavarodási szög függvényére a következő differenciálegyenletet kapjuk:

$$\frac{d}{d\varphi} K(\varphi) = -\mu_0 K(\varphi); \quad K(0) = K_0,$$

aminek a megoldása:

$$K(\varphi) = K_0 e^{-\mu_0 \varphi}.$$

Tehát ha a matróz φ_0 szögben csavarja rá a kötelet az oszlopra, és a kötélt és az oszlop között a tapadási súrlódási együttható μ_0 , akkor a matróz $e^{-\mu_0\varphi}$ -szer kisebb erő kifejtésével képes megtartani a hajót.

56. Feladat: Esés nagy magasságból a világűrben

+++

Tegyük föl, hogy egy gonosz varázsló megállítaná a Holdat, és az kezdősebesség nélkül szabadon esne a Föld felé. Hogyan változna a Föld–Hold távolság az idő függvényében?

Megoldás.

Legyen a Föld tömege M , a Hold tömege m , kezdeti távolságuk h_0 , és tegyük föl –az egyszerűség kedvéért–, hogy a Föld nem mozdul el a Hold felé. (Ez a közelítés akkor jogos, ha $M \gg m$.) A gravitációs állandót jelölje γ .

Amikor a Föld és a Hold távolsága $r(t)$, akkor a Föld által a Holdra kifejtett gravitációs vonzóerő $F(r) = \gamma \frac{mM}{r^2}$, így a Hold mozgásegyenlete:

$$m\ddot{r}(t) = -\gamma \frac{mM}{r^2(t)}.$$

(A negatív előjel utal arra, hogy az erő vonzó.) A kapott egyenlet másodrendű differenciálegyenlet az $r(t)$ függvényre nézve, azonban egy ügyes trükkel elsőrendűvé alakíthatjuk. Szorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát $\dot{r}(t)$ -vel, és vegyük észre, hogy $\dot{r}(t)\ddot{r}(t) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt}(\dot{r}^2(t))$, valamint $\frac{\dot{r}(t)}{r^2(t)} = -\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r(t)}\right)$. Tehát

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt}(\dot{r}^2(t)) = \gamma M \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r(t)}\right),$$

ahonnan

$$\dot{r}^2(t) = \frac{2\gamma M}{r(t)} + C.$$

A kapott egyenlet a Holdra felírt mechanikai energiamegmaradás törvényének átrendezett alakja. Autonóm, szeparálható differenciálegyenlet...

57. Feladat: Láncgörbe

+++

Milyen alakú egy két végpontjában felfüggesztett lánc?

Megoldás.

Írjuk le a lánc alakját az $y(x)$ függvénnyel, mely a lánc x vízszintes koordinátájú pontjának magasságát adja meg. A láncban ébredő erő vízszintes, ill. függőleges komponensét jelölje $K_x(x)$, ill. $K_y(x)$. Vizsgáljuk a láncnak az x helyen levő kis dl hosszúságú, $dm = \rho dl$ tömegű darabját! (ρ a lánc hosszegységre vonatkoztatott „sűrűsége”). Ez a kis láncdarab nyugalomban van, tehát a rá ható erők eredője (vízszintes és függőleges irányban egyaránt) zérus. Vízszintes irányban a láncra nem hat külső erő, tehát $K_x(x) = K_x(x+dx)$, így a láncot feszítő erő vízszintes komponense állandó, $K_x(x) \equiv K_x$. Függőleges irányban a láncdarabra hat a $(dm)g$ nehézségi erő, tehát $K_y(x+dx) - K_y(x) = g\rho dl$. Ezen kívül tudjuk még, hogy a lánc meredeksége az x pontban $y'(x)$, tehát $dl = \sqrt{1+y'^2(x)}dx$, valamint a láncban ébredő erő érintő irányú, azaz $K_y(x) = y'(x)K_x$. Ezeket felhasználva a

$$K_x y''(x) = \rho g \sqrt{1+y'^2(x)}.$$

differenciálegyenletet kapjuk a lánc alakjára, ami az $y'(x)$ függvényre nézve elsőrendű, autonóm, szeparálható egyenlet. A megoldása:

$$y'(x) = \operatorname{sh}\left(\frac{\rho g x}{K_x} + C\right), \quad y(x) = \frac{K_x}{\rho g} \operatorname{ch}\left(\frac{\rho g x}{K_x} + C\right).$$

Ezért hívják sokszor a koszinusz-hiperbolikus függvényt „láncgörbének”.

58. Feladat: Mozgás közegellenállással – nagy sebességnél

Légnemű vagy folyékony közegben nagy sebességgel mozgó testre a sebesség négyzetével arányos közegellenállási erő hat. Meg tudjuk mondani például, hogy leszállás után hogyan mozog a kifutópályán az a repülőgép, amelyet csak a fékező ernyője fékez. A gép mozgásegyenlete:

$$m\ddot{x}(t) = -\kappa\dot{x}^2(t),$$

ami $\dot{x}(t)$ -re elsőrendű, autonóm, szeparábilis differenciálegyenlet.

Például a Föld légkörében szabadon eső test mozgásegyenlete

$$m\ddot{h}(t) = \kappa\dot{h}^2(t) - mg.$$

59. Feladat: Mozgás közegellenállással – kis sebességnél

Talán egyszerűbben megoldható a feladat akkor, ha a közegellenállási erő a sebességgel arányos. Egy sűrű, viszkózus folyadékban lassan süllyedő kis golyó mozgásegyenlete például

$$m\ddot{y}(t) = mg - F_{\text{felh}} - \alpha\dot{y}(t),$$

ami $\dot{y}(t)$ -re elsőrendű, lineáris, inhomogén, állandó együtthatós egyenlet. (Az egyenletben F_{felh} a felhajtóerőt jelöli, ami csak a test térfogatától és a folyadék fajsúlyától függő állandó.)

2. Függvénysorok

2.1. Hányados- és gyökkritérium (numerikus sorok)

Átismételtük a numerikus sorokról a múlt félévben tanultakat (majoráns, minoráns kritériumot is). Most a két új kritériumot gyakoroljuk (a limeszes alakot használjuk, de mindkét alakot elevenítsük fel).

1. Feladat: Vizsgálja meg az alábbi sorokat konvergencia szempontjából!

a)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^{n-2}}{n!}$$

Megoldás.
$$a_n := \frac{9^{n-2}}{n!}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9^{(n+1)-2} n!}{(n+1)! 9^{n-2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9}{n+1} = 0 < 1$$

$$\implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ konvergens}$$

b)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{3n}}{n^4}$$

Megoldás.
$$a_n := \frac{5^{3n}}{n^4}$$

Lehet hányados kritérium, de jobb a gyökkritérium:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^3}{\sqrt[n]{n^4}} = 5^3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^4} = 5^3 > 1$$

$$\implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ divergens}$$

c)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n^n}$$

Megoldás.
$$a_n := \frac{(n+1)!}{n^n}$$

A hányados kritériumot alkalmazzuk:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)! n^n}{(n+1)^{n+1} (n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2) n^n}{(n+1)^{n+1}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{n+1} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{n}}{1 + \frac{1}{n}} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1 \end{aligned}$$

$$\implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ konvergens}$$

2. Feladat: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+5) 3^{n-1}}{5^{n+1}}$

Megoldás.

$$a_n := \frac{(n+5) 3^{n-1}}{5^{n+1}}$$

Hányadoskritériummal célszerű dolgozni, mert a gyökkritériumnál az $\sqrt[n]{n+5}$ konvergenciáját a rendőrelvvel kellene megmutatni.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+6) 3^n 5^{n+1}}{5^{n+2} (n+5) 3^{n-1}} = \frac{3}{5} \frac{n+6}{n+5} = \frac{3}{5} \frac{1 + \frac{6}{n}}{1 + \frac{5}{n}} \rightarrow \frac{3}{5} < 1 \\ &\implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ konvergens} \end{aligned}$$

3. Feladat: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4 (3n+3)^{n^2}}{(3n+1)^{n^2}}$

Megoldás.

Gyökkritériummal:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} &= \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{n})^4 \frac{\left(1 + \frac{3/3}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{1/3}{n}\right)^n} \rightarrow 1^4 \frac{e}{e^{1/3}} = e^{2/3} > 1 \\ &\implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ divergens} \end{aligned}$$

4. Feladat: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3+n^2}{2+n^2}\right)^{n^3} \frac{n^5}{2^{2n+1}}$

Megoldás.

Gyökkritériummal:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} &= \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{3}{n^2}\right)^{n^2}}{\left(1 + \frac{2}{n^2}\right)^{n^2}} \frac{(\sqrt[n]{n})^5}{4 \cdot \sqrt[n]{2}} \rightarrow \frac{e^3}{e^2} \frac{1^5}{4 \cdot 1} = \frac{e}{4} < 1 \\ &\implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ konvergens} \end{aligned}$$

5. Feladat:

Vizsgálja konvergencia szempontjából az alábbi sorokat!

$$a1) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n^2 - 2}{n^2 + 5} \right)^{n^2} \quad a2) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n^2 - 2}{n^2 + 5} \right)^n \quad a3) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n^2 - 2}{n^2 + 5} \right)^{n^3}$$

Megoldás. $a_n := \left(\frac{n^2 - 2}{n^2 + 5} \right)^{n^2} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e^{-7}$, mert ...

a1) A sor divergens, mivel az általános tag nem tart nullához, tehát a konvergencia szükséges feltétele nem teljesül.

a2) $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, ahol $b_n = \sqrt[n]{a_n}$. Mivel $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$ (ezt meg kell beszélni, hogy rendőrelvvel látható be, de nem kell megcsinálni), így ez a sor is divergens.

a3) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$, ahol $c_n = a_n^n$

A gyökkritérium alkalmazásával:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e^{-7} < 1 \implies \sum_{n=0}^{\infty} c_n \text{ konvergens}$$

6. Feladat: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 3^{n+2} + \left(\frac{1}{2}\right)^n}{(2n)! + 3n^2}$

+++

Megoldás. $c_n := \frac{2^n + 3^{n+2} + \left(\frac{1}{2}\right)^n}{(2n)! + 3n^2} < \frac{3^n + 9 \cdot 3^n + 3^n}{(2n)!} = 11 \frac{3^n}{(2n)!} := d_n$

$\sum_{n=0}^{\infty} d_n$ konvergens, mert ... (hányadoskritériummal)

Ezért a majoráns kritérium miatt $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ is konvergens.

7. Feladat: Bizonyítsa be, hogy az alábbi sor konvergens! Adjon becslést az elkövetett +++ hibára, ha a sor összegét a 100. részletösszeggel közelítjük!

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2) 3^{n-1}}{(n+5) n!}$

Megoldás. $a_n := \frac{(n+2) 3^{n-1}}{(n+5) n!}$

$a_n < \frac{3^{n-1}}{n!} := b_n$ $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergens, mert a hányadoskritérium alkalmazásával:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n n!}{(n+1)! 3^{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n+1} = 0 < 1$$

$$\implies \sum_{n=0}^{\infty} b_n \text{ konvergens} \underbrace{\implies}_{\text{maj. kr.}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ konvergens}$$

Az elkövetett hiba:

$$\begin{aligned} 0 < H &= \sum_{n=101}^{\infty} \frac{(n+2) 3^{n-1}}{(n+5) n!} < \sum_{n=101}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{n!} = \frac{3^{100}}{101!} + \frac{3^{101}}{102!} + \frac{3^{102}}{103!} + \dots = \\ &= \frac{3^{100}}{101!} \left(1 + \frac{3}{102} + \frac{3^2}{102 \cdot 103} + \dots \right) < \frac{3^{100}}{101!} \left(1 + \frac{3}{102} + \frac{3^2}{102^2} + \dots \right) = \\ &= \frac{3^{100}}{101!} \frac{1}{1 - \frac{3}{102}} \end{aligned}$$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{6n-1} \right)^{3n}$

Megoldás. $a_n := \left(\frac{n+2}{6n-1} \right)^{3n}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{6n-1} \right)^3 = \dots = \frac{1}{6^3} < 1$$

$$\implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ konvergens}$$

Az elkövetett hiba:

$$\begin{aligned} 0 < H &= \sum_{n=101}^{\infty} \left(\frac{n+2}{6n-1} \right)^{3n} < \sum_{n=101}^{\infty} \left(\frac{n+2n}{6n-n} \right)^{3n} = \sum_{n=101}^{\infty} \left(\left(\frac{3}{5} \right)^3 \right)^n = \\ &= \left(\frac{3}{5} \right)^{303} \frac{1}{1 - \left(\frac{3}{5} \right)^3} \quad \left(q = \left(\frac{3}{5} \right)^3 \right) \end{aligned}$$

8. Feladat: További gyakorló feladatok

Vizsgálja az alábbi sorokat konvergencia szempontjából!

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{2n+1} \right)^{n^2+3n}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! 6^{n-1}}{(2n)!}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{\binom{2n}{n}}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n (n+3)}{(n)!}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^{n+2}}$

f) Bizonyítsa be, hogy az alábbi sor konvergens! Adjon becslést az elkövetett hibára, ha a sor összegét a 200. részletösszeggel közelítjük!

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n+1}}{(n)!}$$

- g) Bizonyítsa be, hogy az alábbi sor konvergens! Adjon becslést az elkövetett hibára, ha a sor összegét a 100. részletösszeggel közelítjük!

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+3) 6^{n+1}}$$

Megoldás.

...

2.2. Weierstrass-kritérium függvénysorok egyenletes konvergenciájára

9. Feladat:

Egyenletesen konvergens-e a $(-\infty, \infty)$ intervallumon az alábbi függvénysor?

a)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n^4 x^2 + 1)}{n^3 + 2}$$

b)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(n^5 x^3)}{n \sqrt{n} + 5}$$

Megoldás.

a)

$$|f_n(x)| = \frac{|\cos(n^4 x^2 + 1)|}{n^3 + 2} < \frac{1}{n^3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \text{ konv.} \quad \text{Weierstrass kr.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \text{ egyenletesen konvergens } (-\infty, \infty)\text{-en.}$$

b)

$$|f_n(x)| = \frac{|\operatorname{arctg}(n^5 x^3)|}{n \sqrt{n} + 5} < \frac{\frac{\pi}{2}}{n \sqrt{n}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{\pi}{2}}{n \sqrt{n}} = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} \text{ konvergens}$$

$$\text{Weierstrass kr.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \text{ egyenletesen konvergens } (-\infty, \infty)\text{-en.}$$

2.3. Hatványsorok konvergencia sugara, konvergenciatartománya

10. Feladat:

Állapítsa meg az alábbi sor konvergenciatartományát!

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot 2^n} (x-1)^n$$

Megoldás.

Jelenleg: $a_n = \frac{(-1)^n}{n \cdot 2^n}$, $x_0 = 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{|(-1)^n|}{n \cdot 2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n} \cdot 2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{R} \implies R = 2$$

$$x = 3: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot 2^n} \cdot 2^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \quad \text{konvergens (de nem abszolút konvergens)}$$

$$x = -1: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot 2^n} \cdot (-2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (-1)^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \text{divergens}$$

KT (konvergenciatartomány): $(-1, 3]$

11. Feladat:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{(2n)!} (x+7)^n \quad R = ?$$

Megoldás.

Jelenleg: $a_n = (-1)^n \frac{2n+1}{(2n)!}$, $x_0 = -7$ (ez most nem fontos)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+3)(2n)!}{(2n+2)!(2n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{2n+1} \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} = 0$$

$$\implies R = \infty$$

12. Feladat:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)^{n^2}}{(n+6)^{n^2+1}} x^n \quad R = ?$$

Megoldás.

Jelenleg: $a_n = \frac{(n+2)^{n^2}}{(n+6)^{n^2+1}}$, $x_0 = 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n+6} \right)^n \frac{1}{\sqrt[n]{n+6}} = \dots = \frac{1}{e^4}$$

$$\implies R = e^4,$$

(mert $1 < \sqrt[n]{n+6} < \sqrt[n]{7} \sqrt[n]{n}$ és rendőrelv \dots)

13. Feladat:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{n!} x^n \quad R=?$$

Megoldás.

Jelenleg: $a_n = \frac{(n+1)^n}{n!}, \quad x_0 = 0$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)^{n+1} n!}{(n+1)! (n+1)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n+1} \right)^{n+1} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \frac{1 + \frac{2}{n}}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{e^2}{e} = e \\ &\implies R = \frac{1}{e} \end{aligned}$$

14. Feladat:

Állapítsa meg az alábbi sor konvergenciatartományát!

Hol abszolút konvergens a sor?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n (n+3)}{n^2+3} x^n$$

Megoldás.

$R = \frac{1}{2}$, mert ...

$x = -\frac{1}{2}$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n^2+3}$ divergens, mert ...

$x = \frac{1}{2}$: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+3}{n^2+3}$ konvergens, de nem abszolút konvergens, mert ...

K.T. = A.K.T. = $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

15. Feladat:

Állapítsa meg az alábbi sor konvergenciatartományát!

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+4)^n}{n^2 3^n}$$

Megoldás.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2 3^n} (x+2)^n, \quad x_0 = -2.$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{n^2 3^n}} = \frac{2}{3} = \frac{1}{R} \implies R = \frac{3}{2}$$

$$x = -\frac{7}{2} : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} : \text{konvergens}$$

$$x = -\frac{1}{2} : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} : \text{konvergens}$$

$$\text{Konvergenctartomány: } \left[-\frac{7}{2}, -\frac{1}{2} \right]$$

16. Feladat:

Állapítsa meg az alábbi sor konvergenctartományát!

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2x)^n}{\sqrt{n} 5^n}$$

Megoldás.

...

17. Feladat:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} x^{3n} = \frac{1}{2} x^3 + \frac{2}{2^2} x^6 + \dots \quad R = ?$$

Megoldás.

$$a_n = \begin{cases} 0, & \text{ha } n \text{ nem osztható 3-mal} \\ \frac{n/3}{2^{n/3}}, & \text{ha } n \text{ osztható 3-mal} \end{cases}$$

$$\text{Ezért } \sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} 0, & \text{ha } n \text{ nem osztható 3-mal} \\ \sqrt[n]{\frac{n/3}{2^{n/3}}} = \frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{3} \sqrt[n]{2}}, & \text{ha } n \text{ osztható 3-mal} \end{cases}$$

$$\implies \text{Torlódási pontok: } t_1 = 0, t_2 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

$$\implies \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \frac{1}{R} \implies R = \sqrt[3]{2}$$

Egy ügyesebb megoldás: $u = x^3$ helyettesítéssel egy egyszerűbb feladatra vezetjük vissza.

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n u^n := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} u^n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|b_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} = \frac{1}{2} = \frac{1}{R_b} \implies R_b = 2$$

$$\text{Tehát } |u| < 2 \implies |x|^3 < 2 \implies |x| < \sqrt[3]{2} \implies R = \sqrt[3]{2}$$

18. Feladat:

Állapítsa meg az alábbi sor konvergenciatartományát!

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{9^n} (x-2)^{2n}$$

Megoldás.

$u := (x-2)^2$ helyettesítéssel a sor alakja: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{9^n} u^n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2) 9^n}{9^{n+1} (n+1)} = \dots = \frac{1}{9} \implies R_1 = 9$$

A végpontokat itt is lehet vizsgálni, de az eredeti sorban is vizsgálhatjuk majd. Most az utóbbi módon járunk el.

Tehát

$$|u| < 9 \implies |(x-2)^2| < 9 \implies |x-2| < 3 \implies R = 3 \quad (-1 < x < 5)$$

A végpontokban:

$\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)$ divergens, hiszen nem teljesül a konvergencia szükséges feltétele.

Konvergenciatartomány: $(-1, 5)$

2.4. Hatványsorok összegfüggvénye**19. Feladat:**

Írja fel az alábbi sor összegfüggvényét!

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$$

Megoldás.

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}, \quad f(0) = 0. \text{ Ha } x \neq 0 :$$

$$f_1(x) := x \cdot f(x) = x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$f_1'(x) = \frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad x \in (-R, R) \text{ esetén szabad tagonként deriválni:}$$

$$f_1'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$$

$R = 1$, és az eredeti sornak is ugyanennyi, mert tagonkénti deriválásnál nem változik.

$$f_1(x) = \int_0^x f_1'(x) dx (= f_1(x) - f_1(0)) = \int_0^x \frac{x}{1-x} dx = - \int_0^x \frac{(1-x) - 1}{1-x} dx =$$

$$= -(x + \ln(1-x))|_0^x = -x - \ln(1-x)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-x - \ln(1-x)}{x} = -1 - \frac{\ln(1-x)}{x}, & \text{ha } |x| < 1, x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

(Hf.: Tudjuk, hogy f folytonos $|x| < 1$ -ben.

Ellenőrizzük le, hogy igaz-e: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) (= 0)$?)

20. Feladat:

Írja fel az alábbi sor összegfüggvényét!

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n+1} x^n$$

Megoldás.

$R = 1$, mert \dots

(Vagy itt mutatjuk meg, vagy az előző gondolatmenettel később indokoljuk.)

$$g(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n+1} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)+1}{n+1} x^n =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} = \frac{x}{1-x} + f(x) = \dots \quad (\text{L. előző példa!})$$

21. Feladat:

Írja fel az alábbi sor összegfüggvényét!

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+3) x^n$$

Megoldás.

$R = 1$, mert \dots

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} (n+3) x^n, \quad f_1(x) := x^2 \cdot f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (n+3) x^{n+2} =$$

$$= \frac{d}{dx} \int_0^x f_1(x) dx = \dots = \left(\frac{x^4}{1-x} \right)'$$

22. Feladat:

Határozza meg az alábbi sor összegfüggvényét és konvergenciasugarát!

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{4^{k+1}} x^k$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{4^{k+1}} = ?$$

Megoldás.

$$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{4^{k+1}} x^k$$

$$\begin{aligned} \int_0^x f(x) dx &= \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{4^{k+1}} x^k dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^x \frac{k+1}{4^{k+1}} x^k dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{4^{k+1}} \frac{x^{k+1}}{k+1} \Big|_0^x = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x}{4}\right)^{k+1} = \frac{\frac{x}{4}}{1 - \frac{x}{4}} = \frac{x}{4-x}, \quad \left|\frac{x}{4}\right| < 1 \implies |x| < 4 \end{aligned}$$

Tehát $R = 4$

$$f(x) = \frac{d}{dx} \int_0^x f(x) dx = \left(\frac{x}{4-x}\right)' = \frac{4-x-x(-1)}{(4-x)^2} = \frac{4}{(4-x)^2}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{4^{k+1}} = f(1) = \frac{4}{9}$$

2.5. Taylor-polinom

23. Feladat:

- a) Definiálja az n -edrendű Taylor polinomot!
- b) Írja fel a definíció segítségével az

$$f(x) = x^3 - 3 + \cos 3x$$
függvény $x_0 = 0$ pontbeli negyedrendű Taylor polinomját és a Lagrange-féle hibatagot!
- c) Legfeljebb mekkora hibát követünk el, ha $f(0, 1)$ értékét $T_4(0, 1)$ értékével közelítjük?

Megoldás.

- a) az f függvény x_0 bázispontú n -edrendű Taylor polinomja:

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Ha f legalább $(n+1)$ -szer differenciálható $[x_0, x)$ -ben (ill. $(x, x_0]$ -ban), akkor $\exists \xi \in (x_0, x)$ (ill. $\xi \in (x, x_0)$), hogy

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}.$$

- b) $f(x) = x^3 - 3 + \cos 3x$ $f(0) = -2$
 $f'(x) = 3x^2 - 3 \sin 3x$ $f'(0) = 0$

$$\begin{aligned} f''(x) &= 6x - 9 \cos 3x & f''(0) &= -9 \\ f'''(x) &= 6 + 27 \sin 3x & f'''(0) &= 6 \\ f^{IV}(x) &= 81 \cos 3x & f^{IV}(0) &= 81 \\ f^V(x) &= -243 \sin 3x \end{aligned}$$

$$T_4(x) = -2 + \frac{-9}{2!} x^2 + \frac{6}{3!} x^3 + \frac{81}{4!} x^4$$

$$H = \frac{f^V(\xi)}{5!} x^5 = \frac{-243 \sin 3\xi}{5!} 0,1^5, \quad \xi \in (0, 0.1)$$

$$|\sin x| \leq |x| \quad \text{miatt} \quad |\sin 3\xi| \leq 3 \cdot 0,1, \quad \text{ezért}$$

$$|H| = \frac{243 |\sin 3\xi|}{5!} 0,1^5 < \frac{243 \cdot 3 \cdot 0,1}{5!} 0,1^5$$

24. Feladat:

$$y' = 2y^2 + 3x^2 - 6x$$

- a) Rajzolja fel a $P(-1, 1)$ ponthoz tartozó vonalelemet!
- b) Van-e lokális maximuma vagy minimuma az origón áthaladó megoldásgörbének az origóban?
(Ne próbálja megoldani a differenciálegyenletet, de feltételezheti, hogy van ilyen megoldás!)
- c) Írja fel az origón áthaladó megoldás $x_0 = 0$ bázispontú harmadrendű Taylor polinomját!

Megoldás.

...

25. Feladat:

$$y' = xy^3 - y^2 + 2$$

- a) Van-e lokális maximuma vagy minimuma az $x_0 = 1, y_0 = -1$ ponton áthaladó megoldásgörbének ebben a pontban?
(Ne próbálja megoldani a differenciálegyenletet, de feltételezheti, hogy van ilyen megoldás!)
- b) Írja fel az $x_0 = 1, y_0 = -1$ ponton áthaladó megoldás $x_0 = 1$ bázispontú harmadrendű Taylor polinomját!
(Ne próbálja megoldani a differenciálegyenletet!)

Megoldás.

- a) $y(1) = -1, \quad y'(1) = -1 - 1 + 2 = 0 \implies$ lehet itt lokális szélsőérték.

$$y'' = y^3 + x \cdot 3y^2 y' - 2y y', \quad y''(1) = -1$$

Tehát $y'(1) = 0$ és $y''(1) = -1 < 0$: a megoldásnak lokális maximuma van ebben a pontban.

$$b) y''' = 3y^2y' + 3y^2y' + x6yy'^2 + x3y^2y'' - 2y'^2 - 2y'y''$$

$$y'''(1) = -3 - 2 = -5$$

$$\begin{aligned} T_3(x) &= y(1) + \frac{y'(1)}{1!} (x-1) + \frac{y''(1)}{2!} (x-1)^2 + \frac{y'''(1)}{3!} (x-1)^3 = \\ &= -1 - \frac{1}{2!} (x-1)^2 - \frac{5}{3!} (x-1)^3 \end{aligned}$$

2.6. Taylor-sor

26. Feladat:

Adja meg az $f(x) = \frac{1}{x-3}$ függvény $x_0 = 0$, illetve $x_0 = 5$ bázispontú Taylor sorfejtéseit és azok konvergenciatartományát!

Megoldás.

$x_0 = 0$ esete:

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{1}{3} \frac{1}{1 - \frac{x}{3}} = -\frac{1}{3} \left(1 + \frac{x}{3} + \left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{x}{3}\right)^3 + \left(\frac{x}{3}\right)^4 + \dots \right) = \\ &= -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{3^{n+1}} x^n \\ &\quad \left(\text{Geometriai sor: } a = -\frac{1}{3}, \quad q = \frac{x}{3} \right) \end{aligned}$$

$$\text{Konvergenciatartomány: } |q| = \left| \frac{x}{3} \right| = \frac{|x|}{3} < 1 \implies |x| < 3, \quad R_1 = 3$$

$x_0 = 5$ esete:

$$f(x) = \frac{1}{(x-5)+2} = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{-(x-5)}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-(x-5)}{2} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} (x-5)^n$$

Konvergenciatartomány:

$$|q| = \left| \frac{-(x-5)}{2} \right| = \frac{|x-5|}{2} < 1 \implies |x-5| < 2, \quad R_2 = 2$$

27. Feladat:

Adja meg az alábbi függvények $x_0 = 0$ bázispontú Taylor sorfejtését és annak konvergenciatartományát!

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 3}, \quad g(x) = \frac{x^5}{x^2 + 3}$$

Megoldás.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{3} \frac{1}{1 - \frac{-x^2}{3}} = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{x^2}{3} + \left(\frac{x^2}{3}\right)^2 - \left(\frac{x^2}{3}\right)^3 + \left(\frac{x^2}{3}\right)^4 - \dots \right) = \\ &= \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x^2}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} x^{2n} \\ &\quad \left(\text{Geometriai sor: } a = \frac{1}{3}, \quad q = -\frac{x^2}{3} \right) \end{aligned}$$

$$\text{Konvergenciatartomány: } |q| = \left| -\frac{x^2}{3} \right| = \frac{|x|^2}{3} < 1 \implies |x| < \sqrt{3}, \quad R_f = \sqrt{3}$$

$$g(x) = \frac{x^5}{x^2 + 3} = x^5 \cdot f(x) = x^5 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} x^{2n+5}$$

$$\text{Konvergenciatartomány: } |x| < \sqrt{3}, \quad R_g = \sqrt{3} \quad (\text{ugyanaz})$$

28. Feladat:

Adja meg az alábbi függvények $x_0 = 0$ bázispontú Taylor sorfejtését és annak konvergenciatartományát!

$$f(x) = \frac{1}{x+7}, \quad g(x) = \frac{x+2}{x+7}, \quad h(x) = \frac{3x^4}{x+7}$$

Megoldás.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{7} \frac{1}{1 - \frac{-x}{7}} = \frac{1}{7} \left(1 - \frac{x}{7} + \left(\frac{x}{7}\right)^2 - \left(\frac{x}{7}\right)^3 + \left(\frac{x}{7}\right)^4 - \dots \right) = \\ &= \frac{1}{7} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x}{7}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{7^{n+1}} x^n \\ &\quad \left(\text{Geometriai sor: } a = \frac{1}{7}, \quad q = -\frac{x}{7} \right) \end{aligned}$$

$$\text{Konvergenciatartomány: } |q| = \left| -\frac{x}{7} \right| = \frac{|x|}{7} < 1 \implies |x| < 7, \quad R_f = 7$$

$$g(x) = \frac{x+7-5}{x+7} = 1 - \frac{5}{x+7} = 1 - 5 \cdot f(x) = 1 - 5 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{7^{n+1}} x^n$$

$$\text{Konvergenciatartomány: } |x| < 7, \quad R_g = 7 \quad (\text{ugyanaz})$$

$$h(x) = \frac{3x^4}{x+7} = 3x^4 \cdot f(x) = 3x^4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{7^{n+1}} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3(-1)^n}{7^{n+1}} x^{n+4}$$

$$\text{Konvergenciatartomány: } |x| < 7, \quad R_h = 7 \quad (\text{ugyanaz})$$

29. Feladat:

Írja fel az f függvény x_0 bázispontú Taylor sorát és adja meg a sor konvergenciatartományát!

$$f(x) = \frac{1}{x+2} \quad a) \ x_0 = 2 \quad b) \ x_0 = -5$$

Megoldás.

$x_0 = 2$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x+2} = \frac{1}{(x-2)+4} = \frac{1}{4} \frac{1}{1 - \frac{-(x-2)}{4}} \left(= \frac{a}{1-q} \right) = \\ &= \frac{1}{4} \left(1 - \left(\frac{x-2}{4} \right) + \left(\frac{x-2}{4} \right)^2 - \left(\frac{x-2}{4} \right)^3 + \dots \right) = \\ &= \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x-2}{4} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^{n+1}} (x-2)^n \end{aligned}$$

Konvergenciatartomány:

$$|q| = \left| -\frac{x-2}{4} \right| = \frac{|x-2|}{4} < 1 \quad \implies \quad |x-2| < 4, \quad (-2 < x < 6, \quad R_1 = 4)$$

$x_0 = -5$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x+2} = \frac{1}{(x+5)-3} = -\frac{1}{3} \frac{1}{1 - \frac{x+5}{3}} \\ &= -\frac{1}{3} \left(1 + \left(\frac{x+5}{3} \right) + \left(\frac{x+5}{3} \right)^2 + \left(\frac{x+5}{3} \right)^3 + \dots \right) = \\ &= -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x+5}{3} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{3^{n+1}} (x+5)^n \end{aligned}$$

Konvergenciatartomány:

$$|q| = \left| \frac{x+5}{3} \right| = \frac{|x+5|}{3} < 1 \quad \implies \quad |x+5| < 3, \quad (-8 < x < -2, \quad R_2 = 3)$$

30. Feladat:

a) Írja fel az

$$f_1(x) = \frac{1}{x+3}$$

függvény $x_0 = 0$ bázispontú Taylor sorfejtését! $R_1 = ?$

b) f_1 sorfejtésére támaszkodva írja fel az alábbi függvények $x_0 = 0$ bázispontú sorfejtését!

$$f_2(x) = \ln(x+3), \quad R_2 = ?$$

$$f_3(x) = \frac{1}{(x+3)^3}, \quad R_3 = ?$$

Megoldás.

$$\begin{aligned} \text{a) } f_1(x) &= \frac{1}{x+3} = \frac{1}{3} \frac{1}{1 - \frac{-x}{3}} = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{x}{3} + \left(\frac{x}{3}\right)^2 - \left(\frac{x}{3}\right)^3 + \left(\frac{x}{3}\right)^4 - \dots \right) = \\ &= \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} x^n \end{aligned}$$

$$\text{Konvergenciatartomány: } |q| = \left| -\frac{x}{3} \right| = \frac{|x|}{3} < 1 \implies |x| < 3, \quad R_1 = 3$$

$$\text{b) } f_2'(x) = f_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} x^n$$

$$\int_0^x f_2'(t) dt = f_2(x) - \underbrace{f_2(0)}_{=\ln 3} = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} t^n dt$$

$[0, x] \subset (-3, 3)$, szabad tagonként integrálni:

$$\begin{aligned} f_2(x) &= \ln 3 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} \int_0^x t^n dt = \ln 3 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} \frac{t^{n+1}}{n+1} \Big|_0^x = \\ &= \ln 3 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} \frac{x^{n+1}}{n+1} \end{aligned}$$

$$\implies f_2(x) = \ln 3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3^n} \frac{x^n}{n}, \quad R_2 = R_1$$

(Tagonkénti integrálásnál nem változik a konvergenciasugár.)

$$f_1''(x) = \left(\frac{1}{x+3} \right)'' = \left(\frac{-1}{(x+3)^2} \right)' = \frac{2}{(x+3)^3} \implies f_3(x) = \frac{1}{2} f_1''(x)$$

Tehát

$$f_3(x) = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} x^n \right)'' = \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n n(n-1)}{3^{n+1}} x^{n-2}$$

$R_3 = R_1$ (Tagonkénti deriválásnál nem változik a konvergenciasugár.)

31. Feladat:

Tudjuk, hogy

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots, \quad R = 1$$

a) Írja fel az

$$f(x) = \ln\left(1 + \frac{x^2}{3}\right)$$

függvény $x_0 = 0$ bázispontú Taylor sorát és adja meg annak konvergencia sugarát!

b) Az a)-beli sorfejtést felhasználva adja meg az

$$\int_0^1 \ln\left(1 + \frac{x^2}{3}\right) dx$$

integrál értékét az f függvény negyedfokú Taylor polinomjának felhasználásával és becsülje meg a hibát!

Megoldás.

$$a) \ln(1+u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} u^n, \quad R = 1$$

$u = \frac{x^2}{3}$ helyettesítéssel:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left(\frac{x^2}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 3^n} x^{2n}$$

$$\text{Konvergenciasugár: } \left|\frac{x^2}{3}\right| < 1 \implies |x| < \sqrt{3} \implies R_f = \sqrt{3}$$

b) $[0, 1] \subset (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$, szabad tagonként integrálni:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \ln\left(1 + \frac{x^2}{3}\right) dx &= \int_0^1 \left(\underbrace{\frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{2 \cdot 3^2} + \frac{x^6}{3 \cdot 3^3} - + \dots}_{T_4(x)} \right) dx = \\ &= \frac{x^3}{3 \cdot 3} - \frac{x^5}{2 \cdot 3^2 \cdot 5} + \frac{x^7}{3 \cdot 3^3 \cdot 7} - + \dots \Big|_0^1 = \frac{1}{3 \cdot 3} - \frac{1}{2 \cdot 3^2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 3^3 \cdot 7} - + \dots \approx \\ &\approx \frac{1}{3 \cdot 3} - \frac{1}{2 \cdot 3^2 \cdot 5} = 0,1, \quad |H| < \frac{1}{3 \cdot 3^3 \cdot 7} \text{ (Leibniz sor)} \end{aligned}$$

32. Feladat:

Tudjuk, hogy

$$\operatorname{arctg} u = u - \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} - \frac{u^7}{7} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{u^{2n+1}}{2n+1}, \quad |u| \leq 1$$

a) Írja fel az

$$f(x) = x^3 \operatorname{arctg} \frac{x^2}{2}$$

függvény $x_0 = 0$ pontra támaszkodó Taylor sorát! $R = ?$ b) $f^{(20)}(0) = ?$, $f^{(21)}(0) = ?$ (A sorfejtésből adjon választ!)c) Adjon becslést az $\int_0^1 f(x) dx$ integrál értékére az integranduszt kilencedfokú Taylor polinomjával közelítve!**Megoldás.**

$$\text{a) } \operatorname{arctg} \frac{x^2}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \left(\frac{x^2}{2}\right)^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1) 2^{2n+1}} x^{4n+2}$$

$$\text{Konvergenciatartomány: } \left|\frac{x^2}{2}\right| \leq 1 \implies |x| \leq \sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1) 2^{2n+1}} x^{4n+2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1) 2^{2n+1}} x^{4n+5} = \\ &= \underbrace{\frac{x^5}{2} - \frac{x^9}{3 \cdot 2^3} + \frac{x^{13}}{5 \cdot 2^5} - \frac{x^{17}}{7 \cdot 2^7} + \dots}_{T_9(x)} \quad R = \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\text{b) } a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \quad \text{miatt} \quad f^{(n)}(0) = n! \cdot a_n$$

$$f^{(20)}(0) = 20! \cdot a_{20} = 0, \quad \text{mert } a_{20} = 0 \quad (x^{20} \text{-os tag nincs a sorban)}$$

$$f^{(21)}(0) = 21! \cdot a_{21} = 21! \cdot \frac{(-1)^4}{9 \cdot 2^9}$$

$$(a_{21} : x^{21} \text{ együtthatója, ezért } 4n+5=21 \implies n=4)$$

c) Mivel $[0, 1] \subset (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, ezért szabad tagonként integrálni:

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1) 2^{2n+1}} x^{4n+2} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1) 2^{2n+1}} \int_0^1 x^{4n+2} dx = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1) 2^{2n+1}} \frac{x^{4n+3}}{4n+3} \Big|_0^1 = \frac{x^6}{2 \cdot 6} - \frac{x^{10}}{3 \cdot 2^3 \cdot 10} + \frac{x^{13}}{5 \cdot 2^5 \cdot 13} - \dots \Big|_0^1 = \\ &= \frac{1}{2 \cdot 6} - \frac{1}{3 \cdot 2^3 \cdot 10} + \frac{1}{5 \cdot 2^5 \cdot 13} - \dots \approx \frac{1}{12} - \frac{1}{240}, \quad |H| < \frac{1}{5 \cdot 2^5 \cdot 13} \end{aligned}$$

(Leibniz sort kaptunk.)

33. Feladat:

Írjuk fel e^x , $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{sh} x$ Taylor-sorát és konvergenciatartományát!

34. Feladat:

Írja fel az alábbi függvények x_0 pontbeli Taylor sorát és annak konvergenciatartományát!

a) $f_1(x) = \sin 3x^2$, $x_0 = 0$

c) $f_3(x) = \operatorname{sh} 2x^4$, $x_0 = 0$

b) $f_2(x) = e^{4x}$, $x_0 = 0$, ill. $x_0 = 3$

d) $f_4(x) = e^{-2x} \operatorname{ch} 5x$, $x_0 = 0$

Megoldás.

a) $f_1(x) = u - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} - \dots \Big|_{u=3x^2} = 3x^2 - \frac{3^3}{3!} x^6 + \frac{3^5}{5!} x^{10} - \dots$, $x \in \mathbb{R}$

b) $e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \frac{u^4}{4!} + \dots$, $u \in \mathbb{R}$

$x_0 = 0$: $u = 4x$ helyettesítéssel:

$$f_2(x) = e^{4x} = 1 + 4x + \frac{4^2}{2!} x^2 + \frac{4^3}{3!} x^3 + \frac{4^4}{4!} x^4 + \dots, \quad x \in \mathbb{R}$$

$x_0 = 3$:

$$f_2(x) = e^{4(x-3)+12} = e^{12} e^{4(x-3)} = e^{12} \left(1 + 4(x-3) + \frac{4^2}{2!} (x-3)^2 + \frac{4^3}{3!} (x-3)^3 + \frac{4^4}{4!} (x-3)^4 + \dots \right), \quad x \in \mathbb{R}$$

c) $f_3(x) = \operatorname{sh} 2x^4 = u + \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} + \frac{u^7}{7!} + \dots \Big|_{u=2x^4} =$
 $= 2x^4 + \frac{2^3}{3!} x^{12} + \frac{2^5}{5!} x^{20} + \dots$, $x \in \mathbb{R}$

d) $f_4(x) = e^{-2x} \operatorname{ch} 5x = e^{-2x} \frac{e^{5x} + e^{-5x}}{2} = \frac{1}{2} (e^{3x} + e^{-7x}) = \dots$

35. Feladat:

$$f(x) = 5x^3 e^{-3x^2}, \quad x_0 = 0$$

Írja fel a függvény Taylor sorát! Konvergenciatartomány?

$f^{(100)}(0) = ?$, $f^{(101)}(0) = ?$ (A sorfejtésből adjon választ!)

Megoldás.

$$f(x) = 5x^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!} \Big|_{u=-3x^2} = 5 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n!} x^{2n+3}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \implies f^{(n)}(0) = n! a_n$$

Így $f^{(100)}(0) = 100! a_{100}$, ahol $a_{100} : x^{100}$ együtthatója:

$$2n + 3 = 100 \implies \nexists n \in \mathbb{N}, \text{ melyre ez teljesülne} \implies a_{100} = 0 \implies f^{(100)}(0) = 0$$

$f^{(101)}(0) = 101! a_{101}$, ahol $a_{101} : x^{101}$ együtthatója:

$$2n + 3 = 101 \implies n = 49 \implies f^{(101)}(0) = 101! \cdot 5 \frac{(-3)^{49}}{49!}$$

36. Feladat:

Határozza meg a következő számsorok pontos összegét!

a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4^k}{k!} (= e^4)$

c) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} (= \sin 1)$

b) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k \cdot k!} (= e^{-1/2})$

d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} (= \operatorname{ch} 1 - 1)$

Megoldás. ...

37. Feladat:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^2 \sin x} = ?$$

Megoldás.

L'Hospital szabállyal hosszadalmas, ezért Taylor sorfejtéssel dolgozunk:

...

38. Feladat:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x^4} + x^4 - 1}{x^5 \cdot \sin 2x^3} = ?$$

A számláló és a nevező megfelelő Taylor sorfejtésével oldja meg a feladatot!

Megoldás. ...

39. Feladat:

$$\text{Szemléltessük, hogy } e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \sin \varphi$$

Megoldás.

$$\begin{aligned}
e^{j\varphi} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(j\varphi)^n}{n!} = 1 + j\varphi + \frac{j^2 \varphi^2}{2!} + \frac{j^3 \varphi^3}{3!} + \frac{j^4 \varphi^4}{4!} + \frac{j^5 \varphi^5}{5!} + \dots = \\
&= \dots = \left(1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - + \dots\right) + j \left(\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - + \dots\right) = \cos \varphi + j \sin \varphi
\end{aligned}$$

2.7. Binomiális sorfejtés

40. Feladat:

Írja fel az

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x}}, \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$$

függvények $x_0 = 0$ bázispontú Taylor sorát és a sor konvergenciasugarát!

$a_4 = ?$ (Elemi műveletekkel adja meg!)

Megoldás.

Tudjuk, hogy $(1+u)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} u^k$, $R = 1$. Ezt használjuk fel:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{\sqrt{4}} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{4}}} = \frac{1}{2} \left(1 + \left(-\frac{x}{4}\right)\right)^{-1/2} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1/2}{k} \left(-\frac{x}{4}\right)^k = \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1/2}{k} \frac{(-1)^k}{4^k} x^k
\end{aligned}$$

$$\left|-\frac{x}{4}\right| < 1 \implies |x| < 4 \implies R_f = 4$$

$$a_4 = \frac{1}{2} \binom{-1/2}{4} \frac{(-1)^4}{4^4} = \frac{1}{2} \frac{\binom{-1}{2} \binom{-3}{2} \binom{-5}{2} \binom{-7}{2}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \frac{1}{4^4}$$

$$\begin{aligned}
g(x) &= \frac{1}{\sqrt{4}} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} = \frac{1}{2} \left(1 + \left(-\frac{x^2}{4}\right)\right)^{-1/2} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1/2}{k} \left(-\frac{x^2}{4}\right)^k = \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1/2}{k} \frac{(-1)^k}{4^k} x^{2k}
\end{aligned}$$

$$\left|-\frac{x^2}{4}\right| < 1 \implies |x| < 2 \implies R_g = 2$$

$$a_4 = \frac{1}{2} \binom{-1/2}{2} \frac{(-1)^2}{4^2} = \frac{1}{2} \frac{\binom{-1}{2} \binom{-3}{2}}{1 \cdot 2} \frac{1}{4^2}$$

41. Feladat:

Írja fel az

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{32 - 2x^2}}, \quad x_0 = 0$$

bázispontú Taylor sorát és a sor konvergenciasugarát!

 $a_8 = ?$ (Elemi műveletekkel adja meg!)

$$f^{(26)}(0) = ? , \quad f^{(25)}(0) = ?$$

Megoldás.

Tudjuk, hogy $(1 + u)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} u^k$, $R = 1$. Ezt használjuk fel:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt[5]{32}} \frac{1}{(1 + (-\frac{x^2}{16}))^{1/5}} = \frac{1}{2} \left(1 + \left(-\frac{x^2}{16}\right)\right)^{-1/5} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{5}}{k} \left(-\frac{x^2}{16}\right)^k = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2} \binom{-\frac{1}{5}}{k} \frac{(-1)^k}{16^k} x^{2k} \end{aligned}$$

$$\text{Konvergenciasugár: } \left| -\frac{x^2}{16} \right| < 1 \implies |x| < 4, \quad R = 4$$

$$a_8 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\binom{-\frac{1}{5}}{4} \binom{-\frac{1}{5}}{4} \binom{-\frac{1}{5}}{4} \binom{-\frac{1}{5}}{4}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \frac{1}{16^4} \quad (x^8 \text{ együtthatója, } k = 4)$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{és} \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \quad \text{miatt} \quad f^{(n)}(0) = n! \cdot a_n$$

$$f^{(26)}(0) = 26! \cdot a_{26} = 26! \cdot \frac{1}{2} \binom{-\frac{1}{5}}{13} \frac{(-1)^{13}}{16^{13}}$$

$$(a_{26} : x^{26} \text{ együtthatója, ezért } 2k = 26 \implies k = 13)$$

$$f^{(25)}(0) = 25! \cdot a_{25} = 0, \quad \text{mert } a_{25} = 0$$

$$(x^{25} \text{-es tag nincs a sorban, tehát } 0 \text{ együtthatója van.)}$$

42. Feladat:

Írja fel az

$$g(x) = \frac{2x^3}{\sqrt[5]{32 - 2x^2}}, \quad x_0 = 0$$

bázispontú Taylor sorát és a sor konvergenciasugarát!

$$g^{(102)}(0) = ? , \quad g^{(103)}(0) = ?$$

Megoldás.

Mivel $g(x) = 2x^3 \cdot f(x)$, felhasználhatjuk az előző példa eredményét:

$$g(x) = 2x^3 \cdot \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{5}}{k} \frac{(-1)^k}{16^k} x^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{5}}{k} \frac{(-1)^k}{16^k} x^{2k+3}, \quad R = 4 \quad (\text{u.a.}) \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{és} \quad a_n = \frac{g^{(n)}(0)}{n!} \quad \text{miatt} \quad g^{(n)}(0) = n! \cdot a_n$$

$$g^{(102)}(0) = 102! \cdot a_{102} = 0, \quad \text{mert } a_{102} = 0 \quad (x^{102} \text{-es tag nincs a sorban)}$$

$$g^{(103)}(0) = 103! \cdot a_{103} = 103! \cdot \binom{-\frac{1}{5}}{50} \frac{(-1)^{50}}{16^{50}}$$

$$(a_{103} : x^{103} \text{ együtthatója, ezért } 2k + 3 = 103 \implies k = 50)$$

43. Feladat:

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} dx \approx ?$$

Az integranduszt nyolcadfokú Taylor polinomjával közelítse és becsülje meg a hibát!

Megoldás.

$$(1+x^4)^{-1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1/2}{k} x^{4k} = 1 - \underbrace{\frac{1}{2} x^4 + \frac{3}{8} x^8}_{T_8(x)} - \frac{5}{16} x^{12} + \dots \quad R = 1$$

$$\int_0^{1/2} (1+x^4)^{-1/2} dx = x - \frac{1}{2 \cdot 5} x^5 + \frac{3}{8 \cdot 9} x^9 - \frac{5}{16 \cdot 13} x^{13} + \dots \Big|_0^{1/2} \approx$$

$$\approx \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 5 \cdot 2^5} + \frac{3}{8 \cdot 9 \cdot 2^9}, \quad |H| < \frac{5}{16 \cdot 13 \cdot 2^{13}} \quad (\text{Leibniz sor})$$

2.8. Fourier-sor

Bevezető:

Ha f 2π szerint periodikus és $f \in R_{[0,2\pi]}$, akkor f Fourier sora

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

ahol

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} f(x) \cos kx \, dx, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} f(x) \sin kx \, dx, \quad k = 1, 2, \dots$$

a_k, b_k neve: Fourier együtthatók. Itt $a \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

A konvergenciára vonatkozó általunk használt elégséges tétel:

Dirichlet tétel: (egy elégséges tétel a Fourier sor konvergenciájára)

Ha az f függvény 2π szerint periodikus, $f \in R_{[0,2\pi]}$, a periodus felbontható véges sok (α, β) intervallumra, hogy itt f monoton és a végpontokban \exists a véges határérték, akkor f Fourier sora minden x -re konvergens, és

$$\Phi(x) = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}$$

44. Feladat:

Határozza meg az alábbi függvény Fourier sorát (összegfüggvénye legyen ϕ)!

$$f(x) = \begin{cases} 5, & \text{ha } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ 0, & \text{ha } x \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \end{cases} \quad f(x) = f(x + 2\pi), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Írja fel a sor első négy nem nulla tagját! $\phi\left(-\frac{\pi}{2}\right) = ?$, $\phi\left(\frac{\pi}{2}\right) = ?$

Megoldás.

Rajzoljuk fel a függvényt!

Most $a = -\pi$ választás célszerű.

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx; \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx$$

$b_k = 0$, mert a függvény páros. (Indokoljuk meg, hogy miért!)

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x)}_{\text{páros}} \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \, dx = \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\pi/2} 5 \, dx + \int_{\pi/2}^{\pi} 0 \, dx \right) = \dots = 5$$

$k \geq 1$ esete:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x) \cos kx}_{\text{páros}} \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos kx \, dx = \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\pi/2} 5 \cos kx \, dx + \int_{\pi/2}^{\pi} 0 \, dx \right) = \frac{2}{\pi} 5 \frac{\sin kx}{k} \Big|_0^{\pi/2} = \\ &= \frac{10}{\pi} \frac{1}{k} \left(\sin k \frac{\pi}{2} - 0 \right) \end{aligned}$$

Tehát:

$$a_k = \frac{10}{\pi} \frac{1}{k} \cdot \begin{cases} 0, & \text{ha } k = 2l \\ 1, & \text{ha } k = 4l + 1 \\ -1, & \text{ha } k = 4l + 3 \end{cases}$$

Így a Fourier sor:

$$\phi(x) = \frac{5}{2} + \frac{10}{\pi} \left(\frac{1}{1} \cos x - \frac{1}{3} \cos 3x + \frac{1}{5} \cos 5x - \frac{1}{7} \cos 7x + \dots \right)$$

$$\phi(x) = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2} \quad \text{miatt} \quad \phi\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \phi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{0+5}{2}$$

45. Feladat:

$$f(x) = x, \quad \text{ha } 0 < x \leq 2\pi \quad \text{és} \quad f(x + 2k\pi) = f(x) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

a) Határozza meg f Fourier sorát!

Jelölje a Fourier sor összegfüggvényét $\phi(x)$! $f(x) = \phi(x)$ milyen x -ekre igaz? Egyenletesen konvergens-e a Fourier sor?

b) A Fourier sor segítségével határozza meg a $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ numerikus sor összegét!

Megoldás.

a) Rajzoljuk fel a függvényt!

Most $a = 0$ választás célszerű.

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx \, dx; \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx \, dx$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \, dx = \dots = 2\pi$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \underbrace{x}_u \underbrace{\cos kx}_{v'} \, dx = \dots = 0$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \underbrace{x}_u \underbrace{\sin kx}_{v'} \, dx = \dots = -\frac{2}{k}$$

$$\phi(x) = \pi - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}$$

Dirichlet tétele alapján: $f(x) = \phi(x)$, ha $x \neq 2k\pi$ és $\phi(2k\pi) = \pi$.

A konvergencia nem egyenletes, mert bár az f_n függvények folytonosak, de az összegfüggvény (ϕ) nem folytonos.

b) $\phi\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$ alapján:

$$\frac{\pi}{2} = \pi - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k \frac{\pi}{2}}{k}$$

$$\frac{\pi}{2} = \pi - 2 \left(1 + 0 - \frac{1}{3} + 0 + \frac{1}{5} + 0 - \frac{1}{7} + \dots \right)$$

$$\frac{\pi}{2} = \pi - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \implies \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$$

Megjegyzés: A Fourier sort ügyesebben is felírhattuk volna az alábbi ötlettel:

$g_1(x) := f(x) - \pi$. Ez már majdnem páratlan függvény. Ha a szakadási pontokban megváltoztatjuk a függvényértéket 0-ra, akkor az így kapott, mondjuk g függvény már páratlan, így a sorfejtése sokkal rövidebb. Mivel g és g_1 függvény Fourier sora megegyezik, így ebből már f Fourier sora π hozzáadásával megkapható.

46. Feladat:

Határozza meg az alábbi függvény Fourier sorát (összegfüggvénye legyen ϕ)!

$$f(x) = \begin{cases} 3, & \text{ha } x \in [-\pi, -\pi/2] \cup [\pi/2, \pi] \\ 0, & \text{ha } x \in (-\pi/2, \pi/2) \end{cases} \quad f(x) = f(x + 2\pi), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$\phi(x) = ?$

Megoldás.

...

3. Többváltozós függvények

Ábrázolással csak előadáson foglalkozunk. Az alábbi felületekről beszélünk:

$$ax + by + cz = d$$

$$z = x^2 + y^2; \quad z = -x^2 - y^2; \quad z = 6 + x^2 + y^2; \quad z = 6 - x^2 - y^2$$

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad z^2 = x^2 + y^2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2; \quad z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}; \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$z = xy; \quad z = y^2 - x^2$$

3.1. Határérték, folytonosság

1. Feladat:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy + 3}{x^2y + 4} = ?$$

Megoldás.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy + 3}{x^2y + 4} = \frac{0 + 3}{0 + 4} = \frac{3}{4}$$

(Csak behelyettesítenünk kellett.)

2. Feladat:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2y)}{x^2 \cos y^2} = ?$$

Megoldás.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2y)}{x^2 \cos y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2y)}{x^2y} \cdot \frac{y}{\cos y^2} = 1 \cdot \frac{0}{1} = 0$$

3. Feladat:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \operatorname{arctg}(xy) \cdot \sin \frac{1}{x^2 + y^2} = ?$$

Megoldás.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \operatorname{arctg}(xy) \cdot \sin \frac{1}{x^2 + y^2} = 0, \text{ mert } (0 \cdot \text{korlátos}) \text{ alakú.}$$

4. Feladat:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{2x^2 + 2y^2} = ?$$

Megoldás.

Az $y = mx$ egyenesek mentén:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, mx) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{m x^2}{2x^2 + 2m^2 x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2} \frac{m}{2 + 2m^2} = \frac{m}{2 + 2m^2} \quad \text{függ } m\text{-től}$$

$\Rightarrow \nexists$ a határérték.

5. Feladat:

Hol folytonos az alábbi függvény?

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{3x^2 y^2}{4x^4 + 7y^4}, & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{ha } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Megoldás.

Ha $(x, y) \neq (0, 0)$, akkor a függvény folytonos, mert folytonos függvények összetétele. Vizsgálандó a $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ határérték! Az $y = mx$ egyenesek mentén:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, mx) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3m^2 x^4}{4x^4 + 7m^4 x^4} = \frac{3m^2}{4 + 7m^4} \quad \text{függ } m\text{-től}$$

$\Rightarrow \nexists$ a határérték. Így a függvény az origóban nem folytonos.

6. Feladat:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3xy^3}{2x^2 + 2y^2} = ?$$

Megoldás.

 $x_n = \varrho_n \cos \varphi_n$, $y_n = \varrho_n \sin \varphi_n$, φ_n tetsz., $\varrho_n \rightarrow 0$ egy tetszőleges $(0, 0)$ -hoz tartó pontsorozat. E mentén vizsgáljuk $f(x_n, y_n)$ konvergenciáját:

$$\lim_{\substack{\varrho_n \rightarrow 0 \\ \varphi_n \text{ tetsz.}}} \frac{3\varrho_n^4 \cos \varphi_n \sin^3 \varphi_n}{2\varrho_n^2} = \lim_{\varrho_n \rightarrow 0} \varrho_n^2 \underbrace{\frac{3}{2} \cos \varphi_n \sin^3 \varphi_n}_{\text{korlátos}} = 0$$

φ_n tetsz. 0

Tehát a keresett határérték 0.

7. Feladat:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{2x^2 + 3y^2} = ?$$

Megoldás.

Az előző megoldás mintájára:

$x_n = \varrho_n \cos \varphi_n$, $y_n = \varrho_n \sin \varphi_n$, φ_n tetsz., $\varrho_n \rightarrow 0$ tetszőleges $(0,0)$ -hoz tartó pontsorozattal vizsgálva:

$$\lim_{\substack{\varrho_n \rightarrow 0 \\ \varphi_n \text{ tetsz.}}} \frac{\varrho_n^3 \cos \varphi_n \sin^2 \varphi_n}{2\varrho_n^2 \cos^2 \varphi_n + 3\varrho_n^2 \sin^2 \varphi_n} = \lim_{\varphi_n \text{ tetsz.}} \varrho_n \downarrow 0 \underbrace{\frac{\cos \varphi_n \sin^2 \varphi_n}{2 + \sin^2 \varphi_n}}_{\text{korlátos}} = 0$$

Tehát a keresett határérték 0.

8. Feladat:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2 + 5y^2}{2x^2 + y^2} = ?$$

Megoldás.

Koordinátánkénti (másszóval iterált) limeszekkel dolgozunk:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{3x^2 + 5y^2}{2x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{2x^2} = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + 5y^2}{2x^2 + y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{5y^2}{y^2} = 5 \neq \frac{3}{2}$$

Tehát a keresett határérték nem létezik.

9. Feladat:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{4x + 3y}{2x + 8y} = ?$$

Megoldás.

...

(Az előző módszer most is eredményre vezet.)

10. Feladat:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} \frac{e^{x^2-3y}}{1 + 2x^2 + 3y^2} = ?$$

Megoldás.

f folytonos mindenütt, így a határérték mindenütt a helyettesítési érték:

$$\implies \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{x^2-3y}}{1+2x^2+3y^2} = f(2,1) = \frac{e}{12}$$

11. Feladat: $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (3x^2 + 4y^2) \operatorname{arctg} \frac{x}{y} = ?$

Megoldás. $0 \cdot \text{korlátos} \longrightarrow 0$

3.2. Parciális deriváltak, totális derivált

12. Feladat:

$$f(x, y) = \frac{x^2 e^{x+y^2}}{2x^2 + 1}$$

$$f'_x(x, y) = ?; \quad f'_y(x, y) = ?$$

Megoldás. ...

13. Feladat:

$$f(x, y) = x^3 - 3xy^2 + 2x - 5y + \ln 2$$

a) $f'_x(x, y) = ?; \quad f'_y(x, y) = ?$
 b) Számítsa ki a másodrendű parciális deriváltfüggvényeket!
 c) $\Delta f = f''_{xx} + f''_{yy} = ?$

Megoldás.

a) $f'_x(x, y) = 3x^2 - 3y^2 + 2, \quad f'_y(x, y) = -6xy - 5$

b) $f''_{xx} = 6x$

$f''_{xy} = f''_{yx} = -6y$

$f''_{yy} = -6x$

c) $\Delta f = 6x - 6x \equiv 0$

Az ilyen tulajdonságú függvényt harmonikus függvénynek nevezzük.

14. Feladat:

$$f(x, y) = \sqrt{5(x-1)^4 + 4y^2}$$

Írja fel az elsőrendű parciális deriváltfüggvényeket!
(Az $(1, 0)$ pontban a definícióval dolgozzon!)

Megoldás.

Ha $(x, y) \neq (1, 0)$:

$$f'_x(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{5(x-1)^4 + 4y^2}} \cdot 20(x-1)^3$$

$$f'_x(1, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h, 0) - f(1, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{5h^4} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{5}h^2}{h} = 0$$

Ha $(x, y) \neq (1, 0)$:

$$f'_y(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{5(x-1)^4 + 4y^2}} \cdot 8y$$

$$f'_y(1, 0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(1, 0+k) - f(1, 0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4k^2} - 0}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{2|k|}{k} = \nexists$$

Ha $(x, y) \neq (1, 0)$, akkor az f függvény totálisan deriválható, mert a parciálisok léteznek és folytonosak. Ha $(x, y) = (1, 0)$, akkor az f függvény nem deriválható, mert $f'_y(1, 0)$ nem létezik, tehát nem teljesül a totális deriválhatóság egyik szükséges feltétele.

15. Feladat: $f(x, y, z) = e^{x^2+2y} + \sin(xz)$, $\text{grad} f = ?$ Miért létezik?

16. Feladat: $f(x, y) = \arctg(x^2 + y^4 + 1)$, $\text{grad} f(0, 1) = ?$ Miért létezik?

17. Feladat:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^2}{x^2 + 2y^2}, & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1, & \text{ha } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- a) $f'_x(x, y) = ?$; $f'_y(x, y) = ?$
b) Hol differenciálható f ?

18. Feladat:

$$f(x, y) = (2x - y)^4 + 4x^3 - 8y^2$$

- a) $f'_x(x, y) = ?$; $f'_y(x, y) = ?$
 b) Hol deriválható (totálisan) a függvény? (Indokoljon!)
 $\text{grad}f(1, 2) = ?$
 c) Számítsa ki a másodrendű parciális deriváltfüggvényeket!

Megoldás.

a) $f'_x(x, y) = 4(2x - y)^3 \cdot 2 + 12x^2$, $f'_y(x, y) = 4(2x - y)^3 \cdot (-1) - 16y$

- b) Mivel a parciálisok mindenütt folytonosak, a függvény mindenütt totálisan deriválható (létezik mindenütt a gradiens).

$$\text{grad}f(1, 2) = f'_x(1, 2) \underline{i} + f'_y(1, 2) \underline{j} = 12 \underline{i} - 32 \underline{j}$$

c) $f''_{xx} = 8 \cdot 3(2x - y)^2 \cdot 2 + 24x$
 $f''_{xy} = f''_{yx} = 8 \cdot 3(2x - y)^2 \cdot (-1)$
 $f''_{yy} = -4 \cdot 3(2x - y)^2 \cdot (-1) - 16$

19. Feladat:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(x-2)y^2}{x^2+y^2} + 6x + 3y, & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{ha } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- a) $f'_x(x, y) = ?$; $f'_y(x, y) = ?$
 b) Hol differenciálható f ?

Megoldás.

a) Ha $(x, y) \neq (0, 0)$: $f'_x(x, y) = \frac{y^2(x^2 + y^2) - (x-2)y^2 \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} + 6$

Ha $(x, y) = (0, 0)$, akkor a definícióval kell dolgozni:

$$f'_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6h - 0}{h} = 6$$

Ha $(x, y) \neq (0, 0)$: $f'_y(x, y) = \frac{(x-2)2y(x^2 + y^2) - (x-2)y^2 \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} + 3$

Ha $(x, y) = (0, 0)$, akkor most is a definícióval kell dolgozni:

$$f'_y(0, 0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0, k) - f(0, 0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\frac{-2k^2}{k^2} + 3k - 0}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \left(-\frac{2}{k} + 3 \right) \neq$$

- b) Az origóban nem deriválható totálisan a függvény, mert $f'_y(0, 0) \neq$.

(Egyébként a függvény nem is folytonos itt, tehát ezért sem deriválható.)

Másutt deriválható, mert a parciálisok léteznek és folytonosak.

20. Feladat:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(y^2 + 2x^2)}{\sqrt{y^2 + 2x^2}}, & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{ha } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = ?$ Folytonos-e f az origóban?

b) $f'_x(0, 0) = ?$ (A definícióval dolgozzon!)

c) Totálisan deriválható-e f az origóban?

Megoldás.

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(y^2 + 2x^2)}{\sqrt{y^2 + 2x^2}} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(y^2 + 2x^2)}{y^2 + 2x^2} \sqrt{y^2 + 2x^2} = \\ &= 1 \cdot 0 = 0 = f(0, 0) \end{aligned}$$

Tehát f folytonos $(0, 0)$ -ban.

$$\begin{aligned} \text{b) } f'_x(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 2h^2}{\sqrt{2h^2}} - 0}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin 2h^2}{2h^2} \sqrt{2} \frac{|h|}{h} = \nexists \end{aligned}$$

c) Mivel $f'_x(0, 0) \nexists$, f nem deriválható az origóban.

21. Feladat:

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2 + y^2}, & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{ha } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

a) Folytonos-e f az origóban?

b) Írja fel az f'_x és f'_y függvényeket, ahol azok léteznek!
(Az origóban a definícióval dolgozzon!)

Megoldás.

...

22. Feladat:

$$f(x, y, z) = x^3 + y^4 + x^2 y e^{2z}$$

a) $\text{grad}f(-1, 1, 0) = ?$ Miért létezik?

b) $f'''_{xxz} = ?$ $f'''_{xzx} = ?$

Megoldás.

a) $f'_x = 3x^2 + 2xye^{2z}$, $f'_y = 4y^3 + x^2e^{2z}$, $f'_z = x^2ye^{2z} \cdot 2$

A parciális deriváltak mindenütt léteznek és folytonosak, ezért $\text{grad}f$ mindenütt létezik.

$$\text{grad}f(-1, 1, 0) = f'_x(-1, 1, 0)\underline{i} + f'_y(-1, 1, 0)\underline{j} + f'_z(-1, 1, 0)\underline{k} = \underline{i} + 5\underline{j} + 2\underline{k}$$

b) $\begin{matrix} f''_{xx} & = & 6x + 2ye^{2z} \\ f''_{xxz} & = & 4ye^{2z} \end{matrix}$ $\begin{matrix} f''_{xz} & = & 4xye^{2z} \\ f''_{xzx} & = & 4ye^{2z} \end{matrix}$

A parciálisok léteznek és folytonosak, így a "vegyes" parciálisok egyenlőek.

3.3. Érintősík, differenciál, iránymenti derivált

23. Feladat:

$$f(x, y) = (2x - y)^2 + 4x^2 - 8y$$

a) $f'_x(x, y) = ?$; $f'_y(x, y) = ?$

b) Hol deriválható (totálisan) a függvény? (Indokoljon!)

c) Írja fel a függvény $P_0(1, 2)$ pontjabeli érintősíkjának egyenletét!

Megoldás.

...

24. Feladat:

$$f(x, y) = \frac{e^{3y}}{x^4 + 1}$$

a) $f'_x(x, y) = ?$, $f'_y(x, y) = ?$

b) $\left. \frac{df}{d\underline{e}} \right|_{(1,0)} = ?$, ha $\underline{e} \parallel 2\underline{i} - 3\underline{j}$

c) Írja fel az $(1, 0)$ ponthoz tartozó felületi pontban az érintősík egyenletét!

Megoldás.

...

25. Feladat:

$$f(x, y) = 3y + e^{xy^2} - 2y \operatorname{arctg} \frac{x}{y}, \quad P_0(0, 1)$$

a) $f'_x(x, y) = ?$; $f'_y(x, y) = ?$, ha $y \neq 0$

b) Írja fel a függvény P_0 pontjabeli érintősíkjának egyenletét!

c) $df(P_0, (h, k)) = ?$

d) $\left. \frac{df}{d\underline{e}} \right|_{P_0} = ?$, ha $\underline{e} \parallel 2\underline{i} - 7\underline{j}$

e) $\max \left. \frac{df}{d\underline{e}} \right|_{P_0} = ?$ (és adja meg a maximumhoz tartozó irányt!)

$\min \left. \frac{df}{d\underline{e}} \right|_{P_0} = ?$ (és adja meg a minimumhoz tartozó irányt!)

Megoldás.

$$a) f'_x = y^2 e^{xy^2} - 2y \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \frac{1}{y},$$

$$f'_y = 3 + 2xy e^{xy^2} - 2 \operatorname{arctg} \frac{x}{y} - 2y \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \frac{-x}{y^2},$$

$$b) f'_x(0, 1) = -1, \quad f'_y(0, 1) = 3, \quad f(0, 1) = 4$$

Az érintősík egyenlete:

($y \neq 0$ -ra \exists a gradiens, így létezik az érintősík is.)

$$f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - f(x_0, y_0)) = 0$$

$$\text{Tehát } -1(x - 0) + 3(y - 1) - (z - 4) = 0$$

$$c) df((0, 1), (h, k)) = f'_x(0, 1)h + f'_y(0, 1)k = -h + 3k$$

d) Mivel P_0 egy környezetében a függvény totálisan deriválható, ezért

$$\left. \frac{df}{d\underline{e}} \right|_{P_0} = \operatorname{grad} f(P_0) \cdot \underline{e}$$

$$|2\underline{i} - 7\underline{j}| = \sqrt{2^2 + 7^2} = \sqrt{53} \implies \underline{e} = \frac{2}{\sqrt{53}}\underline{i} - \frac{7}{\sqrt{53}}\underline{j}$$

$$\text{és } \operatorname{grad} f(0, 1) = -\underline{i} + 3\underline{j}$$

$$\left. \frac{df}{d\underline{e}} \right|_{P_0} = (-\underline{i} + 3\underline{j}) \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{53}}\underline{i} - \frac{7}{\sqrt{53}}\underline{j} \right) = -\frac{2}{\sqrt{53}} - \frac{21}{\sqrt{53}} = -\frac{23}{\sqrt{53}}$$

e) Mivel: $\text{grad } f(P_0) = (-1, 3)$ tehát

$$\max \left. \frac{df}{d\underline{e}} \right|_{P_0} = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10}, \quad \text{ha } \underline{e} \text{ a } (-1, 3) \text{ vektor irányába mutat}$$

$$\min \left. \frac{df}{d\underline{e}} \right|_{P_0} = -\sqrt{10}, \quad \text{ha } \underline{e} \text{ a } (1, -3) \text{ vektor irányába mutat}$$

26. Feladat:

$$f(x, y, z) = x^2y + yz - 5z^2, \quad P_0(0, 10, 1)$$

a) $\text{grad } f = ?$ Miért létezik a gradiens?

b) $\left. \frac{df}{d\underline{e}} \right|_{P_0} = ?$, ha $\underline{e} \parallel -3\underline{j} + 4\underline{k}$

Megoldás.

a) $f'_x = 2xy$, $f'_y = x^2 + z$, $f'_z = y - 10z$

A parciálisok mindenütt léteznek és folytonosak $\implies \text{grad } f$ mindenütt \exists .

b) $\text{grad } f \exists K_{P_0}$ -ban $\implies \left. \frac{df}{d\underline{e}} \right|_{P_0} = \text{grad } f(P_0) \cdot \underline{e} =$
 $= (0\underline{i} + \underline{j} + 0\underline{k}) \cdot (0\underline{i} - \frac{3}{5}\underline{j} + \frac{4}{5}\underline{k}) = -\frac{3}{5}$

27. Feladat:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3y^2}{2x^2 + y^2}, & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0) \\ -3, & \text{ha } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = ?$ Folytonos-e f az origóban?

b) $f'_x(x, y) = ?$, $f'_y(x, y) = ?$ (Az origóban a definícióval dolgozzon!)

c) $\left. \frac{df}{d\underline{e}} \right|_{(1,-1)} = ?$, ha $\underline{e} \parallel -5\underline{i} + \underline{j}$

d) Adja meg $\max \left. \frac{df}{d\underline{e}} \right|_{(1,-1)}$ és $\min \left. \frac{df}{d\underline{e}} \right|_{(1,-1)}$ értékét!

e) Írja fel az $(1, -1)$ ponthoz tartozó felületi pontban az érintősík egyenletét!

Megoldás.

a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^2 - 3y^2}{2x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 3y^2}{2x^2 + y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-3y^2}{y^2} = -3 \neq \frac{1}{2}$$

Tehát a keresett határérték nem létezik.

 \implies A függvény nem folytonos az origóban.

$$\text{b) Ha } (x, y) \neq (0, 0) : f'_x(x, y) = \frac{2x(2x^2 + y^2) - (x^2 - 3y^2)4x}{(2x^2 + y^2)^2}$$

$$f'_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^2}{2h^2} + 3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{7}{2h} = \#$$

$$\text{Ha } (x, y) \neq (0, 0) : f'_y(x, y) = \frac{-6y(2x^2 + y^2) - (x^2 - 3y^2)2y}{(2x^2 + y^2)^2}$$

$$f'_y(0, 0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0, k) - f(0, 0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\frac{-3k^2}{k^2} + 3}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{0}{k} = 0$$

c) A $(0, 0)$ kivételével a parciálisok léteznek és folytonosak $\implies \text{grad}f \ni$ itt.

$$\text{Mivel } \text{grad}f \ni K_{P_0}\text{-ban } \implies \left. \frac{df}{d\underline{e}} \right|_{P_0} = \text{grad}f(P_0) \cdot \underline{e} =$$

$$= \left(\frac{14}{9} \underline{i} + \frac{14}{9} \underline{j} \right) \cdot \left(-\frac{5}{\sqrt{26}} \underline{i} + \frac{1}{\sqrt{26}} \underline{j} \right) = -\frac{14}{9} \frac{5}{\sqrt{26}} + \frac{14}{9} \frac{1}{\sqrt{26}} = \frac{-56}{9 \cdot \sqrt{26}}$$

$$\text{d) } \max \left. \frac{df}{d\underline{e}} \right|_{P_0} = |\text{grad}f(P_0)| = \sqrt{\left(\frac{14}{9} \right)^2 + \left(\frac{14}{9} \right)^2} = \frac{14}{9} \sqrt{2},$$

$$\text{ha } \underline{e} = \frac{\text{grad}f(P_0)}{|\text{grad}f(P_0)|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \underline{i} + \frac{1}{\sqrt{2}} \underline{j}$$

$$\min \left. \frac{df}{d\underline{e}} \right|_{P_0} = -|\text{grad}f(P_0)| = -\frac{14}{9} \sqrt{2},$$

$$\text{ha } \underline{e} = -\frac{\text{grad}f(P_0)}{|\text{grad}f(P_0)|} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \underline{i} - \frac{1}{\sqrt{2}} \underline{j}$$

$$\text{e) } f(1, -1) = \frac{-2}{3}$$

Az érintősík egyenlete így:

$$\frac{14}{9} (x - 1) + \frac{14}{9} (y + 1) - \left(z + \frac{2}{3} \right) = 0$$

28. Feladat:

$$f(x, y) = \frac{y^3}{e^{2x+1}} = y^3 e^{-2x-1}; \quad P_0(-\frac{1}{2}, 1)$$

a) $\max \left. \frac{df}{d\underline{e}} \right|_{P_0} = ?$ (és adja meg a maximumhoz tartozó irányt!)

b) $\min \left. \frac{df}{d\underline{e}} \right|_{P_0} = ?$ (és adja meg a minimumhoz tartozó irányt!)

Megoldás.

$$f'_x = y^3 e^{-2x-1}(-2), \quad f'_x(-\frac{1}{2}, 1) = -2, \quad f'_y = 3y^2 e^{-2x-1}, \quad f'_y(-\frac{1}{2}, 1) = 3$$

f'_x, f'_y mindenütt folytonos

$\Rightarrow f$ totálisan deriválható P_0 egy környezetében (sőt mindenütt)

$\Rightarrow P_0$ -ban \exists minden irányban az iránymenti derivált és:

$$\left. \frac{df}{d\underline{e}} \right|_{P_0} = \text{grad } f(P_0) \cdot \underline{e} = |\text{grad } f(P_0)| \cdot |\underline{e}| \cdot \cos \varphi, \quad \text{és} \quad |\underline{e}| = 1$$

$$\max \left. \frac{df}{d\underline{e}} \right|_{P_0} = |\text{grad } f(P_0)|;$$

ha $\cos \varphi = 1 \Rightarrow \varphi = 0 \Rightarrow \underline{e}$ iránya $\text{grad } f(P_0)$ irányával egyenlő

$$\min \left. \frac{df}{d\underline{e}} \right|_{P_0} = -|\text{grad } f(P_0)|;$$

ha $\cos \varphi = -1 \Rightarrow \varphi = \pi \Rightarrow \underline{e}$ iránya $\text{grad } f(P_0)$ irányával ellentétes

Most: $\text{grad } f(P_0) = (-2, 3)$ tehát

$$\max \left. \frac{df}{d\underline{e}} \right|_{(-\frac{1}{2}, 1)} = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{13}, \quad \text{ha } \underline{e} \text{ a } (-2, 3) \text{ vektor irányába mutat}$$

$$\min \left. \frac{df}{d\underline{e}} \right|_{(-\frac{1}{2}, 1)} = -\sqrt{13}, \quad \text{ha } \underline{e} \text{ a } (2, -3) \text{ vektor irányába mutat}$$

29. Feladat:

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + 3y^4}$$

- a) $f'_x(0, 0) = ?$; $f'_y(0, 0) = ?$
(A definícióval dolgozzon!)
- b) Hol deriválható a függvény?
 $\text{grad } f|_{(1,2)} = ?$
- c) Írja fel az $(1, 2)$ ponthoz tartozó felületi pontban az érintősík egyenletét!
- d) $\left. \frac{df}{d\underline{e}} \right|_{(1,2)} = ?$, ha $\underline{e} \parallel -5\underline{i}$
- e) Adja meg $\max \left. \frac{df}{d\underline{e}} \right|_{(1,2)}$ értékét!

30. Feladat:

$$f(x, y) = \sqrt[3]{4x^3 + 3y^2}$$

- a) $f'_x(x, y) = ?$; $f'_y(x, y) = ?$
- b) Hol deriválható (totálisan) a függvény? (Indokoljon!)

Megoldás.

...

31. Feladat:

$$f(x, y) = \frac{5x - 3y}{2x + 4y} \quad (x_0, y_0) = (0, 1)$$

- a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = ?$
- b) $\text{grad } f(x_0, y_0) = ?$ $df((x_0, y_0), (h, k)) = ?$
- c) Milyen irányban lesz az (x_0, y_0) pontban az iránymenti derivált maximális? Adja meg ezt a maximális értéket is!

Megoldás.

a) Iterált limeszekkel célszerű megoldani.

...

3.4. Összetett függvény deriválása

32. Feladat:

$$f \in C_{\mathbb{R}}^2; \quad g(x, y) = f(x^2 - y^3)$$

Határozza meg g másodrendű parciális deriváltjait!

Megoldás.

$$g(x, y) = f(t)|_{t=x^2-y^3} \quad \text{összetett függvényről van szó.}$$

$$g'_x = f'(t)|_{t=x^2-y^3} \cdot \frac{\partial}{\partial x} (x^2 - y^3) \quad \text{alapján:}$$

$$g'_x = f'(x^2 - y^3) \cdot 2x$$

$$g'_y = f'(x^2 - y^3) \cdot (-3y^2)$$

$$g''_{xx} = \left(\frac{\partial}{\partial x} f'(x^2 - y^3) \right) \cdot 2x + f'(x^2 - y^3) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} 2x \right) \quad \text{alapján:}$$

$$g''_{xx} = (f''(x^2 - y^3) \cdot 2x) \cdot 2x + f'(x^2 - y^3) \cdot 2$$

$$g''_{xy} = f''(x^2 - y^3) 2x (-3y^2) = g''_{yx}$$

$$g''_{yy} = f''(x^2 - y^3) (-3y^2) (-3y^2) + f'(x^2 - y^3) (-6y)$$

33. Feladat:

Igazoljuk, hogy ha F az $(x^2 - y^2)$ -nek tetszőleges, folytonosan differenciálható függvénye, akkor az

$$f(x, y) = y F(x^2 - y^2)$$

kétváltozós függvény eleget tesz az

$$y^2 f'_x(x, y) + x y f'_y(x, y) = x f(x, y)$$

differenciálegyenletnek!

Megoldás.

$$f'_x = y F'(x^2 - y^2) 2x \quad f'_y = F(x^2 - y^2) + y F'(x^2 - y^2) (-2y)$$

A differenciálegyenlet bal oldalába helyettesítve:

$$y^2 y F'(x^2 - y^2) 2x + x y (F(x^2 - y^2) + y F'(x^2 - y^2) (-2y)) \stackrel{?}{=} x y F(x^2 - y^2)$$

Rendezve:

$$x y F(x^2 - y^2) \equiv x y F(x^2 - y^2)$$

Ez pedig igaz.

34. Feladat: Számítsa ki az

$$A = g''_{xx}(2, 1) + g''_{xy}(2, 1) - 2g''_{yx}(2, 1)$$

kifejezés értékét, ahol $g(x, y) = f(x^2 - y)$ és f -nek a $t_0 = 3$ körüli másodrendű Taylor polinomja

$$T_2(t) = 1 - (t - 3) + 5(t - 3)^2$$

Megoldás.

$$\begin{aligned} f'(3) &= -1 & f''(3) &= 10 \\ g'_x &= f'(x^2 - y) \cdot 2x & g''_{xx} &= f''(x^2 - y) \cdot 2x \cdot 2x + f'(x^2 - y) \cdot 2 \\ g''_{xy} &= f''(x^2 - y) \cdot 2x \cdot (-1) = g''_{yx} \\ g''_{xx}(2, 1) &= f''(3) \cdot 4^2 + f'(3) \cdot 2 = 158 \\ g''_{xy}(2, 1) &= f''(3) \cdot (-4) = -40 \\ A &= 158 - (-40) = 198 \end{aligned}$$

35. Feladat:

$g_1(x)$ és $g_2(x)$ kétszer folytonosan differenciálható egyváltozós függvény
($g_1(x), g_2(x) \in C^2_{\mathbb{R}}$)

$$h(x, y) = x \cdot g_1(y - x) + y \cdot g_2(x - y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Hozza egyszerűbb alakra a $h''_{xx} + 2h''_{xy} + h''_{yy}$ kifejezést!

Megoldás.

$$h'_x = \left(\frac{\partial}{\partial x} x \right) \cdot g_1(y - x) + x \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} g_1(y - x) \right) + y \left(\frac{\partial}{\partial x} g_2(x - y) \right)$$

alapján:

$$\begin{aligned} h'_x &= g_1(y - x) - x g'_1(y - x) + y g'_2(x - y) \\ h'_y &= x g'_1(y - x) + g_2(x - y) - y g'_2(x - y) \\ 2h''_{xy} &= 2(g'_1(y - x) - x g''_1(y - x) + g'_2(x - y) - y g''_2(x - y)) \\ h''_{xx} &= -g'_1(y - x) - g'_1(y - x) + x g''_1(y - x) + y g''_2(x - y) \\ h''_{yy} &= x g''_1(y - x) - g'_2(x - y) - g'_2(x - y) + y g''_2(x - y) \\ &\implies \end{aligned}$$

$$h''_{xx} + 2h''_{xy} + h''_{yy} \equiv 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Esetleg a g_1, g_2 függvények argumentumát ne írjuk ki mindenütt (sok idő), csak jegyezzük meg, hogy g_1 -et és deriváltjait az $(y - x)$ helyen, g_2 -öt és deriváltjait az $(x - y)$ helyen vesszük. (Így áttekinthetőbb is a deriválás menete.)

36. Feladat:

$g \in C_{\mathbb{R}}^2$ változója helyébe írjunk $\frac{x}{2y}$ -t ($y \neq 0$) és jelöljük az így kapott kétváltozós függvényt $f(x, y)$ -nal!

Adja meg $y \neq 0$ esetére az alábbi parciális deriváltakat!

$$\begin{aligned} f'_x(x, y) &= ?, & f'_y(x, y) &= ? \\ f''_{xy}(x, y) &= ?, & f''_{yx}(x, y) &= ? \end{aligned}$$

Megoldás.

...

37. Feladat:

$g \in C_{\mathbb{R}}^2$ változója helyébe írjunk $\frac{2x}{y^2 + 1}$ -et és jelöljük az így kapott kétváltozós függvényt $f(x, y)$ -nal!

$$f'_x(x, y) = ?, \quad f'_y(x, y) = ?, \quad f''_{xy}(x, y) = ?$$

Megoldás.

...

3.5. Szélsőértékszámítás

38. Feladat:

$$f(x, y) = 2x^3 - 6x + 5 + y^3 - 12y$$

Keresse meg az f függvény lokális szélsőértékeit!

Megoldás.

...

39. Feladat:

$$f(x, y) = (x - 3y + 3)^2 + (x - y - 1)^2$$

Keresse meg az f függvény lokális szélsőértékeit!

Megoldás.

$$\begin{aligned} f'_x &= 2(x - 3y + 3) + 2(x - y - 1) = 0 \\ f'_y &= 2(x - 3y + 3)(-3) + 2(x - y - 1)(-1) = 0 \end{aligned}$$

Egy lineáris egyenletrendszerhez jutottunk most:

$$\left. \begin{aligned} 4x - 8y + 4 &= 0 \\ -8x + 20y - 16 &= 0 \end{aligned} \right\} \implies \left. \begin{aligned} x - 2y &= -1 \\ -2x + 5y &= 4 \end{aligned} \right\} \implies x = 3 \text{ és } y = 2$$

Tehát $P(2, 3)$ -ban teljesül a szükséges feltétel.

$$D(x, y) = \begin{vmatrix} 4 & -8 \\ -8 & 20 \end{vmatrix} = 80 - 64 > 0$$

\implies van lokális szélsőérték. $f''_{xx}(2, 3) = 4 > 0 \implies$ lokális minimum van

40. Feladat:

$$f(x, y) = (x - y + 1)^2 - (x^2 - 2)^2$$

Keresse meg az f függvény lokális szélsőértékeit!

Megoldás.

$$f'_x = 2(x - y + 1) - 2(x^2 - 2) \cdot 2x = 2 + 10x - 4x^3 - 2y = 0 \quad (1)$$

$$f'_y = 2(x - y + 1)(-1) = 0 \quad (2)$$

(2)-ből: $y = x + 1$ Ezt behelyettesítve (1)-be: $4x(x^2 - 2) = 0$

Így 3 pontot kapunk, melyekben teljesül a szükséges feltétel, így lehet lokális szélsőérték:

$$P_1(0, 1), \quad P_2(\sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}), \quad P_3(-\sqrt{2}, 1 - \sqrt{2})$$

$$D(x, y) = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 - 12x^2 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 16 - 24x^2$$

$D(0, 1) = 16 > 0$, $f''_{xx} = 18 > 0 \implies$ lokális minimum van $(0, 1)$ -ben
 $f(0, 1) = -4$ értékkel.

$D|_{P_2} < 0$, $D|_{P_3} < 0 \implies P_2$ -ben és P_3 -ban nincs lokális szélsőérték.

41. Feladat:

$$f(x, y) = 2x + y + \frac{4}{xy}$$

Határozza meg f lokális szélsőértékeit!

Megoldás.

...

42. Feladat:

$$f(x, y) = \frac{1}{x^3} + y^3 - \frac{3y}{x}$$

Határozza meg f lokális szélsőértékeit!

Megoldás.

...

43. Feladat:

$$f(x, y) = (3y - x)^2 - 6y^2 + 8x$$

- a) $f'_x(x, y) = ?$; $f'_y(x, y) = ?$
 b) Hol deriválható (totálisan) a függvény? (Indokoljon!)
 c) Írja fel a függvény $P_0(2, 1)$ ponthoz tartozó felületi pontban az érintősík egyenletét!
 d) $\left. \frac{df}{d\mathbf{e}} \right|_{(2,1)} = ?$, ha $\mathbf{e} \parallel -5\mathbf{i}$
 e) Hol lehet f -nek lokális szélsőértéke?
 Van-e lokális szélsőértéke? Ha igen, milyen jellegű?

Megoldás.

...

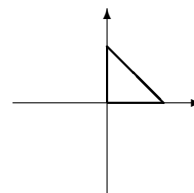
44. Feladat:

$$f(x, y) = x^3 y^5$$

- a) Keresse meg az f függvény abszolút szélsőértékét az $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, $C(0, 1)$ pontokkal kijelölt háromszög alakú zárt halmazon!
 b) Van-e lokális szélsőértéke f -nek, ha $(x, y) \in \mathbb{R}^2$?

Megoldás.

$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} f'_x = 3x^2 y^5 = 0 \\ f'_y = 5x^3 y^4 = 0 \end{array} \right\} x = 0 \text{ vagy } y = 0.$$



Tehát az $(x, 0)$ és a $(0, y)$ pontokban lehet lokális szélsőértéke. (Itt teljesül a szükséges feltétel.)

$f(x, y) > 0$ a tartomány belsejében,

$$f(x, y) = 0 \text{ a tengelyeken } (f(x, 0) = 0, f(0, y) = 0)$$

$$\implies \min f = 0.$$

Weierstrass II. tétele alapján f -nek van maximuma is, mert folytonos és a tartomány

korlátos és zárt (kompakt halmaz). A maximumot csak a tartomány határán veheti fel. Már csak az $y = 1 - x$ jöhet szóba.

$$g(x) := f(x, 1 - x) = x^3 (1 - x)^5, \quad x \in [0, 1]$$

$g(0) = g(1) = 0$, így nem lehet maximum.

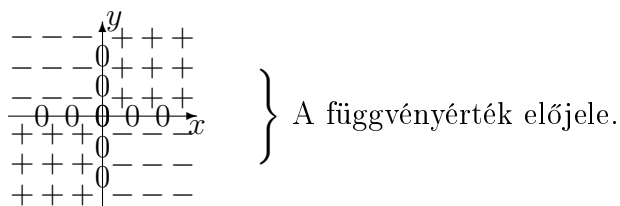
Valahol az intervallum belsejében kell megtalálnunk a maximumot.

$$g'(x) = 3x^2 (1 - x)^5 + x^3 \cdot 5(1 - x)^4(-1) = x^2 (1 - x)^4 (3 - 8x) = 0$$

$$\implies x = \frac{3}{8}, y = \frac{5}{8}$$

Így a keresett maximális függvényérték: $f\left(\frac{3}{8}, \frac{5}{8}\right) = \frac{3^5 \cdot 5^5}{8^8}$

- b) Lokális szélsőérték csak a tengelyeken lehetne. A tételünket most nem tudnánk alkalmazni, mert $D(x, 0) = 0$ és $D(0, y) = 0$ lenne esetünkben. Vizsgáljuk a függvényértékek előjelét!



A tengelyeken a függvényérték nulla. De a tengelyek bármely pontjának minden környezetében felvesz a függvény pozitív és negatív értéket is, így a függvénynek sehol sincs lokális szélsőértéke.

45. Feladat:

$$f(x, y) = y^3 - 12y + 2(x + y)^2 - 8(x + y)$$

- a) Határozza meg a függvény lokális szélsőérték helyeit és azok jellegét!
 b) $df((5, -1), (h, k)) = ?$

Megoldás.

...

3.6. Kétszeres integrál téglalap- és normál tartományokon

A tartományokat mindig rajzoljuk fel és jelöljük be, hogy mi szerint integrálunk belül!

46. Feladat:

$$\iint_T x \sin(xy) \, dT = ?,$$

ha T az $1 \leq x \leq 3$, $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ téglalaptartomány.

1. ábra

Megoldás.

A függvény folytonos, ezért mindegy, hogy milyen sorrendben integrálunk, az eredmény ugyanaz. De, ha először x szerint integrálunk, akkor parciális integrál lenne, ezért próbáljuk meg a másik sorrendet!

$$\begin{aligned} \int_1^3 \int_0^{\pi/2} x \sin(xy) \, dy \, dx &= \int_1^3 -\cos(xy) \Big|_{y=0}^{\pi/2} \, dx = \\ \int_1^3 \left(-\cos \frac{\pi x}{2} + 1 \right) \, dx &= -\frac{\sin \frac{\pi x}{2}}{\frac{\pi}{2}} + x \Big|_1^3 = \dots = 2 + \frac{4}{\pi} \end{aligned}$$

47. Feladat:

$$\iint_T x \, dT = ?,$$

ha T az $y = x^2$ és az $y = x + 2$ által határolt korlátos tartomány.

2. ábra

Megoldás.

A két görbe metszéspontjai a $(-1, 1)$, $(2, 4)$ pontok és az x tengely felől nézve normáltartományról van szó.

$$\int_{-1}^2 \int_{y=x^2}^{x+2} x \, dy \, dx = \int_{-1}^2 -xy \Big|_{x^2}^{x+2} \, dx = \int_{-1}^2 (x(x+2) - x^3) \, dx = \dots = \frac{9}{4}$$

48. Feladat:

$$\iint_T \frac{x^2}{y^2} dT = ?,$$

ha az első síknegyedbe eső korlátos T tartomány:

$$y \geq \frac{1}{x}, \quad y \leq x \quad \text{és} \quad 1 \leq x \leq 2$$

3. ábra

Megoldás.

Az x tengely felől nézve normáltartományról van szó.

$$\int_1^2 \int_{y=1/x}^x \frac{x^2}{y^2} dy dx = \int_1^2 -\frac{x^2}{y} \Big|_{1/x}^x dx = \int_1^2 (-x + x^3) dx = \dots = \frac{9}{4}$$

49. Feladat:

Alakítsa kétféleképpen kétszeres integrállá az alábbi kettősintegrált majd az egyik módon számolja ki:

$$\iint_T (18xy^2 - 9y) dT,$$

ahol T az $O(0,0)$, $A(2,0)$, $B(2,3)$ és a $C(1,3)$ pontok által meghatározott trapéz.

Megoldás.

Nem N_x , csak 2 N_x uniója. Így

$$I = \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^{3x} f(x,y) dy dx + \int_{x=1}^2 \int_{y=0}^3 f(x,y) dy dx$$

Viszont N_y :

$$I = \int_{y=0}^3 \int_{x=y/3}^2 f(x,y) dx dy$$

Az integrál értékét az utóbbival számoljuk ki:

$$\begin{aligned} I &= \int_{y=0}^3 (9x^2y^2 - 9xy) \Big|_{x=y/3}^2 dy = \int_{y=0}^3 (36y^2 - 18y - (y^4 - 3y^2)) dy = \\ &= \int_{y=0}^3 (39y^2 - 18y - y^4) dy = \left(13y^3 - 9y^2 - \frac{y^5}{5} \right) \Big|_{y=0}^3 = 13 \cdot 27 - 81 - \frac{3^5}{5} \end{aligned}$$

50. Feladat:

$$\iint_T e^{6x+y} \, dx \, dy,$$

ahol T az $A(0,0)$, $B(5,0)$, $C(4,6)$ és a $D(3,6)$ pontok által meghatározott trapéz.
Alakítsa kétféleképpen kétszeres integrállá a fenti kettős integrált!
Az egyik segítségével számolja ki a kettős integrál értékét!

Megoldás.

...

51. Feladat:

Cserélje fel az integrálás sorrendjét!

$$\text{a) } I_1 = \int_{x=-1}^0 \int_{y=0}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y) \, dy \, dx + \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^{1-x} f(x,y) \, dy \, dx$$

$$\text{b) } I_2 = \int_{x=0}^{\sqrt{2}} \int_{y=0}^{x^2} f(x,y) \, dy \, dx + \int_{x=\sqrt{2}}^2 \int_{y=0}^2 f(x,y) \, dy \, dx + \int_{x=2}^4 \int_{y=0}^{4-x} f(x,y) \, dy \, dx$$

Megoldás.

A tartományokat feltétlenül rajzoljuk fel!

$$\text{a) } I_1 = \int_{y=0}^1 \int_{x=-\sqrt{1-y^2}}^{x=1-y} f(x,y) \, dx \, dy$$

$$\text{b) } I_2 = \int_{y=0}^2 \int_{x=\sqrt{y}}^{4-y} f(x,y) \, dx \, dy$$

52. Feladat:

$$\int_0^1 \int_{y^2}^1 y \sin x^2 \, dx \, dy = ?$$

Megoldás.

Nem tudunk primitív függvényt felírni x szerint, ezért először y szerint próbálunk integrálni:

A kiindulás: $y^2 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ Ábra:

Felcserélve a sorrendet: $0 \leq y \leq \sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 1$

$$\begin{aligned} I &= \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^{\sqrt{x}} y \sin x^2 \, dy \, dx = \int_{x=0}^1 \frac{y^2}{2} \Big|_0^{\sqrt{x}} \cdot \sin x^2 \, dx = \frac{1}{2} \int_{x=0}^1 x \sin x^2 \, dx = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \int_{x=0}^1 2x \sin x^2 \, dx = \frac{1}{4} [-\cos x^2]_0^1 = \frac{1}{4} (-\cos 1 + 1) \end{aligned}$$

53. Feladat:

Cserélje fel az integrálás sorrendjét, majd számolja ki az alábbi integrált!

$$\int_0^{16} \int_{\frac{\sqrt{y}}{2}}^2 \sqrt[5]{1+x^3} \, dx \, dy$$

Megoldás.

...

54. Feladat:

Cserélje fel az integrálás sorrendjét:

$$\int_0^1 \int_{e^x}^{e^{2x}} f(x, y) \, dy \, dx$$

Megoldás.

...

3.7. Kettős integrálok transzformációja

55. Feladat:

$$\iint_T y^2 \, dT = ?,$$

ha $T : x^2 + y^2 \leq 4$, $0 \leq y \leq x$

Megoldás.

Polártranszformációval dolgozunk:

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{\varphi=0}^{\pi/4} \int_{r=0}^2 r^2 \sin^2 \varphi \underbrace{r}_{|J|} dr d\varphi = \int_{r=0}^2 r^3 dr \cdot \int_{\varphi=0}^{\pi/4} \frac{\sin^2 \varphi}{1 - \cos 2\varphi} d\varphi = \\
 &= \frac{r^4}{4} \Big|_0^2 \cdot \left(\frac{1}{2} \varphi - \frac{\sin 2\varphi}{4} \right) \Big|_0^{\pi/4} = 4 \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \right) = \frac{\pi}{2} - 1
 \end{aligned}$$

56. Feladat:

$$\iint_T x^2 y \, dT = ?,$$

$$\text{ha } T : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0, x \geq 0$$

Megoldás.

Polártranszformációval dolgozunk:

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \int_{r=1}^2 r^2 \cos^2 \varphi r \sin \varphi r \, dr d\varphi = \int_{r=1}^2 r^4 dr \cdot \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \cos^2 \varphi \sin \varphi \, d\varphi = \\
 &= \frac{r^5}{5} \Big|_1^2 \cdot \left(-\frac{\cos^3 \varphi}{3} \right) \Big|_0^{\pi/2} = \left(0 + \frac{1}{3} \right) \left(\frac{2^5}{5} - \frac{1}{5} \right) = \frac{31}{15}
 \end{aligned}$$

57. Feladat:

$$\iint_T 4x y^3 \, dT = ?,$$

$$\text{ha } T : 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9, x \geq 0, y \geq \frac{x}{\sqrt{3}}$$

Megoldás.

...

58. Feladat:

$$\iint_T \frac{1}{(1 + 2x^2 + 2y^2)^5} \, dT = ?,$$

$$\text{ha } T : x^2 + y^2 \leq 4, x \leq 0$$

Megoldás.

Polártranszformációval dolgozunk:

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{r=0}^2 \int_{\varphi=\pi/2}^{3\pi/2} \frac{1}{(1 + 2r^2 \cos^2 \varphi + 2r^2 \sin^2 \varphi)^5} r \, d\varphi \, dr = \int_{r=0}^2 \int_{\varphi=\pi/2}^{3\pi/2} r (1 + 2r^2)^{-5} \, d\varphi \, dr = \\
 &= \left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \right) \int_{r=0}^2 \frac{1}{4} 4r (1 + 2r^2)^{-5} \, dr = \frac{\pi}{4} \left. \frac{(1 + 2r^2)^{-4}}{-4} \right|_0^2 = -\frac{\pi}{16} \left(\frac{1}{9^4} - 1 \right)
 \end{aligned}$$

59. Feladat:

$$\iint_T \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \, dx \, dy = ? \quad \text{ahol}$$

$$T : 4 \leq x^2 + y^2 \leq 25 \quad , \quad x \leq 0, \quad y \geq 0.$$

Megoldás.

...

60. Feladat:

Határozza meg annak a síkrésznek a területét, amelyet a következő egyenlőtlenségek írnak le!

$$x^2 + y^2 \geq 4x \quad , \quad x^2 + y^2 \leq 8x \quad , \quad y \leq \sqrt{3}x \quad , \quad y \geq x$$

Megoldás.

Polártranszformációval dolgozunk:

$$\begin{aligned}
 \text{terület} &= \iint_T 1 \, dT = \int_{\varphi=\pi/4}^{\pi/3} \int_{r=4 \cos \varphi}^{8 \cos \varphi} r \, dr \, d\varphi = \\
 &= \int_{\varphi=\pi/4}^{\pi/3} \left. \frac{r^2}{2} \right|_{4 \cos \varphi}^{8 \cos \varphi} d\varphi = 24 \int_{\varphi=\pi/4}^{\pi/3} \cos^2 \varphi \, d\varphi = \dots
 \end{aligned}$$

61. Feladat:

$$\iint_T f \, dT = ?,$$

ha $T : x^2 - 4x + y^2 \leq 0 \quad , \quad 0 \leq y$ és

a) $f(x, y) = y(x^2 + y^2)^3$

b) $f(x, y) = (x^2 - 4x + y^2)^5$

Megoldás.

a) $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $|J| = r$, $0 \leq r \leq 4 \cos \varphi$, $0 \leq \varphi \leq \pi/2$

$$I = \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \int_{r=0}^{4 \cos \varphi} r \sin \varphi (r^2)^3 r \, dr \, d\varphi = (\text{innen HF.}) = \frac{4^9}{90}$$

b) $x = 2 + r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $|J| = r$, $0 \leq r \leq 2$, $0 \leq \varphi \leq \pi$

$$x^2 - 4x + y^2 = (x - 2)^2 + y^2 - 4 = r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi - 4 = r^2 - 4$$

$$I = \int_{\varphi=0}^{\pi} \int_{r=0}^2 (r^2 - 4)^5 r \, dr \, d\varphi = \dots = -\frac{4^6 \pi}{12}$$

62. Feladat:

Számoljuk ki az R sugarú körlap területét!

Megoldás.

...

63. Feladat:

$$\iint_T e^{-x^2-y^2} \, dT = ?$$

a) $T: 1 \leq x^2 + y^2 \leq R^2$ b) $T: 1 \leq x^2 + y^2$

Megoldás.

...

3.8. Hármás integrál

64. Feladat:

$$I = \int_V xy^2z^3 \, dV = ?$$

A V korlátos térrész határai:

$$z = xy, (\text{felület}) \quad z = 0, \quad x = 1, \quad y = 0, \quad y = x \text{ (síkok)}$$

Megoldás.

$$\begin{aligned}
I &= \iiint_{\text{háromszög}} \int_{z=0}^{xy} xy^2 z^3 dz dy dx = \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^x \int_{z=0}^{xy} xy^2 z^3 dz dy dx = \\
&= \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^x xy^2 \left[\frac{z^4}{4} \right]_{z=0}^{z=xy} dy dx = \frac{1}{4} \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^x x^5 y^6 dy dx = \\
&\quad \frac{1}{4} \int_{x=0}^1 x^5 \left[\frac{y^7}{7} \right]_{y=0}^{y=x} dx = \frac{1}{4 \cdot 7} \int_{x=0}^1 x^{12} dx = \frac{1}{364}
\end{aligned}$$

65. Feladat:

$$I = \int_V \sqrt{x^2 + y^2} dV = ?$$

A V korlátos térrész határai:

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (\text{kúp}) \quad \text{és a} \quad z = 1 \quad (\text{sík})$$

Megoldás.

A térrész merőleges vetülete az (x, y) síkra az $x^2 + y^2 = 1, z = 0$ kör, a térrész hengerben van. Hengerkoordinátákkal dolgozunk.

Hengerkoordináták:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z, \quad r \geq 0, \quad \varphi \in [0, 2\pi)$$

A Jacobi determináns abszolútértéke: $|J| = r$

$$\begin{aligned}
I &= \iiint_{x^2+y^2 \leq 1} \int_{z=\sqrt{x^2+y^2}}^{z=1} \sqrt{x^2 + y^2} dz dT = \\
&\quad \int_0^{2\pi} \int_{r=0}^1 \int_{z=r}^{z=1} r \cdot |J| dz dr d\varphi = \\
&= \int_0^{2\pi} \int_{r=0}^1 \int_{z=r}^{z=1} r^2 dz dr d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_{r=0}^1 r^2 [z]_r^1 dr d\varphi = \\
&\quad = \int_0^{2\pi} \int_{r=0}^1 r^2 (1 - r) dr d\varphi = \dots = \frac{\pi}{6}
\end{aligned}$$

66. Feladat: Számolja ki az $x^2 + y^2 = 1$ egyenletű henger és a $z = 0$ valamint a $z = 2 - x - y$ egyenletű síkok által határolt térrész térfogatát!

Megoldás.

$$\begin{aligned}
V &= \iiint_V 1 dV = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \int_{z=0}^{z=2-x-y} 1 dz dT = \\
&\quad \int_0^{2\pi} \int_{r=0}^1 \int_{z=0}^{z=2-r \cos \varphi - r \sin \varphi} 1 \cdot |J| dz dr d\varphi =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \int_{r=0}^1 \int_{z=0}^{z=2-r\cos\varphi-r\sin\varphi} r \, dz \, dr \, d\varphi = \\ & \int_0^{2\pi} \int_{r=0}^1 [z]_{z=0}^{z=2-r\cos\varphi-r\sin\varphi} r \, dr \, d\varphi = \\ & \int_0^{2\pi} \int_{r=0}^1 (2-r\cos\varphi-r\sin\varphi) r \, dr \, d\varphi = \dots = 2\pi \end{aligned}$$

67. Feladat: Számolja ki a $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ és a $z = 6 - x^2 - y^2$ egyenletű felületek által határolt térrész térfogatát!

Megoldás.

A kúp és a paraboloid által határolt térrész merőleges vetülete az (x, y) síkra az $x^2 + y^2 = R^2, z = 0$ kör, a térrész hengerben van. Hengerkoordinátákkal dolgozunk.

A vetület a metszetgörbe vetülete, ezért az $\sqrt{x^2 + y^2} = 6 - x^2 - y^2$, azaz a $\sqrt{R^2} = 6 - R^2$ egyenletből számoljuk a vetületi kör sugarát: $R = 6 - R^2$, azaz $R = 2$ ($R = -3$ nem lehet a sugár).

$$\begin{aligned} V &= \iiint_V 1 \, dV = \iint_{x^2+y^2 \leq 4} \int_{z=\sqrt{x^2+y^2}}^{z=6-x^2-y^2} 1 \, dz \, dT = \\ & \int_0^{2\pi} \int_{r=0}^2 \int_{z=r}^{z=6-r^2} 1 \cdot |J| \, dz \, dr \, d\varphi = \\ & \int_0^{2\pi} \int_{r=0}^2 \int_{z=r}^{z=6-r^2} r \, dz \, dr \, d\varphi = \\ & \int_0^{2\pi} \int_{r=0}^2 [z]_{z=r}^{z=6-r^2} r \, dr \, d\varphi = \\ & \int_0^{2\pi} \int_{r=0}^2 (6-r^2-r) r \, dr \, d\varphi = \dots = 32\pi/3 \end{aligned}$$

68. Feladat:

$$I = \int_V xyz \, dV = ?$$

Ahol a V korlátos térrész az $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ gömb belsejének az $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ térfelcsebe eső része.

Megoldás.

Gömbi koordinátákkal dolgozunk.

Jelöljük az (x, y, z) pontba mutató helyvektor hosszát r -rel, a z tengely pozitív szárával bezárt szögét ϑ -val! Így $z = r \cos \vartheta$.

Legyen továbbá a helyvektor (x, y) síkra való merőleges vetületének az x tengely pozitív szárával bezárt szöge φ . A helyvektor (x, y) síkra való merőleges vetületének a hossza $r \sin \vartheta$, így $x = r \sin \vartheta \cos \varphi, y = r \sin \vartheta \sin \varphi$.

A geometriai megfontolásból kapjuk, hogy $0 \leq r \leq 1, 0 \leq \varphi < \pi/2, 0 \leq \vartheta \leq \pi/2$.

A gömbi koordinátákhoz tartozó Jacobi determináns abszolútértéke $|J| = r^2 \sin \vartheta$.

$$\begin{aligned}
I &= \iiint_V xyz \, dV = \iint_{x^2+y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0} \int_{z=0}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} xyz \, dz \, dT = \\
&\int_{\varphi=0}^{\pi/2} \int_{r=0}^1 \int_{\vartheta=0}^{\pi/2} (r \sin \vartheta \cos \varphi \, r \sin \vartheta \sin \varphi \, r \cos \vartheta) \cdot |J| \, d\vartheta \, dr \, d\varphi = \\
&\int_{\varphi=0}^{\pi/2} \int_{r=0}^1 \int_{\vartheta=0}^{\pi/2} (r \sin \vartheta \cos \varphi \, r \sin \vartheta \sin \varphi \, r \cos \vartheta) r^2 \sin \vartheta \, d\vartheta \, dr \, d\varphi = \\
&\int_{\varphi=0}^{\pi/2} \int_{r=0}^1 \int_{\vartheta=0}^{\pi/2} r^5 \sin^3 \vartheta \cos \vartheta \cos \varphi \sin \varphi \, d\vartheta \, dr \, d\varphi = \\
&\int_{\varphi=0}^{\pi/2} \cos \varphi \sin \varphi \, d\varphi \int_{r=0}^1 r^5 \, dr \int_{\vartheta=0}^{\pi/2} \sin^3 \vartheta \cos \vartheta \, d\vartheta = \\
&= \left[\frac{\sin^2 \varphi}{2} \right]_0^{\pi/2} \left[\frac{r^6}{6} \right]_0^1 \left[\frac{\sin^4 \vartheta}{4} \right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{48}
\end{aligned}$$

69. Feladat: Számolja ki az $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ és a $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{3} \sqrt{x^2 + y^2}$ egyenlőtlenségekkel jellemzett térrész térfogatát!

Megoldás. A térrész az egységgömbben van. Gömbkoordinátákkal dolgozunk.

A $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ kúpfelületnél : $\vartheta = \pi/4$,

a $z = \sqrt{3} \sqrt{x^2 + y^2}$ kúpfelületnél pedig: $\vartheta = \pi/6$.

$$\begin{aligned}
V &= \iiint_V 1 \, dV = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^1 \int_{\vartheta=\pi/6}^{\pi/4} r^2 \sin \vartheta \, d\vartheta \, dr \, d\varphi = \\
&= 2\pi \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^1 \left[-\cos \vartheta \right]_{\pi/6}^{\pi/4} = \frac{2\pi}{3} \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

70. Feladat: Számolja ki a $(x-2)^2 + y^2 = 4$ egyenletű henger és a $z=0$ sík valamint a $z = x^2 + y^2$ egyenletű paraboloid által határolt térrész térfogatát!

71. Feladat:

$$I = \int_V 2z \, dV = ?$$

Ahol a V korlátos térrész az $z \leq 3 - \sqrt{x^2 + y^2}$ és a $z \geq 2$ egyenlőtlenségekkel jellemzett.

72. Feladat:

$$I = \int_V xy^2 z^3 \, dV = ?$$

Ahol a V korlátos térrész az $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$ és a $z \geq \sqrt{3x^2 + 3y^2}$ egyenlőtlenségekkel jellemzett. (Gömbi trafo.)

73. Feladat:

$$I = \int_V x^2 z \, dV = ?$$

Ahol a V korlátos térrész az $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ és a $z \geq \frac{x^2 + y^2}{3}$ egyenlőtlenségekkel jellemzett. (Henger trafo.)

74. Feladat: Számoljuk ki az R sugarú gömb térfogatát!

75. Feladat: Írjuk föl és számoljuk ki az R sugarú, m tömegű, homogén gömb tehetetlenségi nyomatékát tetszőleges, középpontján átmenő tengelyre vonatkoztatva!

76. Feladat: Írjuk föl és számoljuk ki az R sugarú, m tömegű henger tehetetlenségi nyomatékát az alkotóival párhuzamos szimmetriatengelyére vonatkoztatva!

4. Komplex függvénytan

4.1. Cauchy–Riemann egyenletek, differenciálhatóság, regularitás, harmonikus társ

1. Feladat:

$$v(x, y) = cx^2 + 2xy - 4y^2 + 3$$

a) Adja meg a c paraméter értékét úgy, hogy $v(x, y)$ egy, az egész komplex számsíkon reguláris $f(z)$ komplex-változós függvény képzetes része legyen! ($c \in \mathbb{R}$)

b) $f'(1 - 2j) = ?$

Megoldás.

a) $\Delta v = v''_{xx} + v''_{yy} = 0$ -nak kell teljesülni.

$$\begin{aligned} v'_x &= 2cx + 2y, & v''_{xx} &= 2c \\ v'_y &= 2x - 8y, & v''_{yy} &= -8 \end{aligned}$$

Tehát $\Delta v = 2c - 8 = 0$, ahonnan $c = 4$.

b)

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= u'_x(x_0, y_0) + jv'_x(x_0, y_0) = v'_y(x_0, y_0) + jv'_x(x_0, y_0) \\ f'(1 - 2j) &= v'_y(1, -2) + jv'_x(1, -2) = (2x - 8y + j(8x + 2y)) \Big|_{(1, -2)} = 18 + 4j \end{aligned}$$

2. Feladat: Hol differenciálható, és hol reguláris az $f(z) = z^2 \operatorname{Re}(z)$ függvény?

Megoldás.

$$f(z) = (x^2 - y^2 + 2jxy)x = \underbrace{x^3 - xy^2}_{u(x,y)} + j \underbrace{2x^2y}_{v(x,y)}$$

ahonnan

$$\begin{aligned} u'_x &= 3x^2 - y^2, & v'_x &= 4xy, \\ u'_y &= -2xy, & v'_y &= 2x^2. \end{aligned}$$

A parciális deriváltak mindenütt folytonosak, tehát az $u(x, y)$, $v(x, y)$ függvények mindenütt totálisan differenciálhatók. A Cauchy–Riemann egyenletek és megoldásuk:

$$\begin{aligned} 3x^2 - y^2 &= 2x^2 & \text{és} & & 4xy &= 2xy \\ x^2 - y^2 &= 0 & & & 2xy &= 0 \\ |x| &= |y| & & & x &= 0 \text{ vagy } y = 0. \end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy a függvény csak az origóban differenciálható, és sehol sem reguláris.

3. Feladat:

$$u(x, y) = 2x^3 - 6xy^2 + 5x - 2y$$

Igazolja, hogy az $u(x, y)$ kétváltozós függvény az egész \mathbb{R}^2 síkon harmonikus függvény, és keresse meg a $v(x, y)$ harmonikus társfüggvényét, amellyel együtt az $f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$ függvény az egész komplex síkon reguláris komplex függvény. ($z = x + jy$)

Megoldás. Az u parciális deriváltjai:

$$\begin{aligned} u'_x &= 6x^2 - 6y^2 + 5, & u''_{xx} &= 12x, \\ u'_y &= -12xy - 2, & u''_{yy} &= -12x, \end{aligned}$$

tehát $\Delta u = u''_{xx} + u''_{yy} = 0$ az egész síkon.

A keresett $v(x, y)$ -nek ismerjük a parciális deriváltjait:

$$v'_x = -u'_y = 12xy + 2, \quad v'_y = u'_x = 6x^2 - 6y^2 + 5.$$

Az első egyenletet x szerint integrálva, majd az eredményt y szerint deriválva:

$$\begin{aligned} v(x, y) &= \int (12xy + 2) dx = 6x^2y + 2x + C(y), \\ v'_y &= 6x^2 + C'(y) \end{aligned}$$

Ezt összevetve v'_y eredeti alakjával,

$$C'(y) = -6y^2 + 5, \quad \text{ahonnan} \quad C(y) = \int (-6y^2 + 5) dy = -2y^3 + 5y + c.$$

Tehát

$$\begin{aligned} v(x, y) &= 6x^2y + 2x - 2y^3 + 5y + c, & (c \in \mathbb{R}) \\ f(z) &= 2x^3 - 6xy^2 + 5x - 2y + j(6x^2y + 2x - 2y^3 + 5y + c) & (z = x + jy) \end{aligned}$$

Eljárhatunk fordított sorrendben is, először v'_y -t integráljuk y szerint:

$$\begin{aligned} v(x, y) &= \int (6x^2 - 6y^2 + 5) dy = 6x^2y - 2y^3 + 5y + C(x), \\ v'_x &= 12xy + C'(x) \end{aligned}$$

Ekkor $C'(x) = 2$, tehát $C(x) = 2x + c$ ($c \in \mathbb{R}$).

4. Feladat: Hol differenciálható, és hol reguláris a következő függvény:

$$f(z) = \operatorname{ch}(\overline{2z})$$

Megoldás.

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}(\overline{2z}) &= \operatorname{ch}(2x - j2y) = \operatorname{ch}(2x) \operatorname{ch}(j2y) - \operatorname{sh}(2x) \operatorname{sh}(j2y) = \\ &= \operatorname{ch}(2x) \cos(2y) - j \operatorname{sh}(2x) \sin(2y). \end{aligned}$$

Tehát a függvény valós és képzetes része:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \operatorname{ch}(2x) \cos(2y), \\ v(x, y) &= -\operatorname{sh}(2x) \sin(2y). \end{aligned}$$

Látható, hogy u és v a teljes \mathbb{R}^2 síkon totálisan differenciálható, mivel a parciális deriváltjaik léteznek és folytonosak mindenütt. A parciális deriváltak:

$$\begin{aligned} u'_x &= 2 \operatorname{sh}(2x) \cos(2y), & v'_x &= -2 \operatorname{ch}(2x) \sin(2y), \\ u'_y &= -2 \operatorname{ch}(2x) \sin(2y), & v'_y &= -2 \operatorname{sh}(2x) \cos(2y). \end{aligned}$$

A Cauchy–Riemann egyenletek:

$$\begin{aligned} u'_x &= v'_y, & 2 \operatorname{sh}(2x) \cos(2y) &= -2 \operatorname{sh}(2x) \cos(2y), \\ u'_y &= -v'_x, & -2 \operatorname{ch}(2x) \sin(2y) &= 2 \operatorname{ch}(2x) \sin(2y). \end{aligned}$$

A második egyenletből:

$$\operatorname{ch}(2x) \sin(2y) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin(2y) = 0 \quad \Rightarrow \quad y = k \frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Ezt felhasználva az első egyenletből $\operatorname{sh}(2x) = 0$, azaz $x = 0$ adódik.

Tehát az $f(z)$ függvény a $jk\frac{\pi}{2}$ pontokban ($k \in \mathbb{Z}$) differenciálható, és sehol sem reguláris.

4.2. Elemi függvények, egyenletek megoldása

5. Feladat:

$$z = e^{2-3j}, \quad \operatorname{Re} z = ?, \quad \operatorname{Im} z = ?, \quad |z| = ?, \quad \operatorname{arc} z = ?, \quad \bar{z} = ?$$

Megoldás.

$$z = e^2 e^{-3j} = e^2 (\cos 3 - j \sin 3) = e^2 \cos 3 + j(-e^2 \sin 3),$$

tehát

$$\operatorname{Re} z = e^2 \cos 3, \quad \operatorname{Im} z = -e^2 \sin 3, \quad |z| = e^2, \quad \operatorname{arc} z = -3, \quad \bar{z} = e^{2+3j}.$$

6. Feladat:

$$\begin{aligned} a) \quad \ln(-\sqrt{3} + j) &= ? & b) \quad \ln(-3j) &= ? & c) \quad \operatorname{Ln}(-3j) &= ? \\ d) \quad \ln(-e) &= ? & e) \quad (\sqrt{2} - j\sqrt{2})^j &= ? \end{aligned}$$

Megoldás. Emlékeztetőül:

$$\begin{aligned} \ln z &= \ln |z| + j \operatorname{arc} z, & -\pi &\leq \operatorname{arc} z < \pi, \\ \operatorname{Ln} z &= \ln |z| + j(\operatorname{arc} z + 2k\pi), & k &\in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$a) \quad \ln(-\sqrt{3} + j) = \ln 2 + j \frac{5\pi}{6}.$$

$$b) \quad \ln(-3j) = \ln 3 - j \frac{\pi}{2}.$$

$$c) \quad \operatorname{Ln}(-3j) = \ln 3 + j \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right), \text{ ahol } k \in \mathbb{Z}.$$

$$d) \quad \ln(-e) = 1 - j\pi.$$

$$e) \quad (\sqrt{2} - j\sqrt{2})^j = e^{j \ln(\sqrt{2} - j\sqrt{2})} = e^{j(\ln 2 - j\frac{\pi}{4})} = e^{\frac{\pi}{4}} \cdot e^{j \ln 2} = e^{\frac{\pi}{4}} (\cos \ln 2 + j \sin \ln 2).$$

7. Feladat:

$$a) \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} + j\pi\right) = ? \quad b) \quad \cos(1 + 2j) = ? \quad c) \quad \operatorname{sh}(1 + 6j) = ?$$

Megoldás. Emlékeztetőül:

$$\begin{aligned}\sin(jx) &= j \operatorname{sh} x, & \operatorname{sh}(jx) &= j \sin x \\ \cos(jx) &= \operatorname{ch} x, & \operatorname{ch}(jx) &= \cos x.\end{aligned}$$

a)

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + j\pi\right) = \underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{=1} \underbrace{\cos(j\pi)}_{\operatorname{ch}\pi} + \underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{=0} \underbrace{\sin(j\pi)}_{j \operatorname{sh}\pi} = \operatorname{ch}\pi.$$

Tehát

$$\operatorname{Re}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} + j\pi\right)\right) = \operatorname{ch}\pi, \quad \operatorname{Im}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} + j\pi\right)\right) = 0.$$

b)

$$\cos(1 + 2j) = \cos 1 \underbrace{\cos 2j}_{\operatorname{ch} 2} - \sin 1 \underbrace{\sin 2j}_{j \operatorname{sh} 2} = \cos 1 \operatorname{ch} 2 - j \sin 1 \operatorname{sh} 2.$$

c)

$$\operatorname{sh}(1 + 6j) = \operatorname{sh} 1 \underbrace{\operatorname{ch} 6j}_{\cos 6} + \operatorname{ch} 1 \underbrace{\operatorname{sh} 6j}_{j \sin 6} = \operatorname{sh} 1 \cos 6 + j \operatorname{ch} 1 \sin 6.$$

8. Feladat: Oldjuk meg az $e^{j\bar{z}} + 5 = 0$ egyenletet!

Megoldás.

$$\begin{aligned}e^{j\bar{z}} &= -5 \\ j\bar{z} &= \operatorname{Ln}(-5) = \ln 5 + j(-\pi + 2k\pi), \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \bar{z} &= -\pi + 2k\pi - j \ln 5 \\ z &= -\pi + 2k\pi + j \ln 5\end{aligned}$$

9. Feladat: Keresse meg az

$$f(z) = \frac{1}{\sin(2z) + 3j}$$

izolált szinguláris pontjait!

Megoldás. Mivel a nevező mindenütt reguláris, így a szinguláris pontok a nevező zérushelyei:

$$\begin{aligned}\sin(2z) + 3j &= 0, & \text{felhasználjuk, hogy } \sin x &= \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j} \\ \frac{e^{2jz} - e^{-2jz}}{2j} + 3j &= 0, & / \cdot 2j \\ e^{2jz} - e^{-2jz} - 6 &= 0, & a := e^{2jz} \\ a - \frac{1}{a} - 6 &= 0, & / \cdot a \\ a^2 - 6a - 1 &= 0, & a_{1,2} = 3 \pm \sqrt{10} \\ 2jz &= \operatorname{Ln}(3 \pm \sqrt{10}).\end{aligned}$$

A két gyököt külön kezeljük:

$$\begin{aligned} 2jz_1 &= \operatorname{Ln}(3 + \sqrt{10}) & 2jz_2 &= \operatorname{Ln}(3 - \sqrt{10}) \\ 2jz_1 &= \ln(3 + \sqrt{10}) + j2k\pi & 2jz_2 &= \ln|3 - \sqrt{10}| + j(-\pi + 2k\pi) \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ z_1 &= k\pi - \frac{j}{2} \ln(3 + \sqrt{10}) & z_2 &= \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi\right) - \frac{j}{2} \ln(\sqrt{10} - 3) \end{aligned}$$

10. Feladat: Keresse meg az $f(z) = \operatorname{sh} z$ függvény nullhelyeit!

1. Megoldás.

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \frac{1}{2} \left(e^z - \frac{1}{e^z} \right) = 0,$$

tehát $e^{2z} = 1$, ahonnan

$$\begin{aligned} 2z &= \operatorname{Ln} 1 = \ln 1 + j(0 + 2k\pi) = j2k\pi, \\ z &= jk\pi, \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

2. Megoldás.

$$\operatorname{sh} z = \operatorname{sh}(x + jy) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch}(jy) + \operatorname{ch} x \operatorname{sh}(jy) = \operatorname{sh} x \cos y + j \operatorname{ch} x \sin y = 0,$$

ami azt jelenti, hogy külön a valós és a képzetes rész is nulla:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \operatorname{sh} x \cos y = 0, \\ v(x, y) &= \operatorname{ch} x \sin y = 0. \end{aligned}$$

A második egyenletben $\operatorname{ch} x \neq 0$, így $\sin y = 0$, tehát $y = k\pi$ (ahol $k \in \mathbb{Z}$). Ez pedig azt jelenti, hogy $\cos y \neq 0$, tehát az első egyenletből $\operatorname{sh} x = 0$, azaz $x = 0$ következik. Tehát a megoldás:

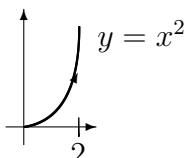
$$z = jk\pi, \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

4.3. Komplex vonalintegrál

Zh-n az egyértelműség kedvéért mindig az integrálok valós és képzetes részét szoktuk kérdezni. Ezért az eredményt mindig algebrai alakban adjuk meg!

11. Feladat:

$\int_L \bar{z}^2 dz = ?$

$L :$


Megoldás.

A függvény nem reguláris, ezért a következő tétel felhasználásával oldjuk meg a feladatot:

$L: z(t) = x(t) + jy(t)$ vagy $z(t) = r(t)e^{j\varphi(t)}$, $z \in C_{[\alpha, \beta]}^1$,
 f folytonos L -en

$$\int_L f(z) dz = \int_\alpha^\beta f(z(t)) \dot{z}(t) dt = \int_\alpha^\beta f(z(t)) z'(t) dt$$

$x := t \implies y = t^2$. Tehát

$$\begin{aligned} z(t) &= t + jt^2, & 0 \leq t \leq 2 \\ \dot{z}(t) &= 1 + j2t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_L \bar{z}^2 dz &= \int_L (x - jy)^2 dz = \int_L (x^2 - y^2 - j2xy) dz = \\ &= \int_0^2 (t^2 - t^4 - j2t^3)(1 + j2t) dt = \dots = \int_0^2 (t^2 + 3t^4 - j2t^5) dt = \\ &= \left. \frac{t^3}{3} + \frac{3t^5}{5} - j\frac{2t^6}{6} \right|_0^2 = \dots = \frac{328}{15} - j\frac{64}{3} \end{aligned}$$

12. Feladat:

$$I = \int_L (\operatorname{Im} 2\bar{z} - \operatorname{sh} 5z) dz = ? \quad L: \begin{array}{c} \nearrow 2j \\ \text{---} -1 \end{array}$$

Megoldás.

$$y = 2x + 2 \implies z(t) = t + j(2t + 2), \quad t \in [-1, 0], \quad \dot{z}(t) = 1 + j2$$

$$I = \int_L \operatorname{Im} 2\bar{z} dz + \int_L \operatorname{sh} 5z dz = I_1 + I_2$$

I_1 integrandusza sehol sem reguláris, így csak az előző tétellel dolgozhatunk, I_2 integrandusza az egész síkon reguláris, így értéke csak a kezdő és végponttól függ (a Newton-Leibniz tétellel dolgozunk itt).

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_L -2y dz = -2 \int_{-1}^0 (2t + 2)(1 + j2) dt = -2(1 + j2)(t^2 + 2t) \Big|_{-1}^0 = \\ &= \dots = -2 - 4j \end{aligned}$$

$$I_2 = \int_L \operatorname{sh} 5z dz = \frac{1}{5} \operatorname{ch} 5z \Big|_{-1}^{2j} = \frac{1}{5} (\operatorname{ch} 10j - \operatorname{ch}(-5)) = \frac{1}{5} (\cos 10 - \operatorname{ch} 5)$$

$$\operatorname{Re} I = -2 + \frac{1}{5} (\cos 10 - \operatorname{ch} 5), \quad \operatorname{Im} I = -4$$

13. Feladat:

$$\oint_{|z|=2} \left(\frac{1}{jz} + z \cos z \right) dz = ?$$

Megoldás.

$$I = \oint_{|z|=2} \frac{1}{jz} dz + \oint_{|z|=2} z \cos z dz = I_1 + I_2$$

I_1 integrandusza nem reguláris, ezért itt paraméterezéssel dolgozunk:

$$z(t) = 2e^{jt} \quad (= 2 \cos t + j 2 \sin t); \quad 0 \leq t \leq 2\pi; \quad \dot{z}(t) = 2j e^{jt}$$

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \frac{1}{-j 2 e^{-jt}} 2j e^{jt} dt = - \int_0^{2\pi} e^{j2t} dt = - \left. \frac{e^{j2t}}{j2} \right|_0^{2\pi} = - \frac{1}{j2} (e^{j4\pi} - 1) = 0$$

$I_2 = 0$: a Cauchy-Goursat tétel miatt

(Az integrandusz mindenütt reguláris, a görbe zárt).

Így $I = 0$.

4.4. Cauchy-féle integrálformulák

A Cauchy-féle integrálformulák:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi j} \oint_L \frac{f(z)}{z - z_0} dz \quad \text{és}$$

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi j} \oint_L \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

Feltételek: f a T egyszeresen összefüggő tartományon reguláris, $L \subset T$ egyszerű, zárt görbe, és L egyszer kerüli meg pozitív irányban a $z_0 \in T$ pontot.

14. Feladat:

$$\oint_L \underbrace{\frac{\ln z}{z - j}}_{g(z)} dz = ? \quad L : \quad \begin{array}{l} \text{a) } |z - 5 + j| = 1 \\ \text{b) } |z - 2j| = 1,5 \end{array}$$

Megoldás.

a) g reguláris a $|z - 5 + j| = 1$ ($a = 5 - j$ középpontú, $r = 1$ sugarú) kört magába foglaló T_1 egyszeresen összefüggő tartományon (1.a ábra), ezért a Cauchy-Goursat tétel miatt az integrál 0.

b) A Cauchy-féle integrálformulát kell alkalmazni, mert a $z_0 = j$ szingularitás a $2j$ középpontú, $1,5$ sugarú kör belsejébe esik.

$f(z) = \ln z$ reguláris a T_2 egyszeresen összefüggő tartományon (1.b ábra), $z_0 = j$.

$$I_2 = 2\pi j \ln z|_{z=j} = 2\pi j \ln j = 2\pi j \left(\ln 1 + j \frac{\pi}{2} \right) = -\pi^2$$

$$\implies I = -\pi^2$$

15. Feladat:

$$I(R) = \oint_{|z-j\pi|=R} \underbrace{\frac{\operatorname{ch}^6 z}{z - j\frac{\pi}{3}}}_{g(z)} dz = ? \quad R > 0$$

Adja meg $I(R)$ értékét R függvényében!

Megoldás.

g -nek csak a $j\frac{\pi}{3}$ pontban van szingularitása.

$$I(R) = \begin{cases} 0, & \text{ha } 0 < R < \frac{2\pi}{3} \\ \text{nem értelmezett,} & \text{ha } R = \frac{2\pi}{3} \\ j\frac{\pi}{32}, & \text{ha } R > \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

Ugyanis, ha $R < \frac{2\pi}{3}$, a g függvény reguláris a T_1 egyszeresen összefüggő tartományon, ezért a Cauchy-féle alaptétel miatt az integrál 0.

Ha $R = \frac{2\pi}{3}$, az integrál nem értelmezett, mert g szingularitása a görbére esik.

Ha $R > \frac{2\pi}{3}$, akkor a szingularitás a görbe belsejében van és a T_2 egyszeresen összefüggő tartományon alkalmazható a Cauchy-féle integrálformula:

$f(z) = \operatorname{ch}^6 z$ reguláris T_2 -ön, $z_0 = j\frac{\pi}{3}$, így

$$I(R) = 2\pi j \operatorname{ch}^6 z \Big|_{z=j\frac{\pi}{3}} = 2\pi j \left(\underbrace{\operatorname{ch} j\frac{\pi}{3}}_{=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}} \right)^6 = 2\pi j \frac{1}{2^6} = j\frac{\pi}{32}$$

16. Feladat:

$$\oint_{|z-2|=2} \underbrace{\frac{\sin jz}{z^2-1}}_{g(z)} dz = ?$$

Megoldás.

g izolált szingularitásai (a nevező nullahelyei): $z = 1$ és $z = -1$.

Ezek közül csak a $z = 1$ esik a görbe belsejébe.

$$I = \oint_{|z-2|=2} \frac{\sin jz}{z-1} dz$$

Az egyszeresen összefüggő T tartományon alkalmazható a Cauchy-féle integrálformula:

$f(z) = \frac{\sin jz}{z+1}$ reguláris T -n, $z_0 = 1$, így

$$I = 2\pi j \frac{\sin jz}{z+1} \Big|_{z=1} = 2\pi j \frac{\sin j}{2} = \pi j j \operatorname{sh} 1 = -\pi \operatorname{sh} 1$$

17. Feladat:

$$\oint_L \underbrace{\frac{z^4 e^{\pi z}}{z^2 + 4}}_{g(z)} dz = ? , \quad L : |z| = 4$$

Megoldás.

g izolált szingularitásai (a nevező nullahelyei) : $z = 2j$ és $z = -2j$.

Mindkettő a görbe belsejébe esik. A Cauchy-féle alaptétel következményei között szereplő egyik tétel értelmében:

$$I = \oint_L g(z) dz = \oint_{L_1} g(z) dz + \oint_{L_2} g(z) dz = I_1 + I_2$$

Mindkét integrál meghatározására a Cauchy-féle integrálformulát alkalmazzuk:

$$I_1 = \oint_{L_1} \frac{z^4 e^{\pi z}}{z-2j} dz = 2\pi j \frac{z^4 e^{\pi z}}{z+2j} \Big|_{z=2j} = \dots = 8\pi$$

Most $f(z) = \frac{z^4 e^{\pi z}}{z+2j}$, mely reguláris T_1 -en, $z_0 = 2j$.

Hasonlóan

$$I_2 = \oint_{L_2} \frac{z^4 e^{\pi z}}{z+2j} dz = 2\pi j \frac{z^4 e^{\pi z}}{z-2j} \Big|_{z=-2j} = \dots = -8\pi$$

Most $f(z) = \frac{z^4 e^{\pi z}}{z-2j}$, mely reguláris T_2 -ön, $z_0 = -2j$.

$\implies I = 0$.

Vegyük észre, hogy nem csak reguláris függvény zárt görbe mentén vett integrálja lehet 0.

18. Feladat:

$$\oint_{|\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z| = 2} \underbrace{\frac{\operatorname{sh} 3z}{\left(z - j \frac{\pi}{3}\right)^3}}_{g(z)} dz = ?$$

Megoldás.

Most az általánosított integrálformulát kell alkalmaznunk.

$f(z) = \operatorname{sh} 3z$, mindenütt reguláris, így a berajzolt T -n is. $z_0 = j \frac{\pi}{3}$, $n+1 = 3$, ezért $n = 2$.

$$I = \frac{2\pi j}{2!} (\operatorname{sh} 3z)'' \Big|_{z=j \frac{\pi}{3}} = \pi j 3^2 \underbrace{\operatorname{sh} \left(3j \frac{\pi}{3}\right)}_{=j \sin \pi = 0} = 0$$

19. Feladat:

$$\oint_{|z|=3} \underbrace{\frac{\sin z}{z(z-j)^2}}_{g(z)} dz = ?$$

Megoldás.

g izolált szingularitásai (a nevező nullahelyei) : $z = 0$ és $z = j$.
Mindkettő a görbe belsejébe esik.

$$\begin{aligned} I &= \oint_L g(z) dz = \oint_{L_1} g(z) dz + \oint_{L_2} g(z) dz \\ I &= \oint_{L_1} \frac{\sin z}{z(z-j)^2} dz + \oint_{L_2} \frac{\sin z}{z(z-j)^2} dz = \\ &= 2\pi j \left. \frac{\sin z}{(z-j)^2} \right|_{z=0} + \frac{2\pi j}{1!} \left(\frac{\sin z}{z} \right)' \Big|_{z=j} = 0 + 2\pi j \left. \frac{z \cos z - \sin z}{z^2} \right|_{z=j} = \\ &= \dots = 2\pi (\operatorname{ch} 1 - \operatorname{sh} 1) \end{aligned}$$

(Az f szerepét játszó függvények regulárisak a berajzolt T_1 , illetve T_2 tartományokon.)

20. Feladat:

$$\oint_{|z-j|=3} \underbrace{\frac{e^{j2z}}{(z-5)z^2(z-3j)}}_{g(z)} dz = ?$$

Megoldás.

g izolált szingularitásai (a nevező nullahelyei) : $z = 0$, $z = 3j$ és $z = 5$.
Ebből $z = 5$ nem esik a görbébe ($a = j$ középpotú $r = 3$ sugarú kör).

$$I = \oint_{L_1} \frac{e^{j2z}}{(z-5)z^2} dz + \oint_{L_2} \frac{e^{j2z}}{z-3j} dz = \dots$$