

**Valószínűségszámítás vizsga**  
**2016. június 15.**

1. Egy 52 lapos francia kártyakötegből kihúzzunk egy lapot. A lapok értéke: *kettes*=2, *hármás*=3, ..., *tíz*=10, *J*=11, *Q*=12, *K*=13, *A*=1, a Legyen  $X$  a kihúzott lap értéke. Számolja ki az  $F_X(3\pi)$  értéket,  $X$  várható értékét és szórását!

*Megoldás:*  $F_X(3\pi) = \mathbf{P}(X < 3\pi) = \frac{36}{52} = 0,69231$

$$\mathbf{E}X = \frac{1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13}{13} = 7, \mathbf{E}X^2 = \frac{1+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2+8^2+9^2+10^2+11^2+12^2+13^2}{13} = 63$$

$$\sigma^2 X = 63 - 49 = 14 \Rightarrow \sigma X = \sqrt{14} = 3.,7417$$

2. Az első dobozban 6 piros és 1 fekete, a másodikban 8 piros és 1 fekete golyó van. Addig húzzunk a dobozokból visszatevés nélkül, amíg feketét nem kapunk. Jelölje  $X$  az első dobozban az első feketéig tartó húzás számot,  $Y$  pedig a második dobozból húzásnál az első fekete húzásig tartó húzás számot. Mekkora valószínűsége van annak, hogy  $Y$  egyenlő lesz  $X$ -szel?

*Megoldás:*

$$R_X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}, R_Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}. \mathbf{P}(Y = X) = \sum_{i=1}^7 \mathbf{P}(Y = i) \cdot \mathbf{P}(X = i) = \sum_{i=1}^7 \frac{1}{63} = \frac{9}{63} = \frac{1}{9} = 0.111111$$

$$\mathbf{P}(Y = i) = \frac{1}{9}, \mathbf{P}(X = i) = \frac{1}{7}$$

3. Egy dobozban 6 piros és 4 fehér golyó van. Egyszerre kiveszünk 5 golyót a dobozból. Jelölje  $X$  a piros,  $Y$  pedig a fehér golyók számát a kivett golyók között. Adja meg  $X$  és  $Y$  együttes eloszlását és a korrelációs együtthatót!

*Megoldás:*

$\backslash X$ $Y \backslash$	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	$\frac{\binom{6}{5}\binom{4}{0}}{\binom{10}{5}}$
1	0	0	0	$\frac{\binom{6}{4}\binom{4}{1}}{\binom{10}{5}}$	0
2	0	0	$\frac{\binom{6}{3}\binom{4}{2}}{\binom{10}{5}}$	0	0
3	0	$\frac{\binom{6}{2}\binom{4}{3}}{\binom{10}{5}}$	0	0	0
4	$\frac{\binom{6}{1}\binom{4}{4}}{\binom{10}{5}}$	0	0	0	0

Mivel  $Y = 5 - X$ , így a korrelációs együttható -1.

4. Háromszor dobunk fel egy szabályos pénzdarabot. Jelentse  $A$  azt az eseményt, hogy a dobások között fej és írás is előfordul,  $B$  pedig azt az eseményt, hogy legfeljebb egy írás fordul elő. Állapítsuk meg, független-e  $A$  és  $B$ !

*Megoldás:*  $\mathbf{P}(A) = \frac{3}{4}, \mathbf{P}(B) = \frac{1}{2}, \mathbf{P}(AB) = \frac{3}{8} \Rightarrow A, B$  függetlenek!

5. Legyenek  $X \in N(5, 2)$  és  $Y \in N(4, 3)$  függetlenek. Legyen  $Z = X - Y$ . Adja meg  $Z$  eloszlását. Számolja ki az  $\mathbf{E}(Z | X)$  feltételes várható értéket.

*Megoldás:* Tanult tétel szerint  $Z \in N(1, \sqrt{13})$ .  $\mathbf{E}(Z | X) = \mathbf{E}(X - Y | X) = X - \mathbf{E}Y = X - 4$ .