Menedzsment és vállalkozásgazdaságtan

Pénzügyek Tanszék

BME

2. Tőkejavak árazódása

BME

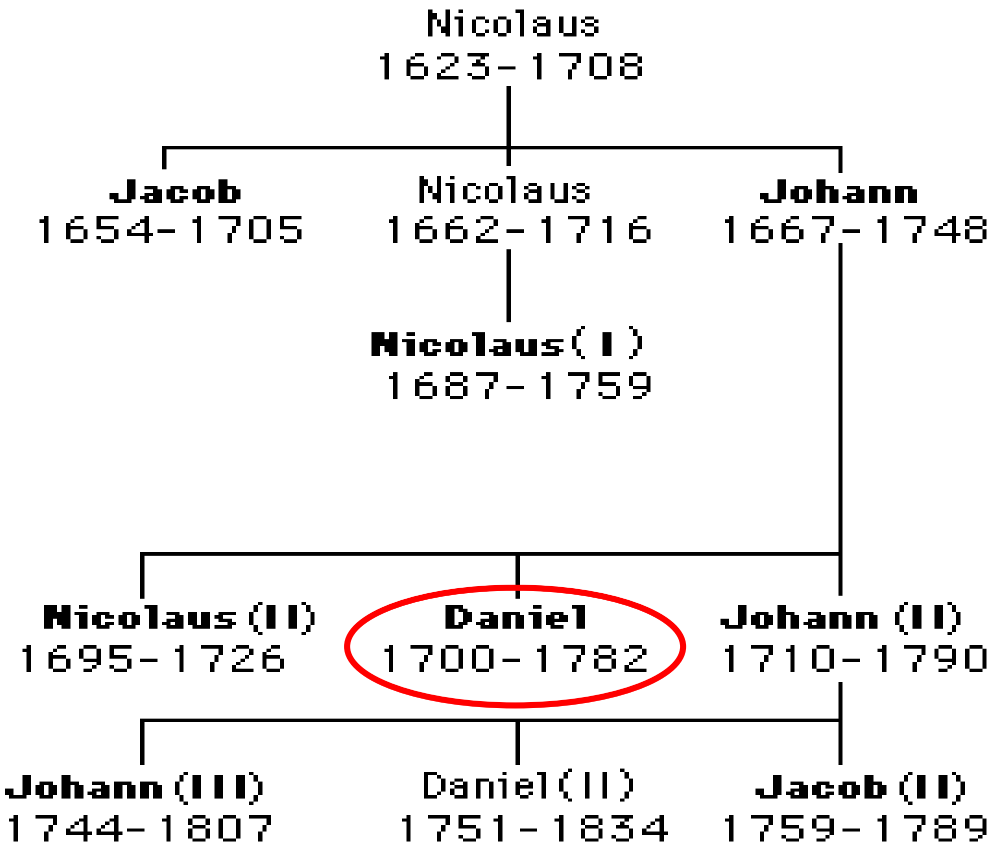
- Tőkejavak árazódási modellje vagy Tőkepiaci árfolyamok modellje
  - *Capital Asset Pricing Model*
  - *CAPM*
- Visszakanyarodunk az idő- és kockázatdiszkontálás témaköréhez
  - Kockázat, kockázatkerülés, biztos hozam-egyenértékes, kockázati hozamprémium stb.

Várható hasznosság modellje

BME

- Bernoulli
  - A döntéshozó az egyes kimeneteleket nem a (várható) „matematikai” értékük szerint, hanem a (várható) hasznosságuk szerint súlyozva minősíti.
  - A döntési modellben tehát a várható hasznosság jelenik meg a várható értékkel szemben.
  - Ez a csökkenő határhasznosság elve miatt jelent alapvetően más megközelítést.
    - *„A vagyon növekményének hasznossága fordított arányban lesz a már korábban birtokolt javak mennyiségével.”*
    - *„Figyelembe véve az emberi természetet, úgy vélem, hogy a fenti hipotézis sokakra látszik érvényesnek.”*

DANIEL BERNOULLI



SZENTPÉTERVÁRI PARADOXON

Egy érmét addig dobálunk fel, amíg (például) fejet nem kapunk.

A nyeremény összege 2 azon hatványa, ahányadikra sikerült fejet dobnunk.

$$p_i = \frac{1}{2^i}, \quad x_i = 2^i$$

Egy ilyen játék várható értéke (várható nyereménye) végtelen:

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i \cdot x_i = 1 + 1 + 1 + \ldots = \infty$$

Az emberek viszont nem hajlandóak e játék lehetőségéért sokat fizetni…

Hogyan magyarázná meg mindezt a várható hasznosság modelljével?

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i U(x_i) = \frac{1}{2} U(2) + \frac{1}{4} U(4) + \frac{1}{8} U(8) \neq \infty$$

- Homo oeconomicusi döntés kockázatos helyzetekben
  - 1) Számba veszi a kockázatos választási lehetőségeket;
  - 2) Meghatározza e kockázatos lehetőségek lehetséges kimeneteleit (F_i) és ezekhez bekövetkezési valószínűségeket (p_i) is rendel;
  - 3) Az összevethetőséghez (várható) hasznossági értéket $E(U(F))$ rendel e kockázatos lehetőségekhez.

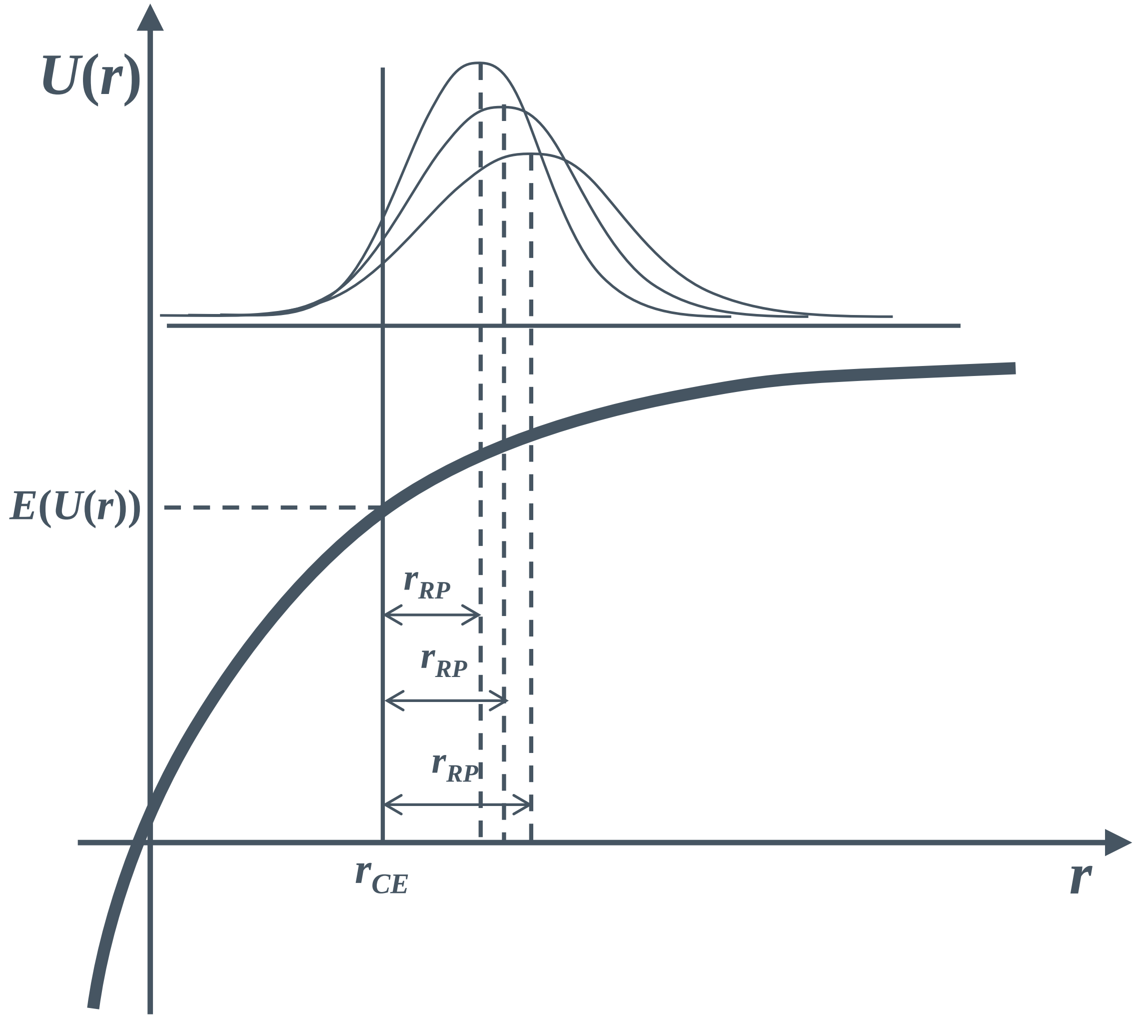
$$E\big(U(F)\big) = \sum_i p_i U(F_i)$$

BME

- A kockázatos helyzetekben való racionális viselkedéshez viszonylag összetett konzisztencia-követelményeknek kapcsolódnak.
  - Neumann János és Oskar Morgenstern
    - Játékelmélet, 1944
    - Axiómarendszer

- Térjünk át a kockázatos összegek vizsgálatáról a kockázatos hozamokéra!
  - Vegyük észre, hogy szinte ugyanarról van szó!
  - A kockázatos hozam is a normális eloszlással lesz megragadható.
    - A konstanssal osztás és kivonás nem változtat az eloszlás normalitásán (de a paraméterein természetesen igen).

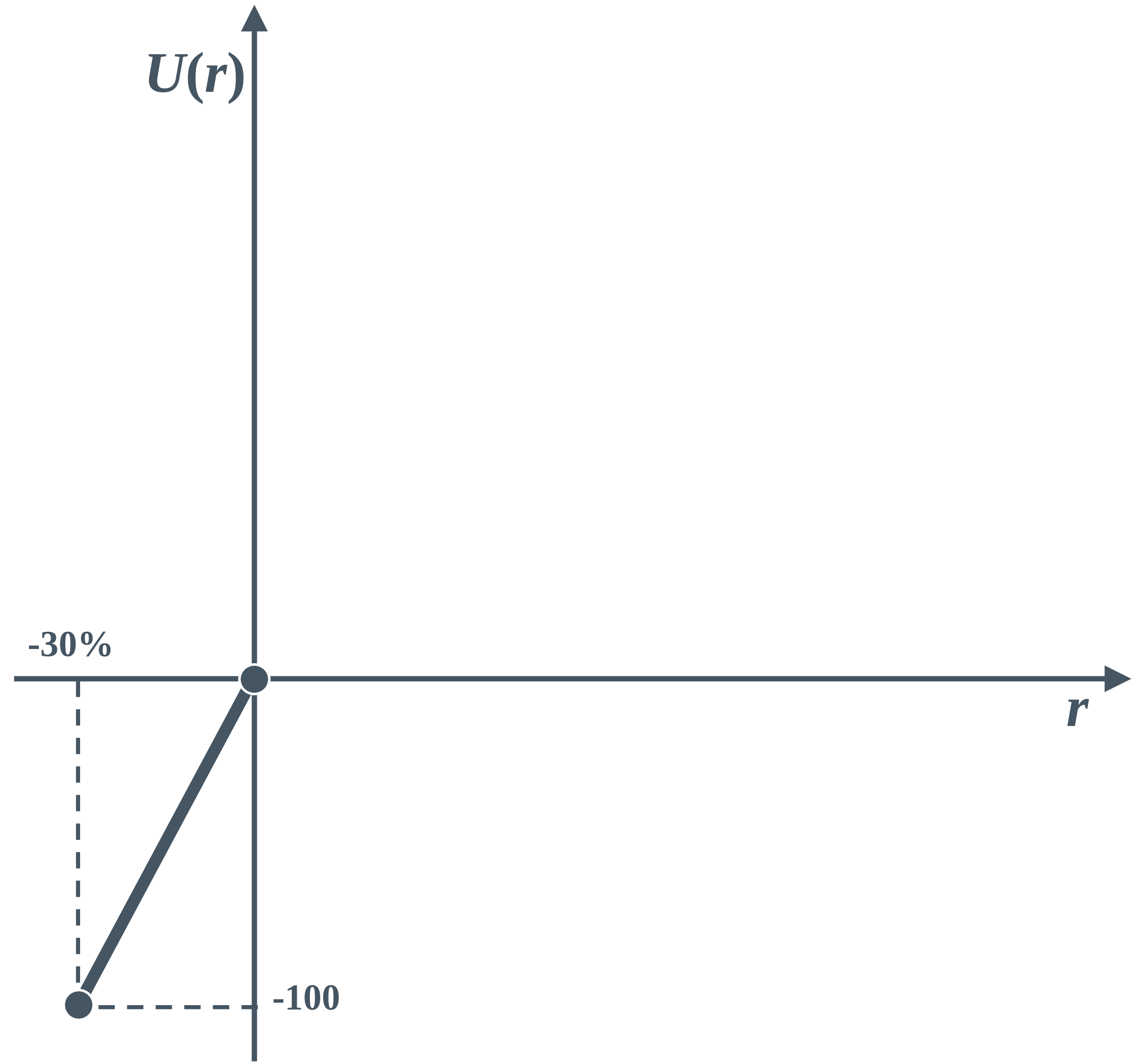
$$r = \frac{F_1}{F_0} - 1, \quad E(r) = \frac{E(F_1)}{F_0} - 1, \quad \sigma(r) = \frac{\sigma(F_1)}{F_0}$$


$U(r)$
$E(U(r))$
r_{RP}
r_{RP}
r_{RP}
r_{CE}
r

2.1 Kockázatkerülési együttható

BME

- Szerkesszük meg „valaki” hozamra vonatkozó hasznosságfüggvényét!
  - A hasznosságértékeknek abszolút értelemben nincs jelentése, így a skálázás tetszőleges.
    - Legyen döntéshozónk induló hasznossága éppen 0!
    - 30% veszteség -100 hasznossági szintet jelentsen!


U(r)
-30%
r
-100

- Milyen p valószínűség mellett menne éppen bele ez a döntéshozó egy olyan helyzetbe, ahol 30%-ot nyerhet p valószínűséggel és 30%-ot veszthet (1–p) valószínűséggel?

$$U(0) = 0 = pU(30\%) + (1 - p)U(-30\%)$$

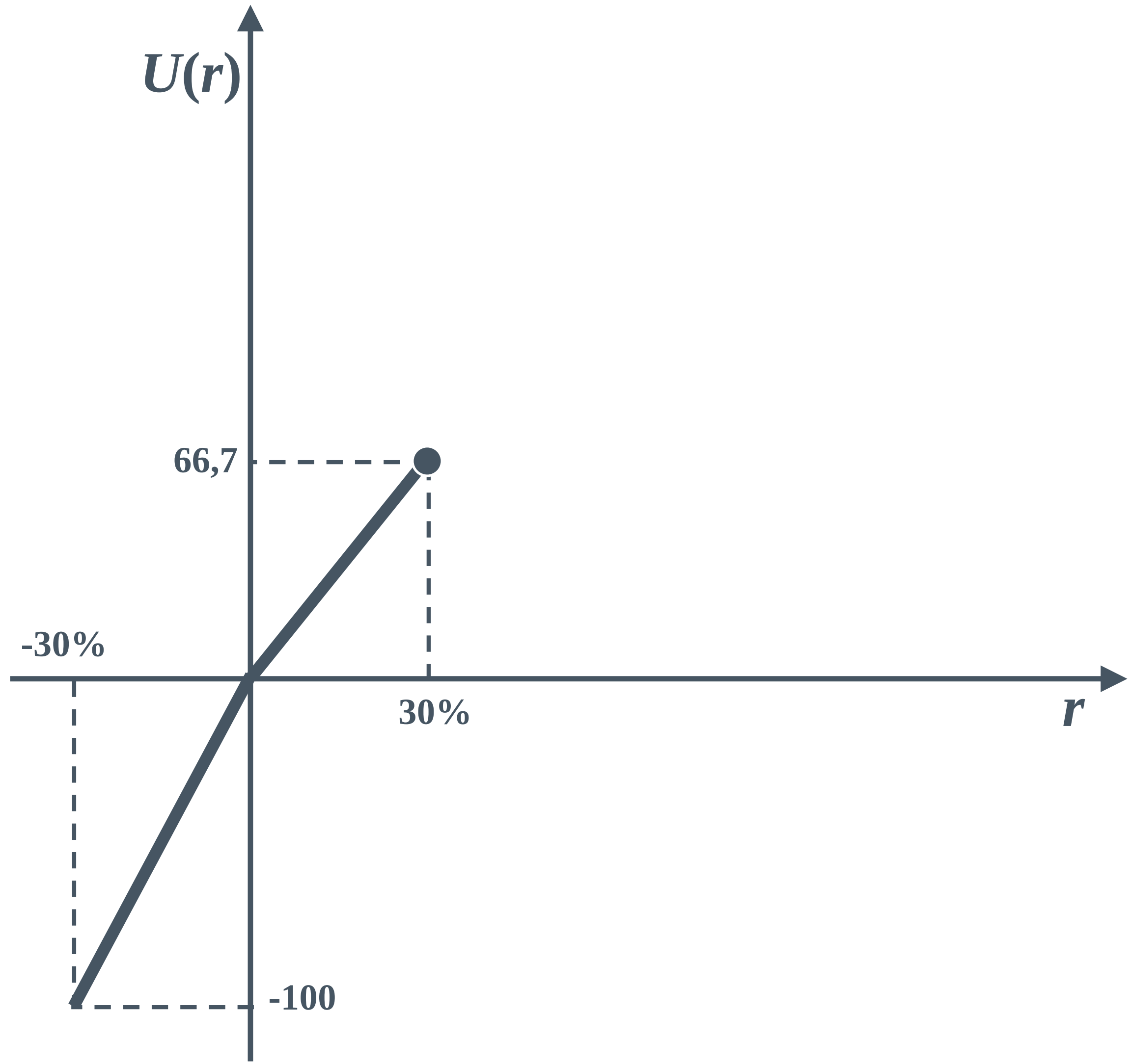
BME

– Legyen ez a p valószínűség (az adott ember esetén) 0,6. Ekkor:

$$U(30\%) = \frac{-(1-p)U(-30\%)}{p} = \frac{-(1-0,6)(-100)}{0,6} = 66,7$$

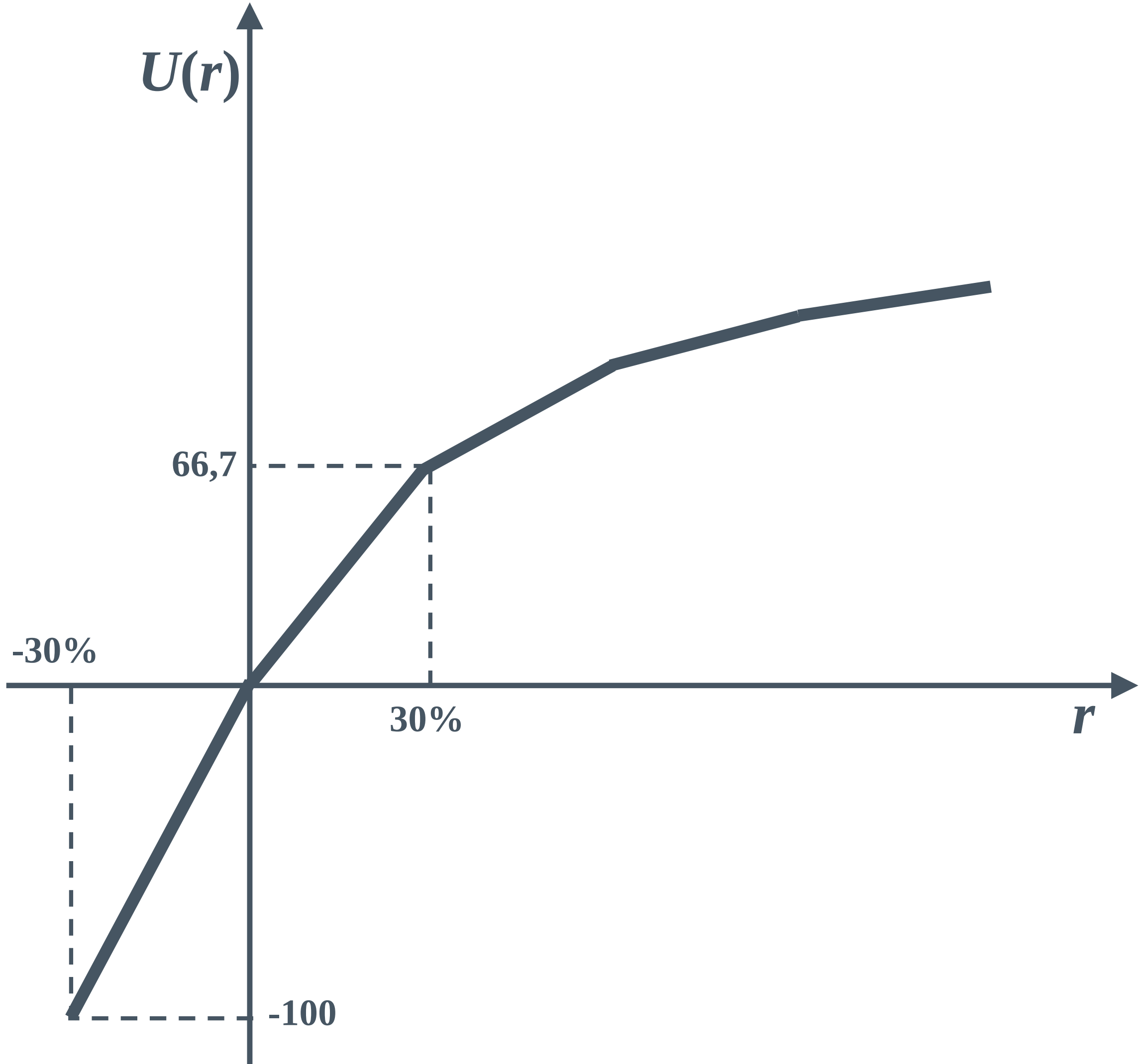
– Újabb értéket nyertünk tehát: $U(30\%)=66,7$.

BME



BME

– Ehhez hasonló lépéseket ismételgetve állíthatjuk össze kívánt hasznosságfüggvényünket.


U(r)
66,7
-30%
30%
r
-100

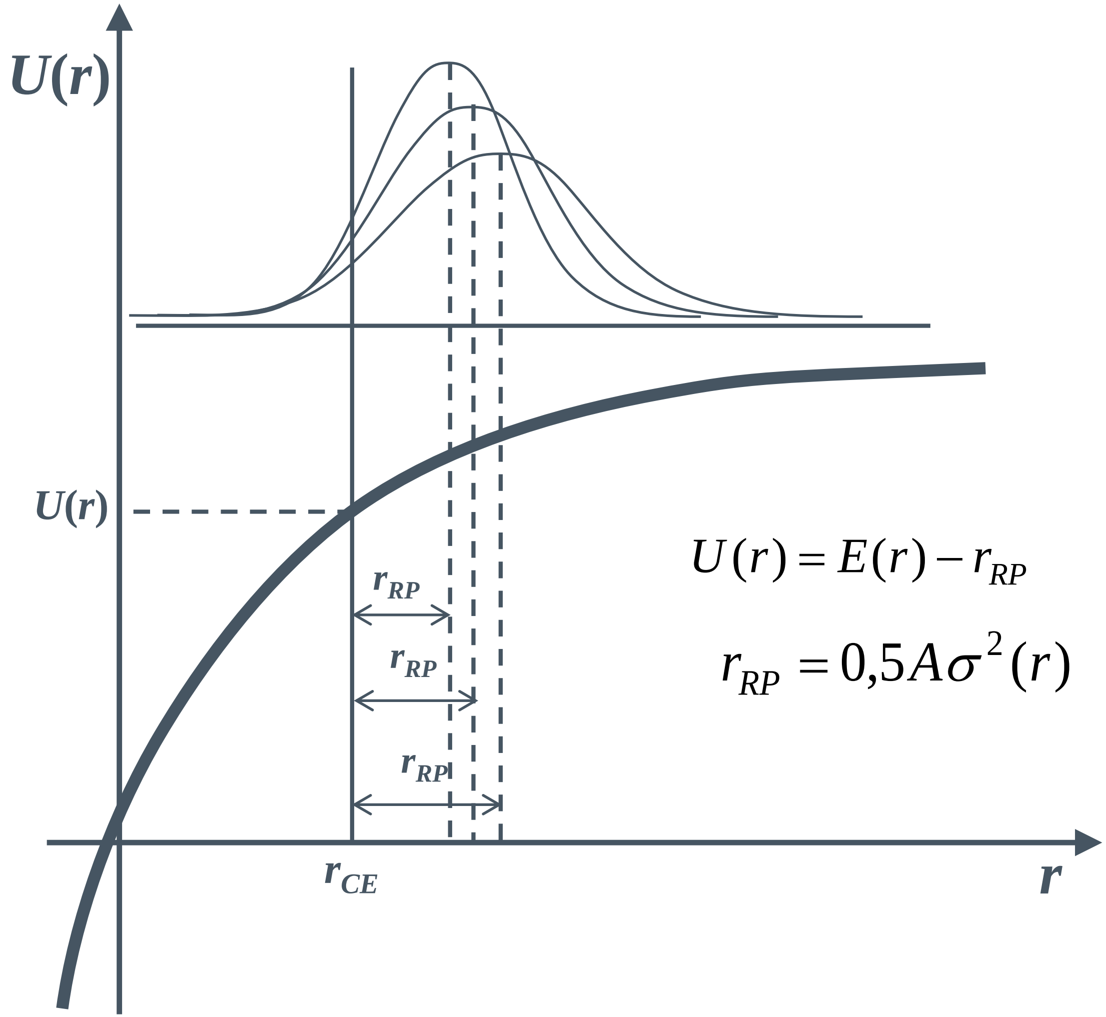
BME

- Láthatjuk, hogy az egyén kockázatkerülésének erőssége hasznosságfüggvényének görbültségéből fakad.
  - Minél erőteljesebb a csökkenő határhasznosság jelensége (azaz a „görbülés”), annál erőteljesebb lesz a kockázatkerülés.
  - Nézzük meg, hogy milyen paraméterrel lehetne a „görbülést” megragadni!

- Kockázatkerülési együttható
  - Modellezés
    - Olyan speciális alakú hozamra vonatkozó hasznosságfüggvényt kell ehhez feltételeznünk, amely esetén a kockázatos hozamokhoz tartozó kockázati hozamprémium (az adott embernél) csak a hozam szórásnégyzetétől függ (és nem függnek pl. a kockáztatott összeg nagyságától, az egyén pillanatnyi vagyoni állapotától stb.).
    - Egy adott kockázatos hozamhoz (egy adott ember esetén) tehát állandó kockázati hozam-prémium kapcsolódik.
    - Mérőszáma az A kockázatkerülési együttható.
    - Értelmezése:

$$r_{RP} = E(r) - r_{CE} = 0{,}5A\sigma^2(r)$$

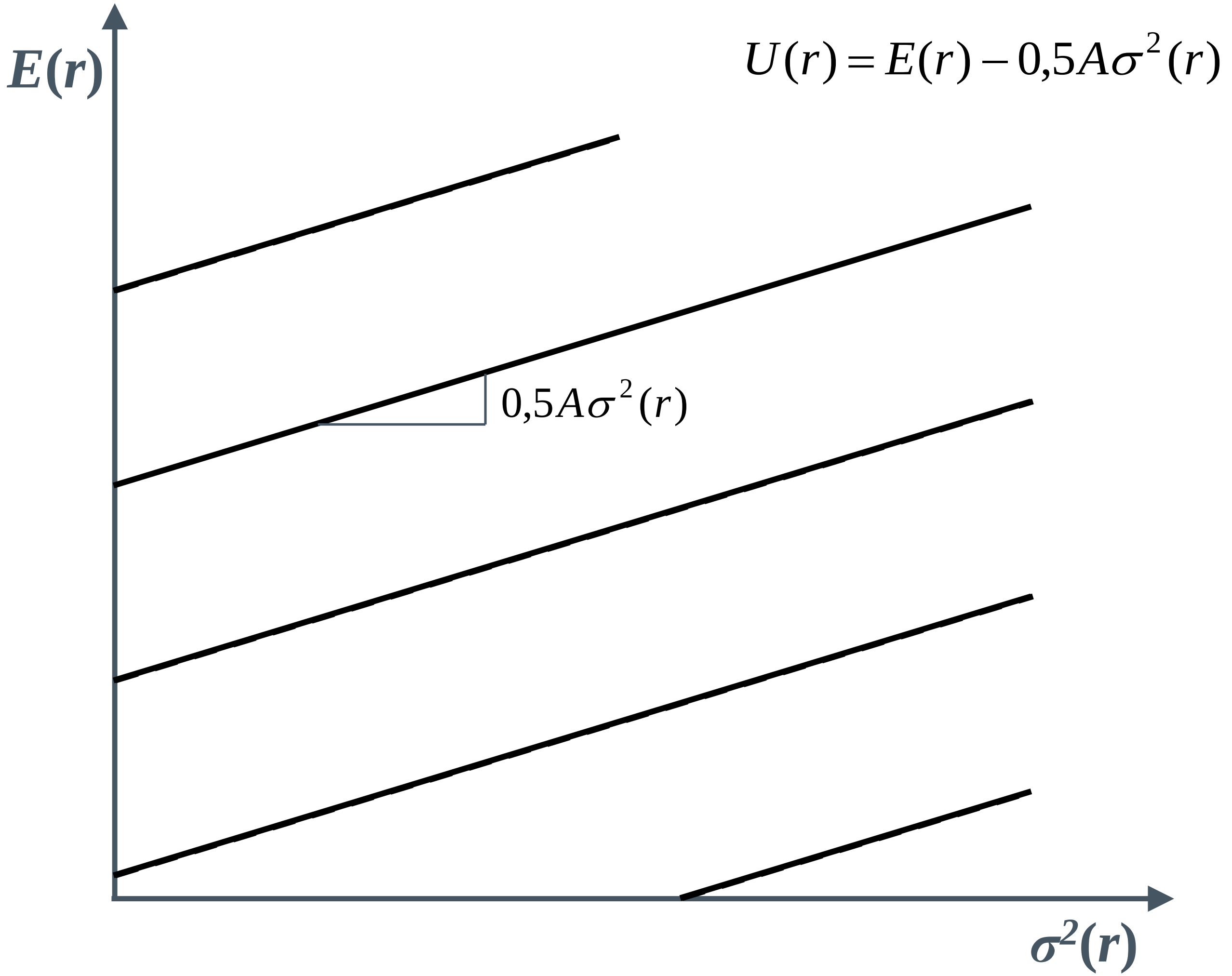
BME



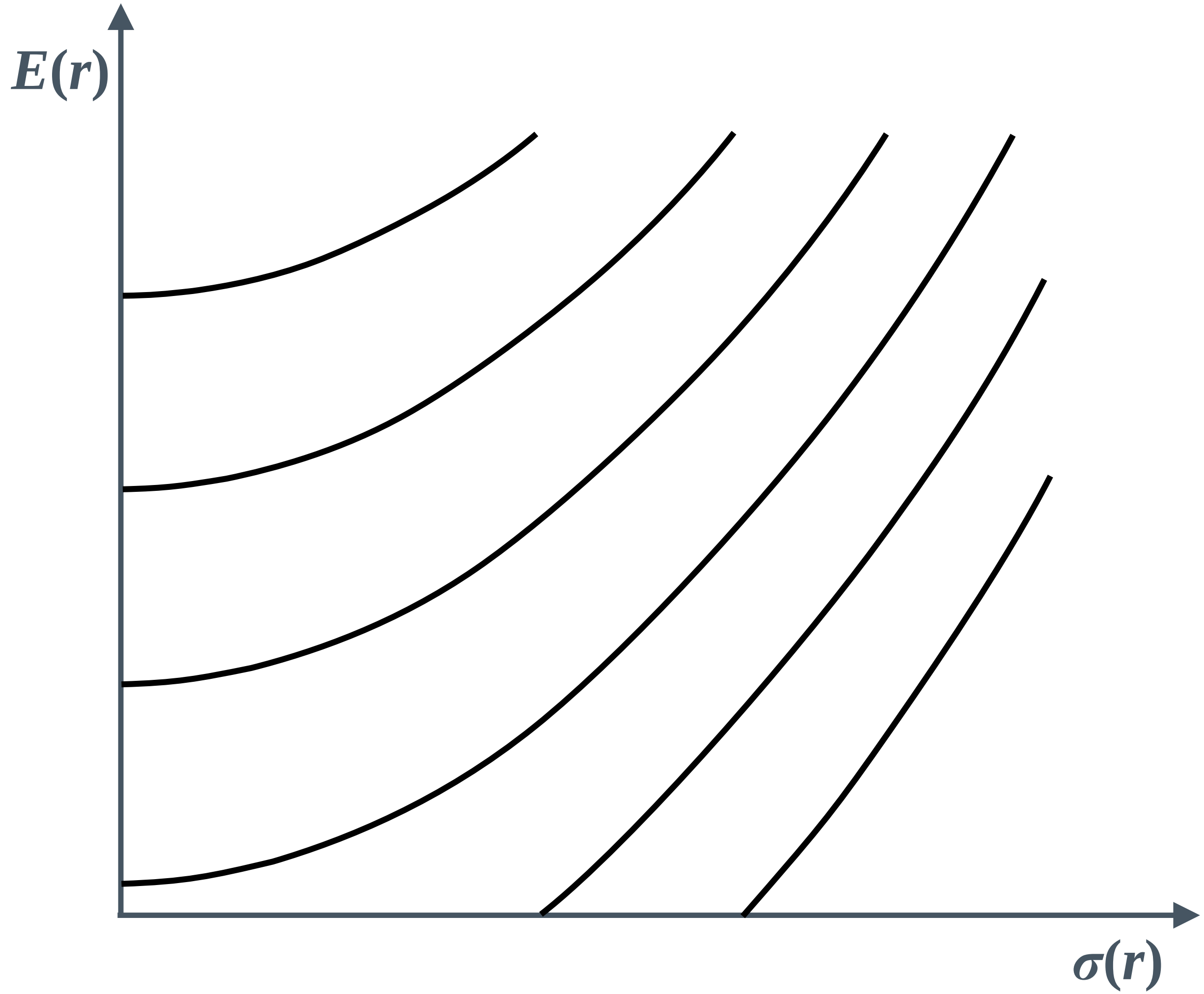
$$U(r) = E(r) - r_{RP}$$

$$r_{RP} = 0,5A\sigma^2(r)$$

BME



BME



- Kockázatkerülési együttható mérése
  - Az egyének kockázatkerülési együtthatója viszonylag jól mérhető.
    - Befektetési megfontolásokkal kapcsolatos felmérésekkel
    - Hipotetikus helyzeteket tartalmazó kérdőívekkel

› Befektetési megfontolások (pl.)

– Vizsgált egyénünk éppen hezitál a következő kettő között

- › r_f kockázatmentes befektetés 2% (reálértelmű) kamatra
- › M paramétereihez hasonló paraméterű (azaz nagyjából átlagos kockázatú) részvényportfólió-befektetés 8% (reálértelmű) várható hozammal és 20% volatilitással.

$$U(r) = E(r) - 0{,}5A\sigma^2(r)$$

$$2\% = 8\% - 0{,}5A20\%^2$$

$$0{,}02 = 0{,}08 - 0{,}5A0{,}2^2$$

$$A = \frac{0{,}08 - 0{,}02}{0{,}5 \cdot 0{,}2^2} = \frac{0{,}06}{0{,}02} = 3$$

› Kérdőív (pl.)

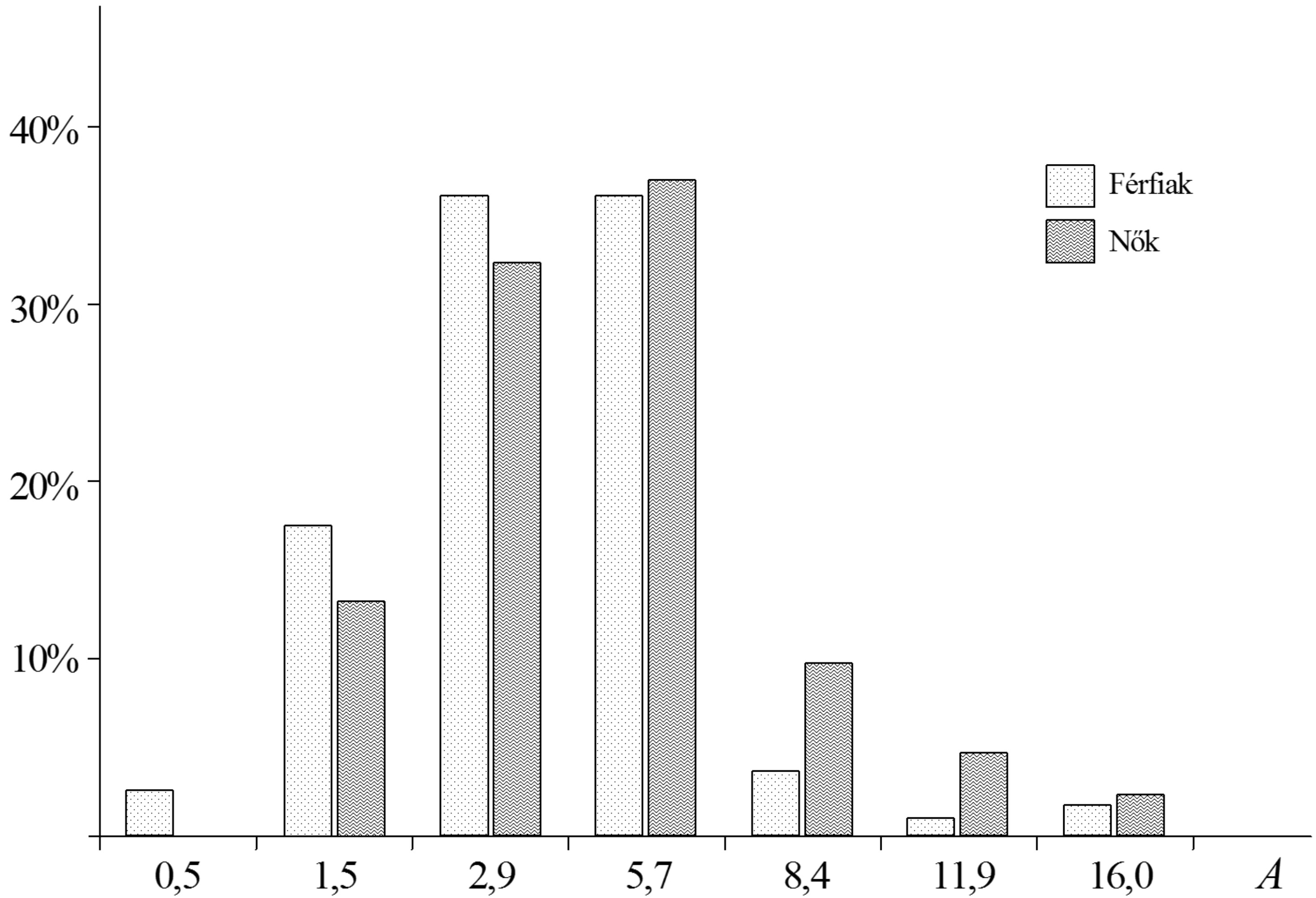
– *„Tegyük fel, hogy Ön az egyedüli kereső a családban, és egy olyan jó állással rendelkezik, amely a mainak megfelelő fizetést garantál élete végéig. Lehetősége adódik azonban egy hasonlóan jó új állásra, amely 50-50% eséllyel megduplázza éves fizetését vagy a(z) x%-ára csökkenti azt. Milyen x% esetén fogadná el az új állást?”*

$$0{,}5U(100\%) + 0{,}5U(x\% - 100\%) = U(0\%)$$

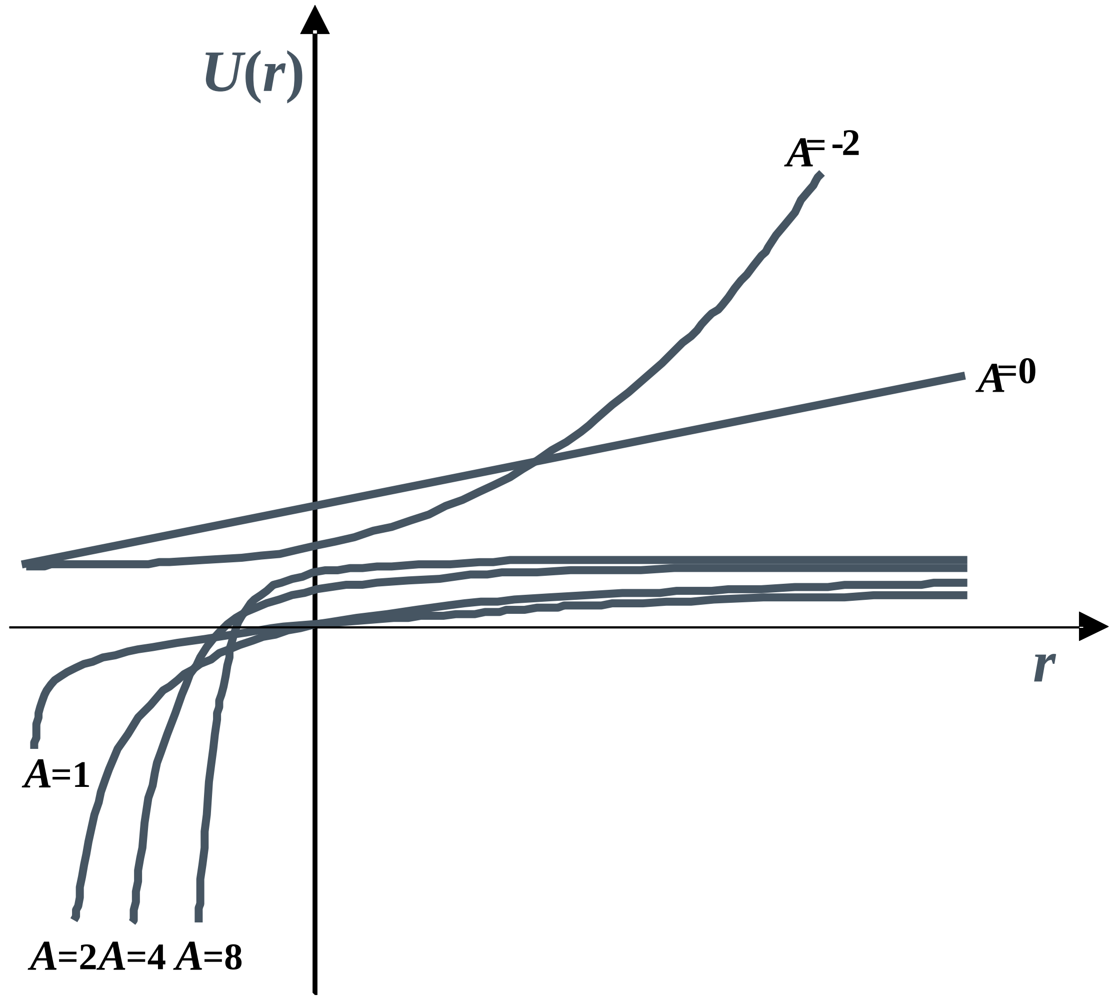
x%	*A*	*Elfogadott csökkentett fizetés (MFt/év)*	*Várható fizetés (MFt/év)*	*%*	*Kockázatkerülés kategóriái*
0,0%	0,0	0	5	0%	**Extrém alacsony**
50,0%	1,0	2,5	6,25	5%	**Nagyon alacsony**
66,7%	2,0	3,34	6,67	17%	**Alacsony**
75,6%	3,0	3,78	6,89		
80,0%	3,8	4	7	53%	**Közepes**
84,0%	4,8	4,2	7,1		
86,8%	5,8	4,34	7,17		
88,8%	6,8	4,44	7,22		
90,0%	7,5	4,5	7,25	20%	**Magas**
92,0%	9,3	4,6	7,3		
93,5%	11,3	4,68	7,34	3%	**Nagyon magas**
95,0%	14,5	4,75	7,38	2%	**Extrém magas**

BME

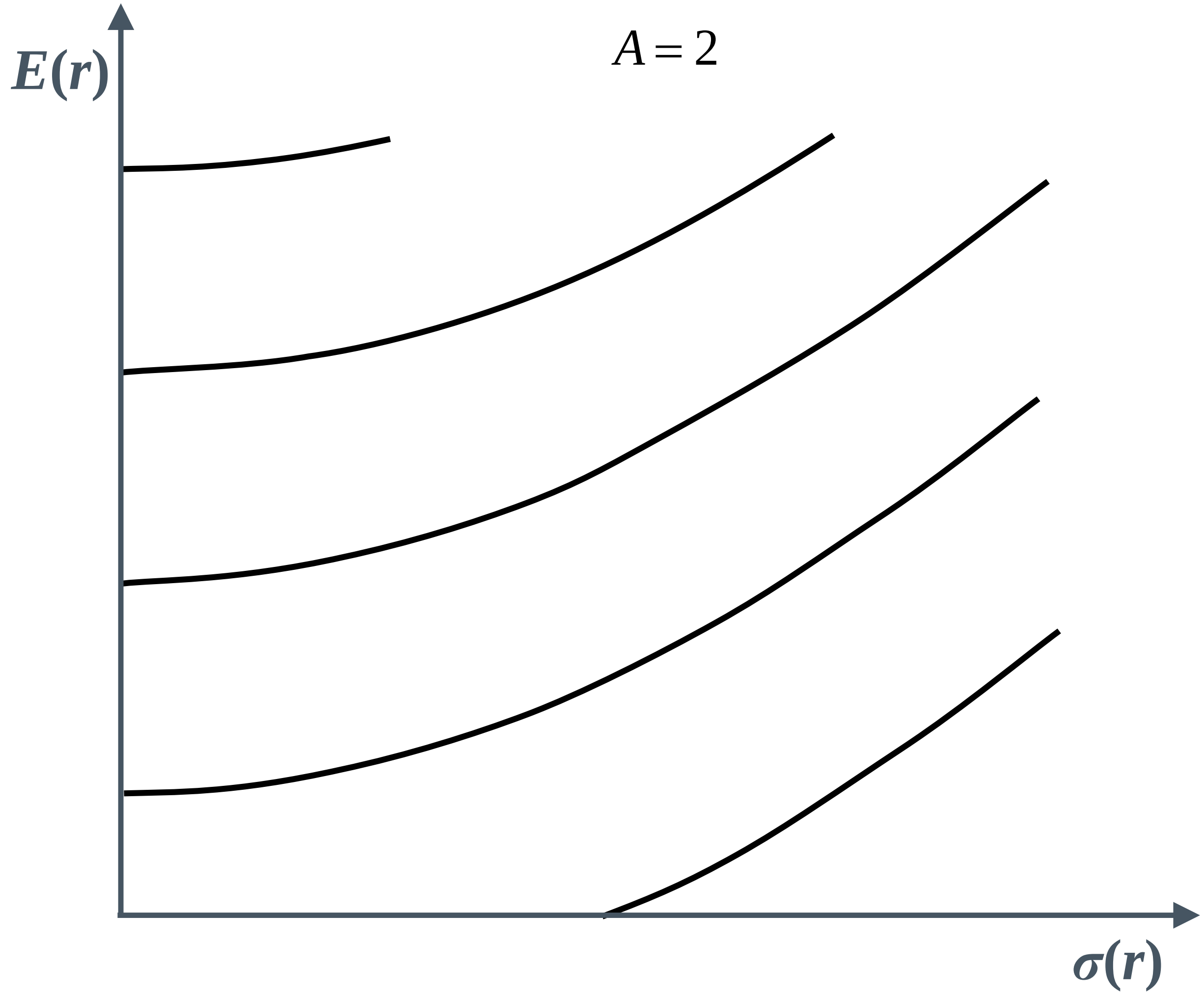
- A kérdőíves felmérések nagyjából 2–8 körüli kockázatkerülési együtthatót mérnek.


40%
30%
20%
10%
Férfiak
Nők
0,5
1,5
2,9
5,7
8,4
11,9
16,0
A

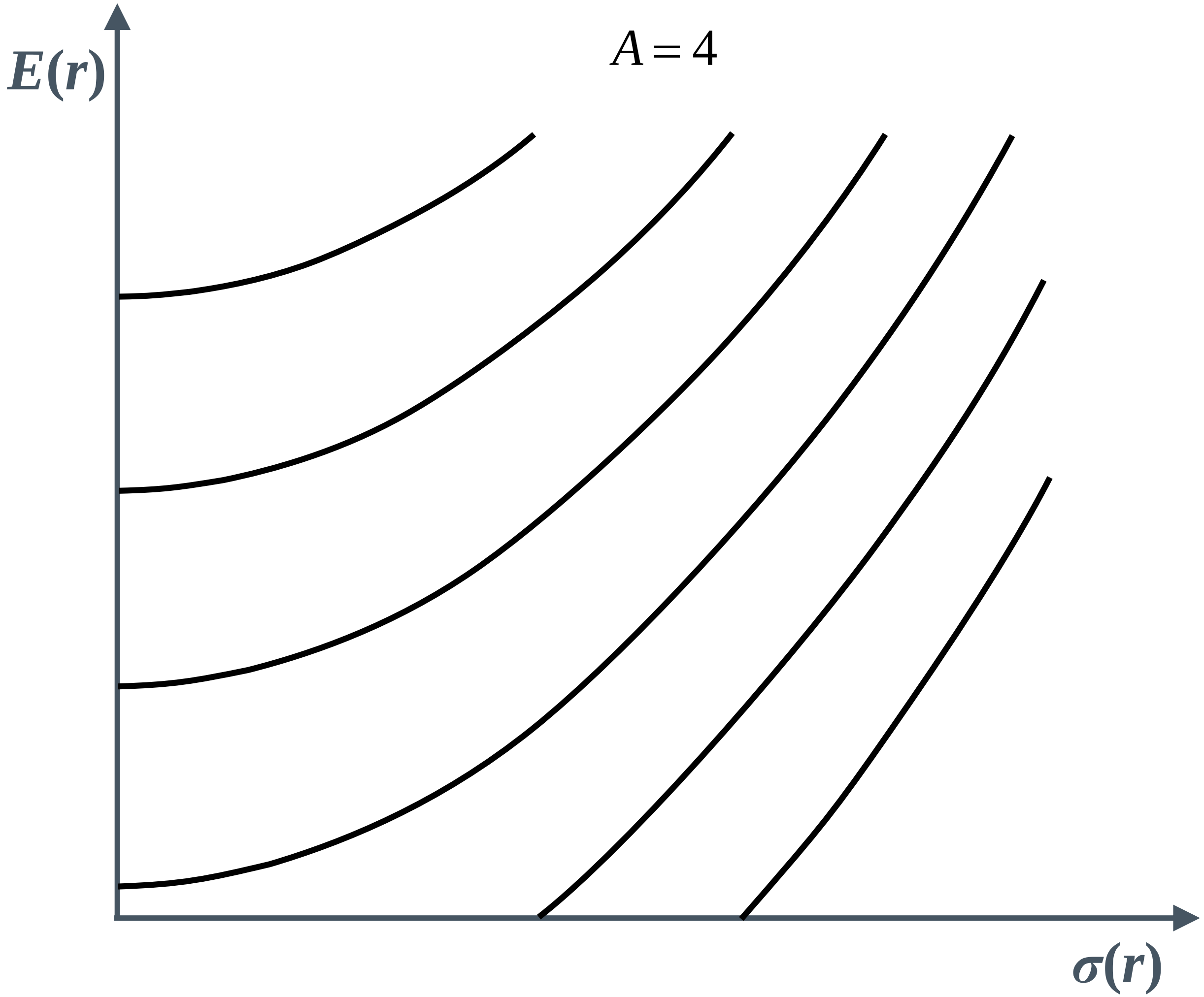
BME



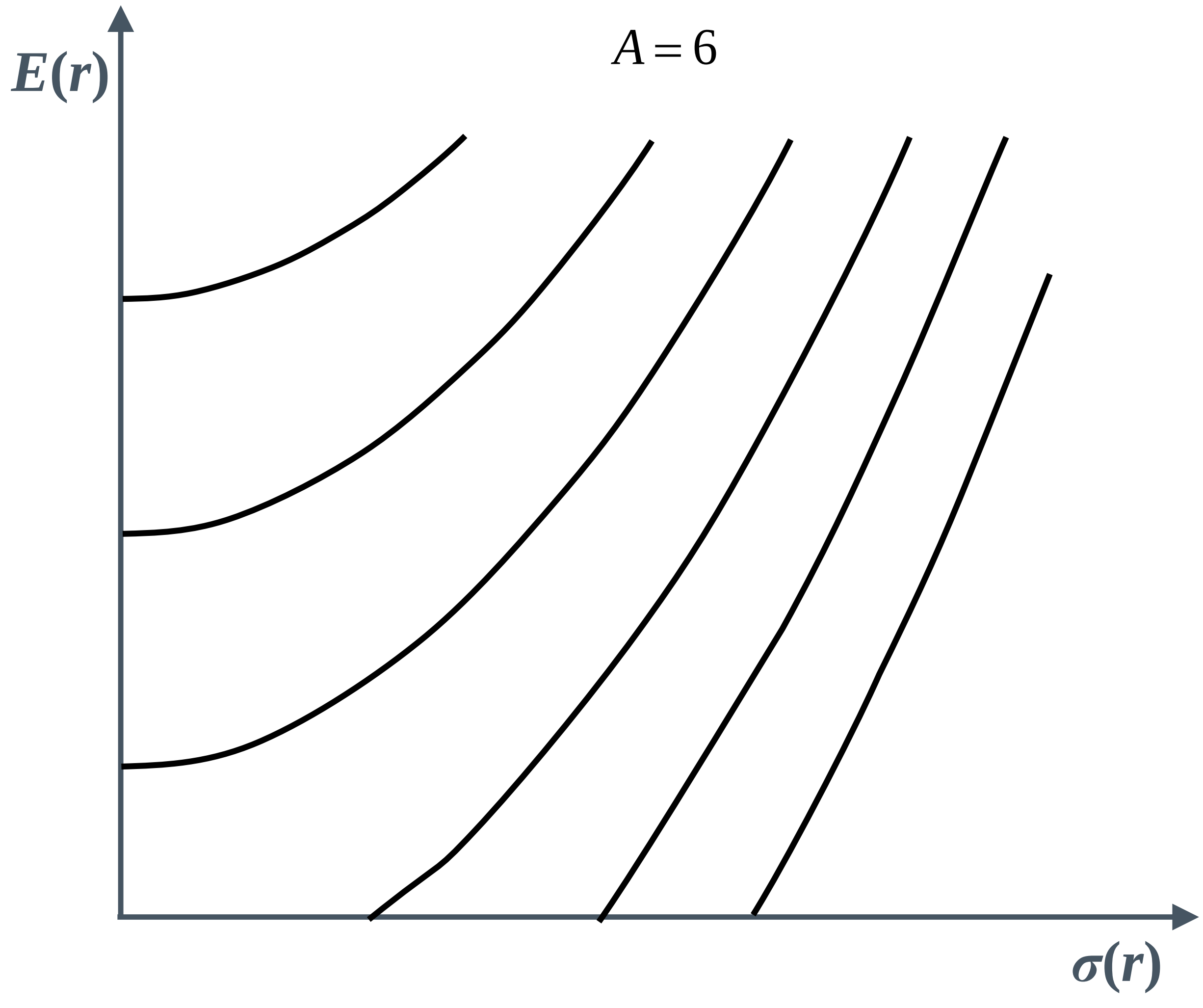
BME



BME



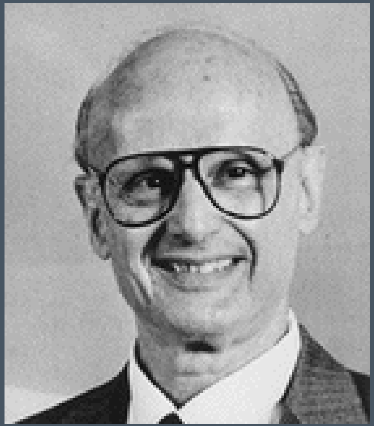
BME



2.2 Hatékony portfóliók tartása

- Portfóliók tartása
  - Kockázatkerülés és racionalitás
    - Ha a befektetőknek lehetősége van kockázatuk olyan csökkentésére, ami a várható hozamot nem érinti, akkor – ha ez költségmentes – élni fognak a lehetőséggel.
    - Felvetődik a befektetés diverzifikálásának, megosztásának, azaz a portfóliók kialakításának lehetősége.

HARRY MARKOWITZ



Műszaki illetve természettudományos alaptanulmányok

Közgazdasági tanulmányok és PhD a University of Chicagon

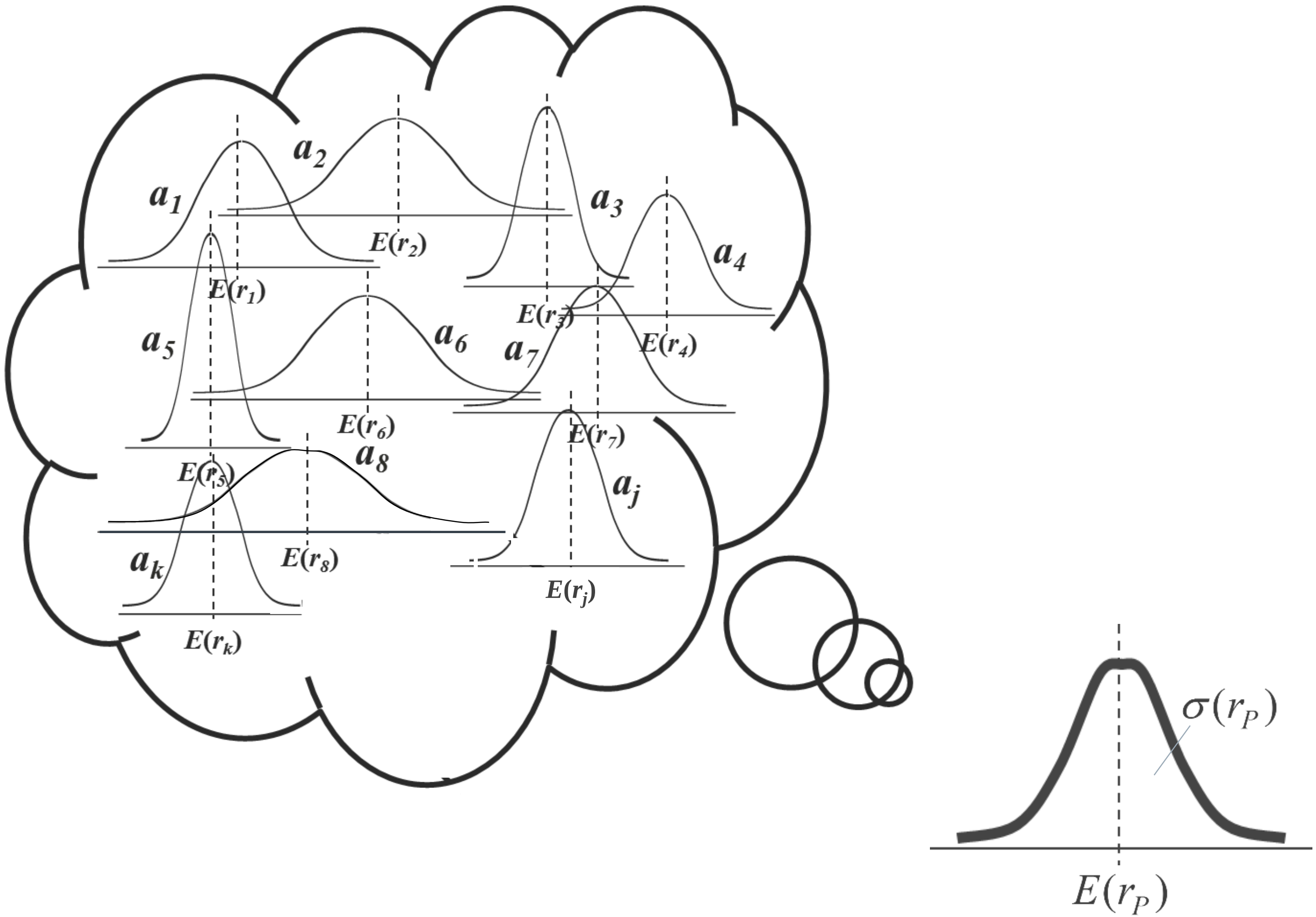
1952. Portfolio Selection (PhD-t csak 1955-ben szerzett)

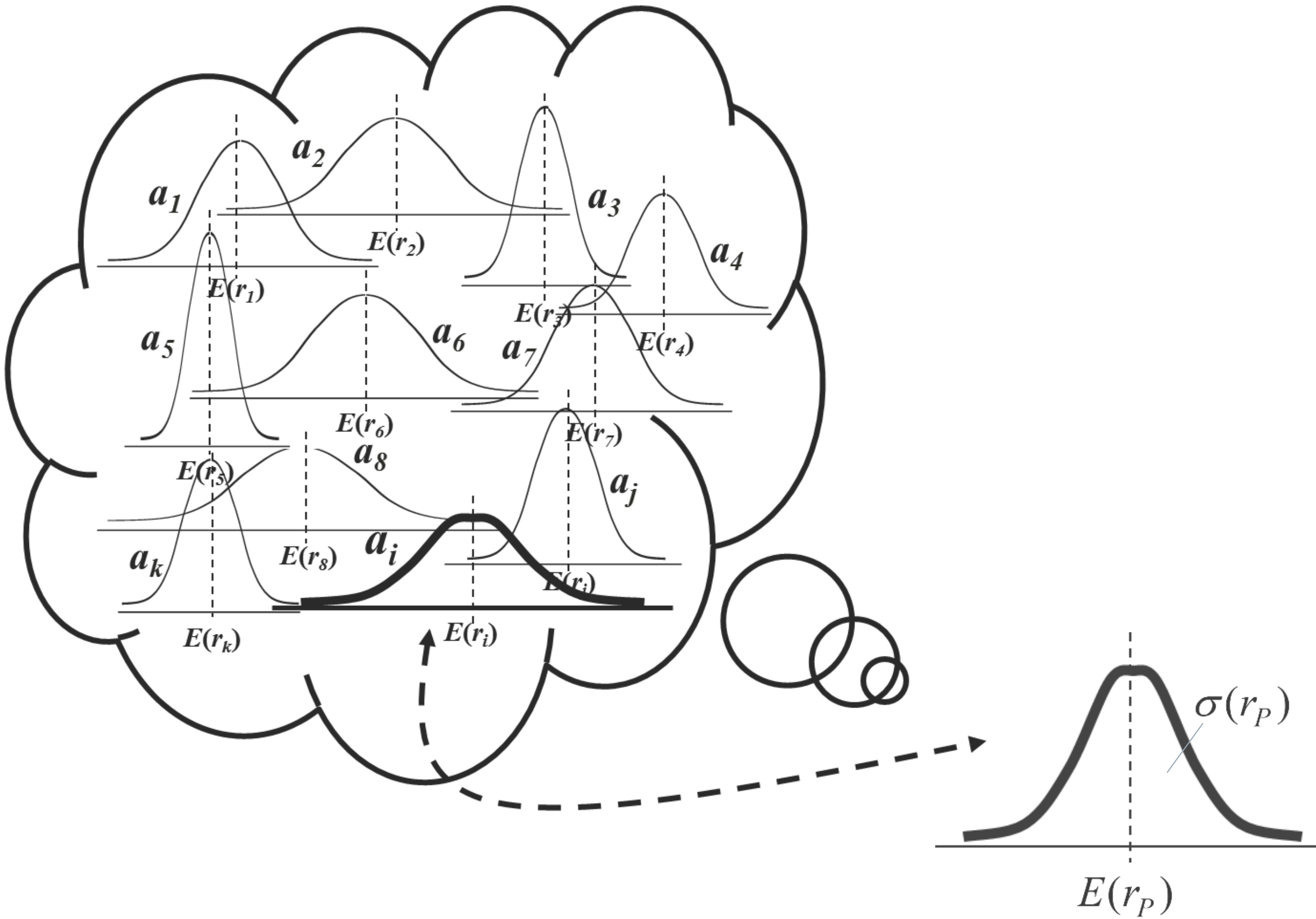
- Olyan befektetőknek állít össze portfoliókat, akik „*a várt hozamot kívánatosnak, a hozadék szórását nemkívánatosnak tartják*”.

Nobel-díj 1990-ben

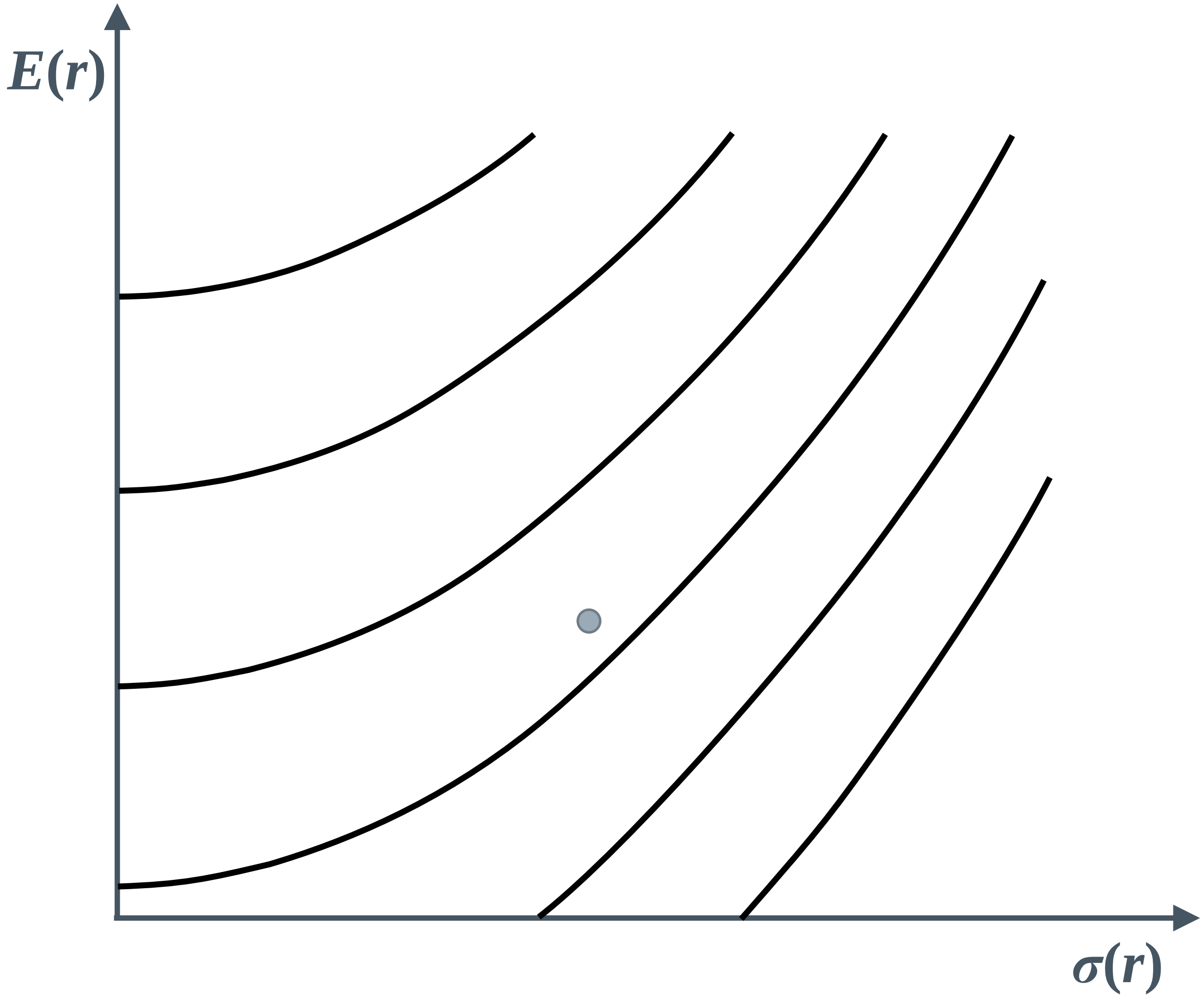
„Markowitz-modell”

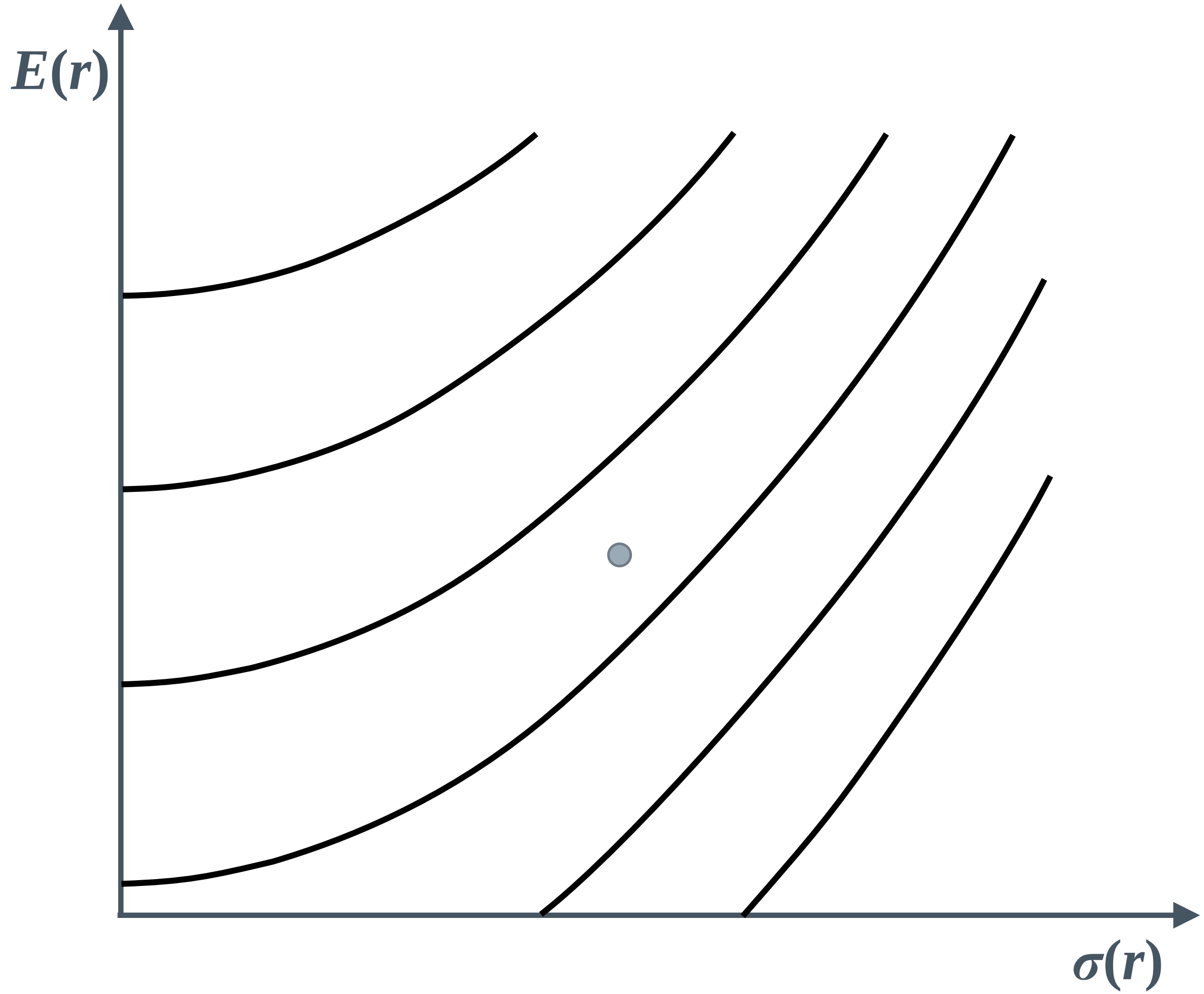
- Egy kis sztochasztika…
  - Egy portfólióban valószínűségi változók összegződnek.
  - Közülük az egyik az i befektetés, amelynek r_i a hozama , $E(r_i)$ a várható hozama és $\sigma(r_i)$ szórása.
  - A P portfólió n elemből, részből áll.
  - Arra vagyunk kíváncsiak, hogy egy i elem (egy befektetés, egy értékpapír), mennyiben határozza meg egy egész befektetői portfólió hozamának sztochasztikus paramétereit.
  - Az eloszlásokat mind normális eloszlásnak tételezzük fel
    - Ekkor a két paraméter a $E(r)$ várható hozam és a $\sigma(r)$ hozam szórás.


a_1
$E(r_1)$
a_2
$E(r_2)$
a_3
$E(r_3)$
a_4
$E(r_4)$
a_5
$E(r_5)$
a_6
$E(r_6)$
a_7
$E(r_7)$
a_8
$E(r_8)$
a_j
$E(r_j)$
a_k
$E(r_k)$
$\sigma(r_P)$
$E(r_P)$


a_1
a_2
a_3
a_4
a_5
a_6
a_7
a_8
a_j
a_i
a_k
$E(r_1)$
$E(r_2)$
$E(r_3)$
$E(r_4)$
$E(r_5)$
$E(r_6)$
$E(r_7)$
$E(r_8)$
$E(r_j)$
$E(r_i)$
$E(r_k)$
$\sigma(r_P)$
$E(r_P)$

BME

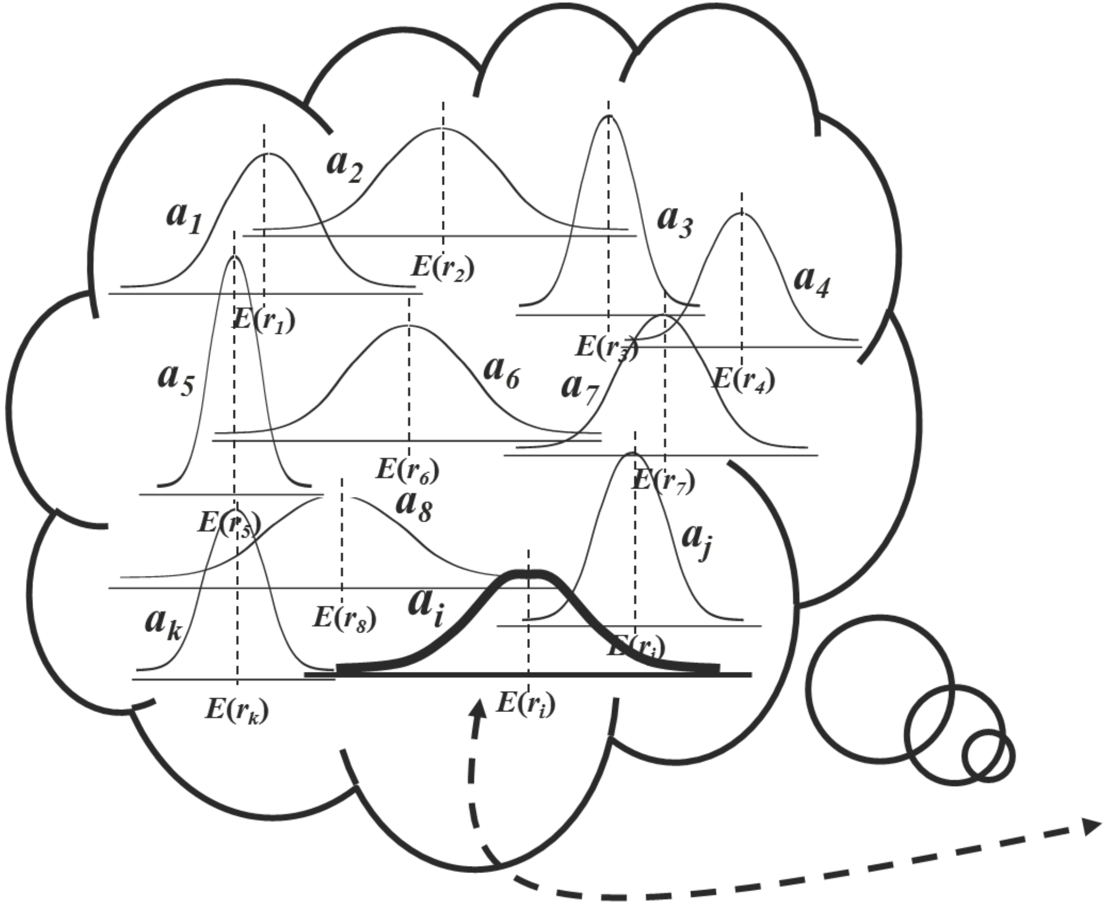


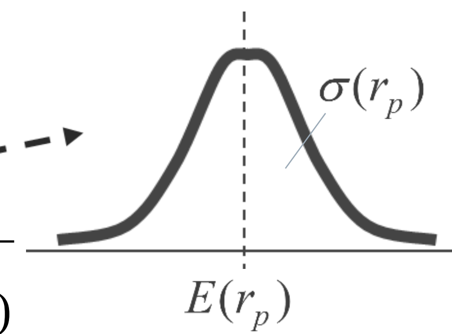

$E(r)$
$\sigma(r)$

BME

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1$$

$$\sum_i a_i = 1$$





$$E(r_P) = a_1 E(r_1) + \ldots + a_n E(r_n) = \sum_i a_i E(r_i)$$

$$\sigma(r_P) = \sqrt{a_1^2 \sigma^2(r_1) + \ldots + a_n^2 \sigma^2(r_n) + \sum_{i,j}^{n,n} 2 k_{i,j} a_i \sigma(r_i) a_j \sigma(r_j)}$$

„EGYSZERŰ” PÉLDA

Napszemüveg – esőkabát

	Napszemüveg	Esőkabát	**50-50%**
Napos szezon	50%	25%	**37,5%**
Esős szezon	25%	50%	**37,5%**
	37,5%	**37,5%**	
	25%-50%	**25%-50%**	

$$E(r_P) = a_1 E(r_1) + a_2 E(r_2)$$

$$a_1 + a_2 = 1$$

$$\sigma(r_P) = \sqrt{a_1^2\sigma^2(r_1) + a_2^2\sigma^2(r_2) + 2k_{1,2}a_1\sigma(r_1)a_2\sigma(r_2)}$$

$$a_1 + a_2 = 1;$$

2.2.1 Kevéselemű portfóliók

› Két kockázatos befektetési lehetőség kombinációi

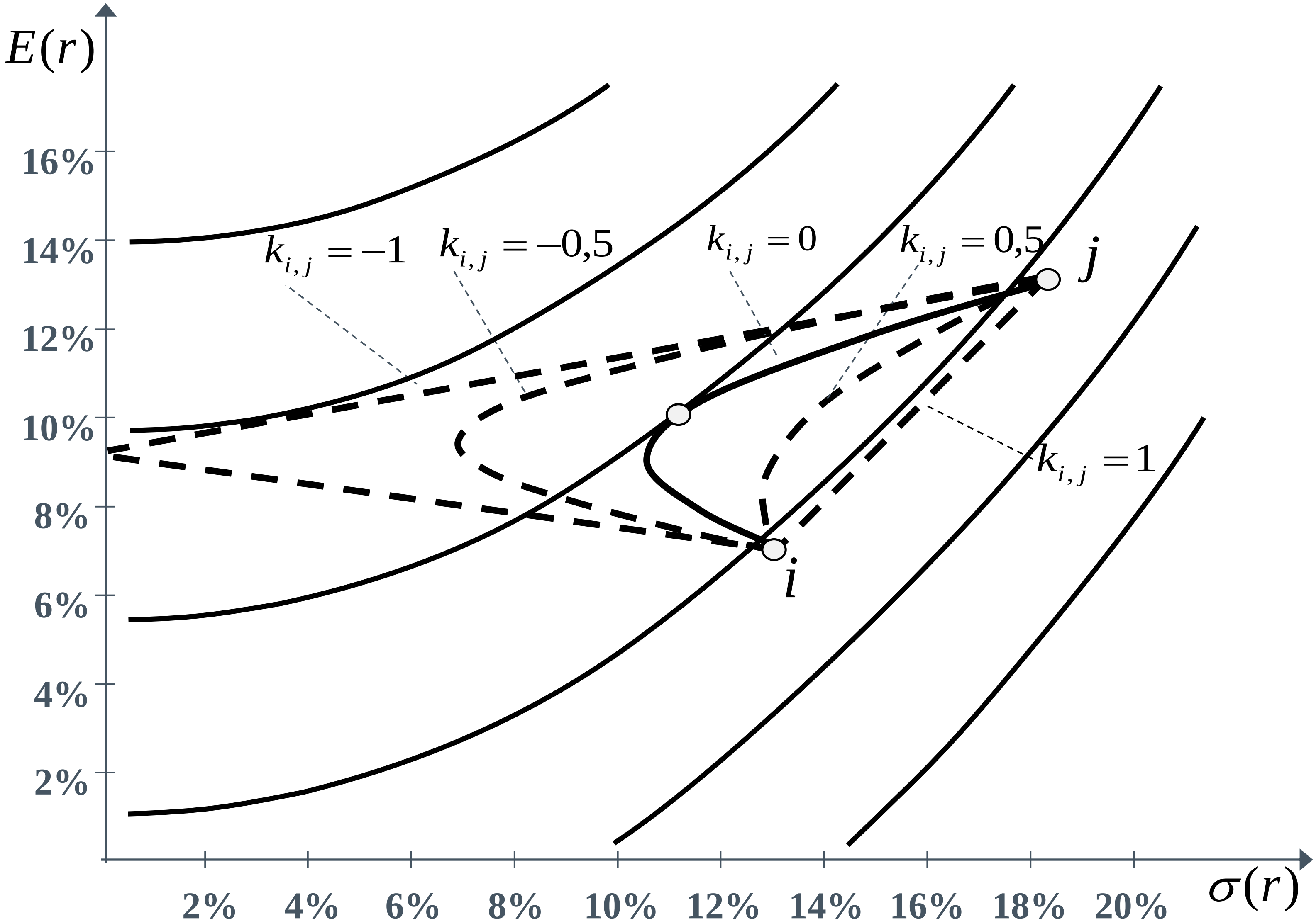
– *i* és *j*

	i	j
$E(r)$ [%]	7%	13%
$\sigma(r)$ [%]	13%	18%

$$E(r_P) = a_i E(r_i) + a_j E(r_j) = a_i 7\% + a_j 13\%$$

$$\sigma(r_P) = \sqrt{a_i^2 \sigma^2(r_i) + a_j^2 \sigma^2(r_j) + 2k_{ij} a_i \sigma(r_i) a_j \sigma(r_j)} =$$

$$= \sqrt{a_i^2 (13\%)^2 + a_j^2 (18\%)^2 + 2k_{ij} a_i 13\% \cdot a_j 18\%}$$



$E(r)$
16%
14%
12%
10%
8%
6%
4%
2%
$k_{i,j} = -1$
$k_{i,j} = -0{,}5$
$k_{i,j} = 0$
$k_{i,j} = 0{,}5$
$k_{i,j} = 1$
j
i
2%
4%
6%
8%
10%
12%
14%
16%
18%
20%
$\sigma(r)$

› Három kockázatos befektetési lehetőség kombinációi

– i, j és k

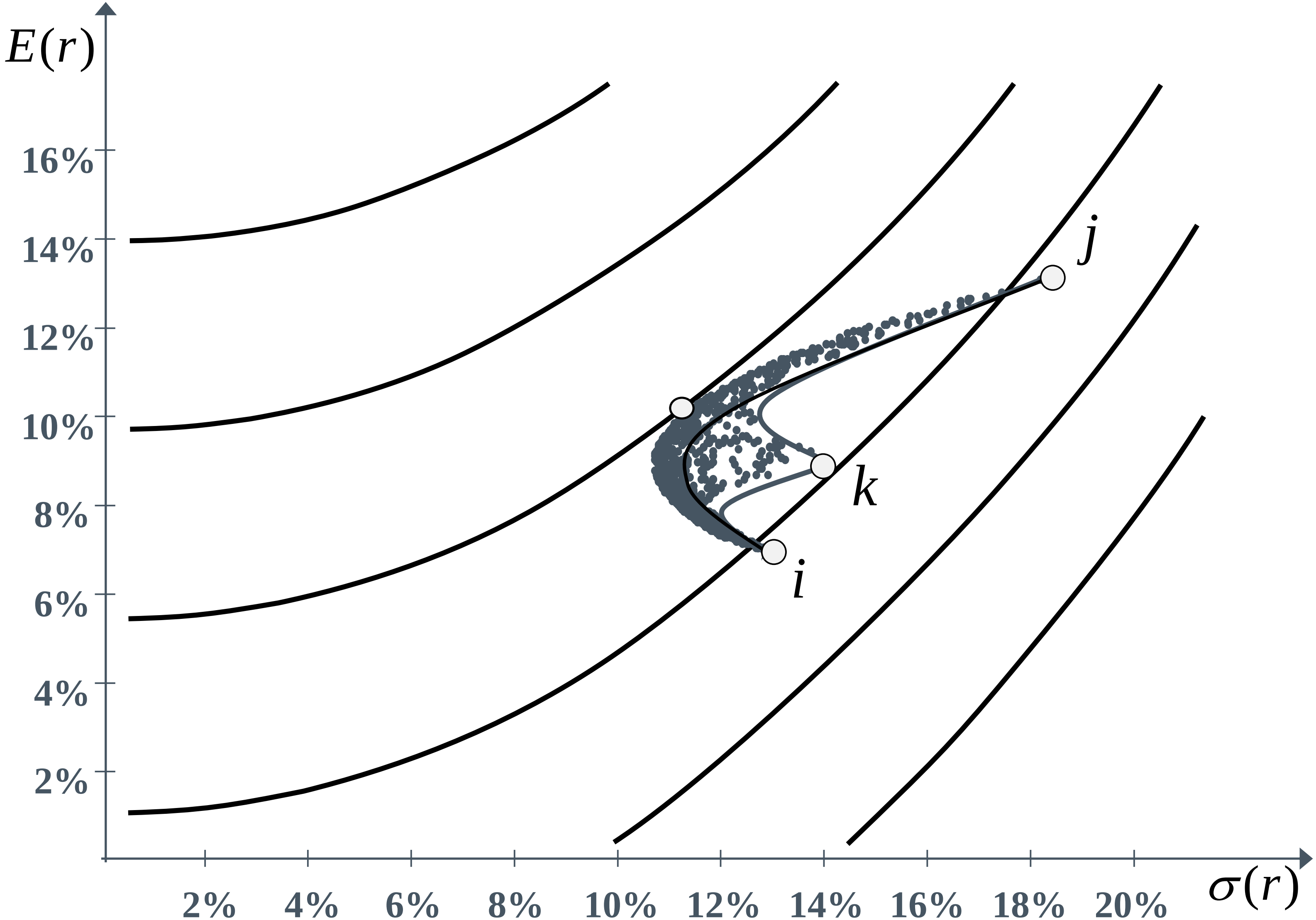
	i	***j***	***k***
$E(r)$ [%]	7%	13%	9%
$\sigma(r)$ [%]	13%	18%	14%

$k_{i,j}$	$k_{i,k}$	$k_{j,k}$
0,2	0,5	0,3

$$E(r_P) = a_1 E(r_1) + a_2 E(r_2) + a_3 E(r_3)$$

$$\sigma(r_P) = \sqrt{a_1^2\sigma^2(r_1) + a_2^2\sigma^2(r_2) + a_3^2\sigma^2(r_3) + 2k_{1,2}a_1\sigma(r_1)a_2\sigma(r_2) + 2k_{1,3}a_1\sigma(r_1)a_3\sigma(r_3) + 2k_{2,3}a_2\sigma(r_2)a_3\sigma(r_3)}$$

$$a_1 + a_2 + a_3 = 1$$


$E(r)$
16%
14%
12%
10%
8%
6%
4%
2%
j
k
i
2%
4%
6%
8%
10%
12%
14%
16%
18%
20%
$\sigma(r)$

BME

- Kockázatdiverzifikáció
  - Markowitz *„A diverzifikáció megfigyelhető és érzékelhető, domináns magatartási szabály, amely sem mint hipotézis, sem mint alapelv nem vethető el.”*

BME

2.2.2 Sokelemű portfóliók

- Ilyenkor a két szélsőséges eset
  - 1-es korrelációk
    - Teljes függőség
  - 0-ás korrelációk
    - Teljes függetlenség

› Az n elem közötti korreláció 1

– Teljes függőség

Általános eset

$$\sigma(r_P) = \sqrt{a_1^2\sigma^2(r_1) + a_2^2\sigma^2(r_2) + \ldots + a_n^2\sigma^2(r_n) + \overline{+\sum_{i,j}^{n,n} 2a_i\sigma(r_i)a_j\sigma(r_j)}}$$

$$= \sqrt{\left(a_1\sigma(r_1) + a_2\sigma(r_2) + \ldots + a_n\sigma(r_n)\right)^2}$$

$$= a_1\sigma(r_1) + a_2\sigma(r_2) + \ldots + a_n\sigma(r_n)$$

$$= \sigma(r_i)_{átlagos}$$

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1; \quad i \neq j; \quad ij \neq ji; \quad k_{i,j} = 1$$

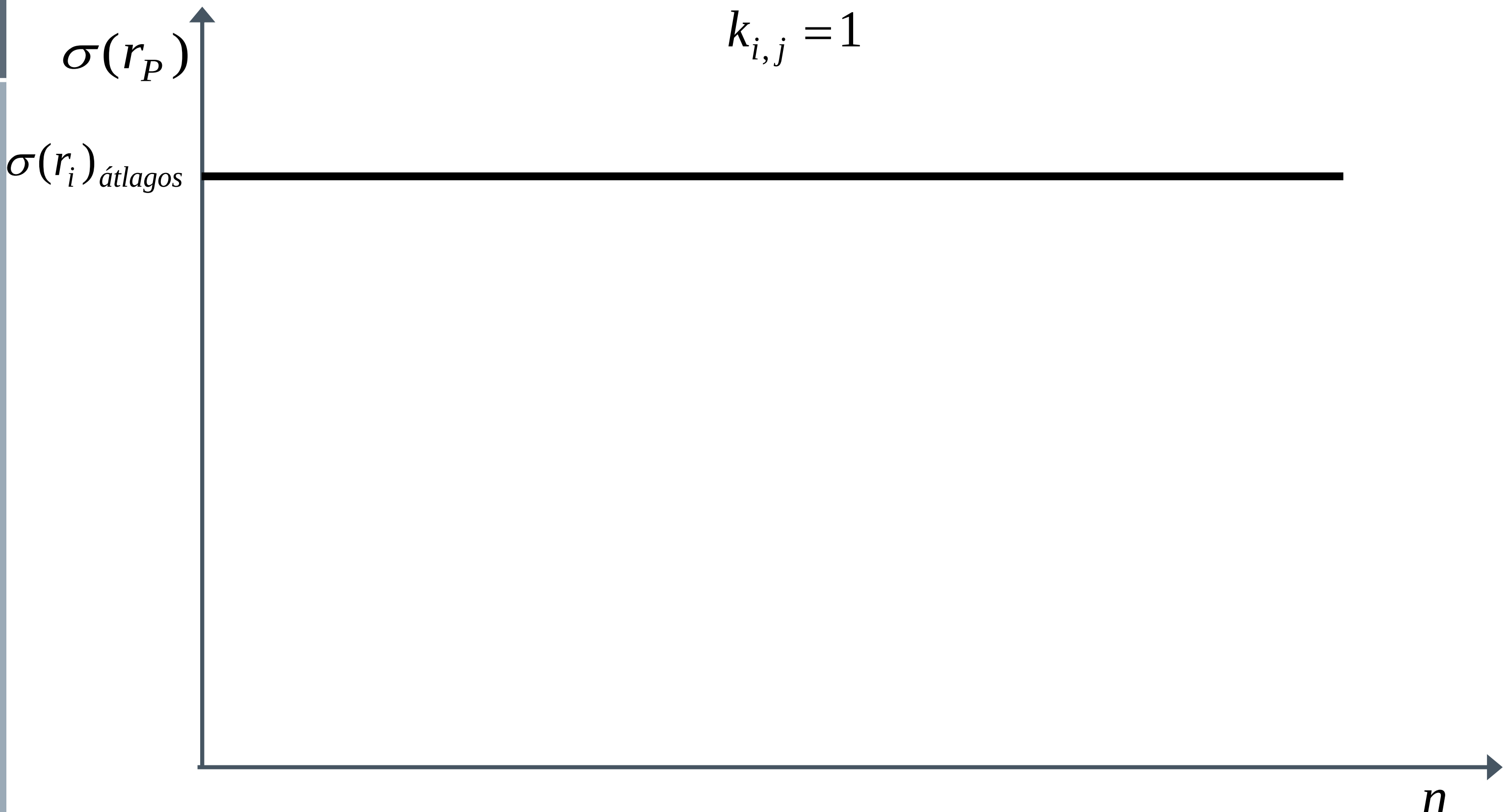
n darab „egyforma” rész

$$\sigma(r_P) = \left(\frac{1}{n}\sigma(r_i)_{átlagos}\right)_1 + \ldots + \left(\frac{1}{n}\sigma(r_i)_{átlagos}\right)_n$$

$$= n\frac{1}{n}\sigma(r_i)_{átlagos} = \sigma(r_i)_{átlagos}$$

$$a_i = \frac{1}{n}; \quad \sigma(r_i) = \sigma(r_i)_{átlagos}; \quad k_{i,j} = 1$$

$$k_{i,j} = 1$$



› Az n elem közötti korreláció 0

– Teljes függetlenség

Általános eset

$$\sigma(r_P)=\sqrt{a_1^2\sigma^2(r_1)+a_2^2\sigma^2(r_2)+\ldots+a_n^2\sigma^2(r_n)}$$

$$a_1+a_2+\ldots+a_n=1;\quad k_{i,j}=0$$

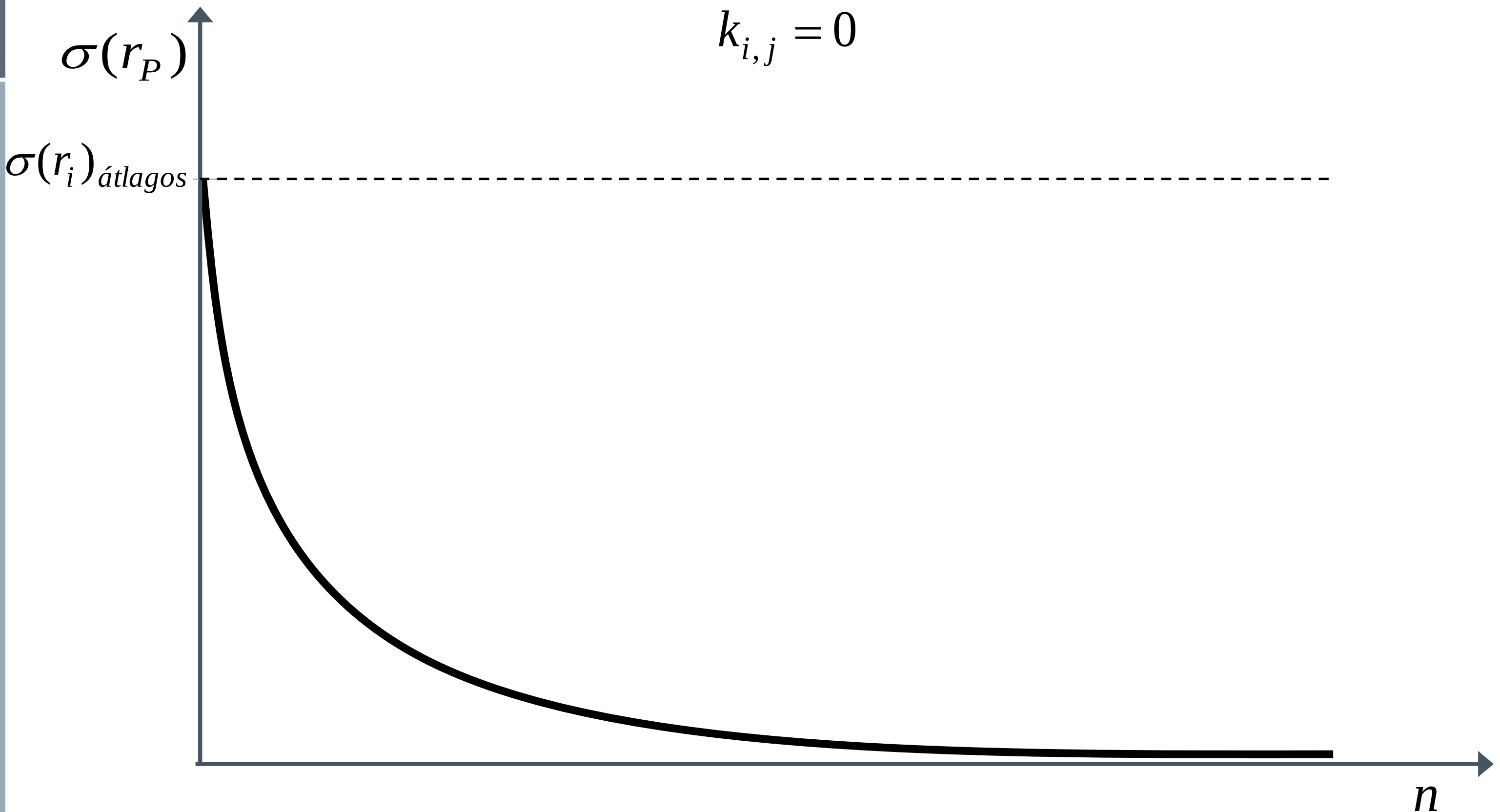
n darab „egyforma” rész

$$\sigma(r_P)=\sqrt{\left(\frac{1}{n}\sigma(r_i)_{átlagos}\right)_1^2+\ldots+\left(\frac{1}{n}\sigma(r_i)_{átlagos}\right)_n^2}$$

$$=\sqrt{n\left(\frac{1}{n}\sigma(r_i)_{átlagos}\right)^2}$$

$$=\frac{\sqrt{n}}{n}\sigma(r_i)_{átlagos},\ ha\ \ n\Rightarrow\infty, \sigma(r_P)\Rightarrow 0$$

$$a_i=\frac{1}{n};\quad \sigma(r_i)=\sigma(r_i)_{átlagos};\quad k_{i,j}=0$$



$k_{i,j} = 0$
$\sigma(r_P)$
$\sigma(r_i)_{átlagos}$
n

- Összefoglalva
  - Egy sokelemű P portfólió szórása együttmozgó részek esetén a részek átlagos szórásához tart, független részek esetén viszont a nullához.

$$k_{i,j} = 1$$

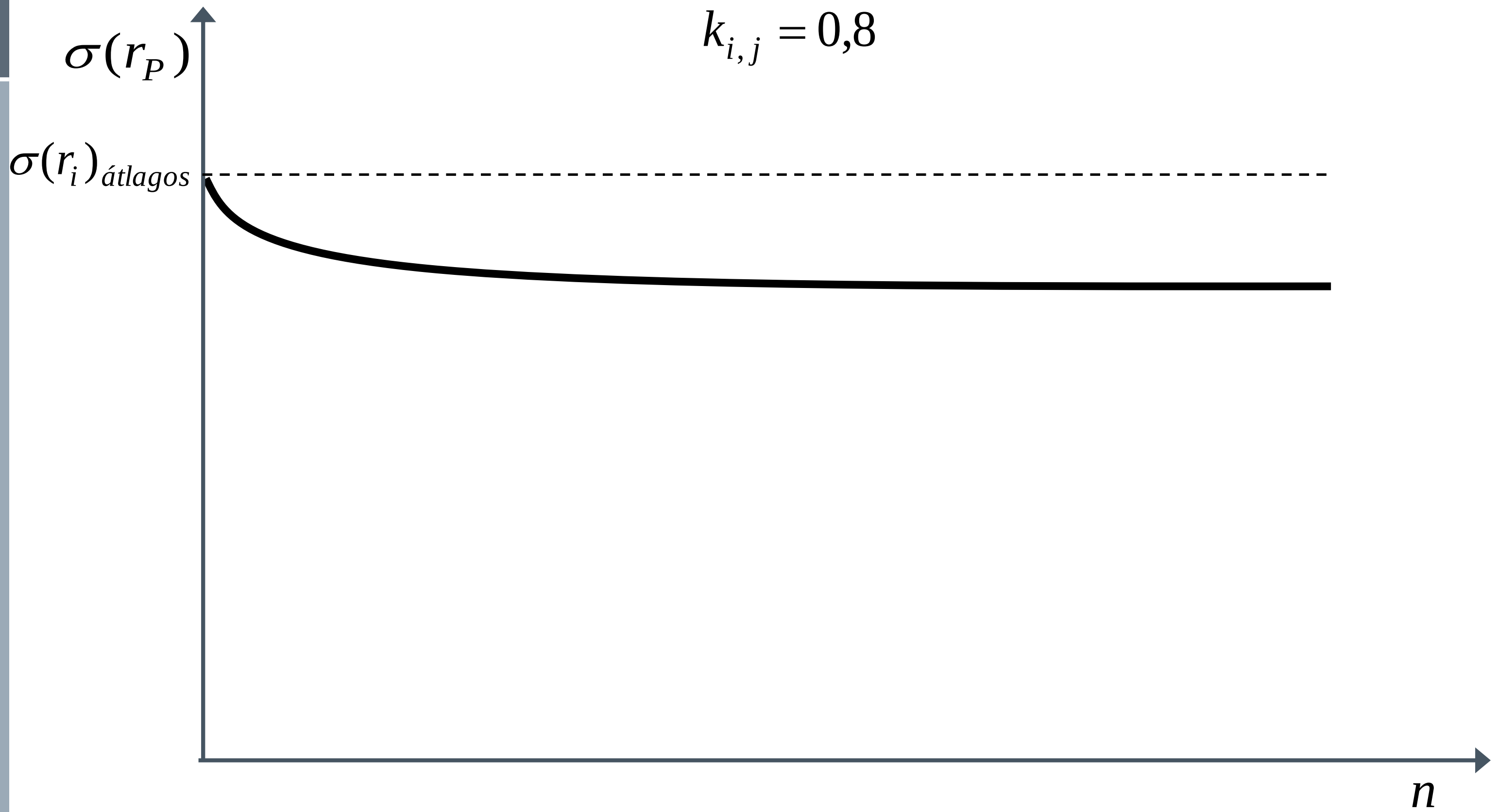
$$\sigma(r_P) = \sigma(r_i)_{átlagos}$$

$$k_{i,j} = 0; \quad n \Rightarrow \infty$$

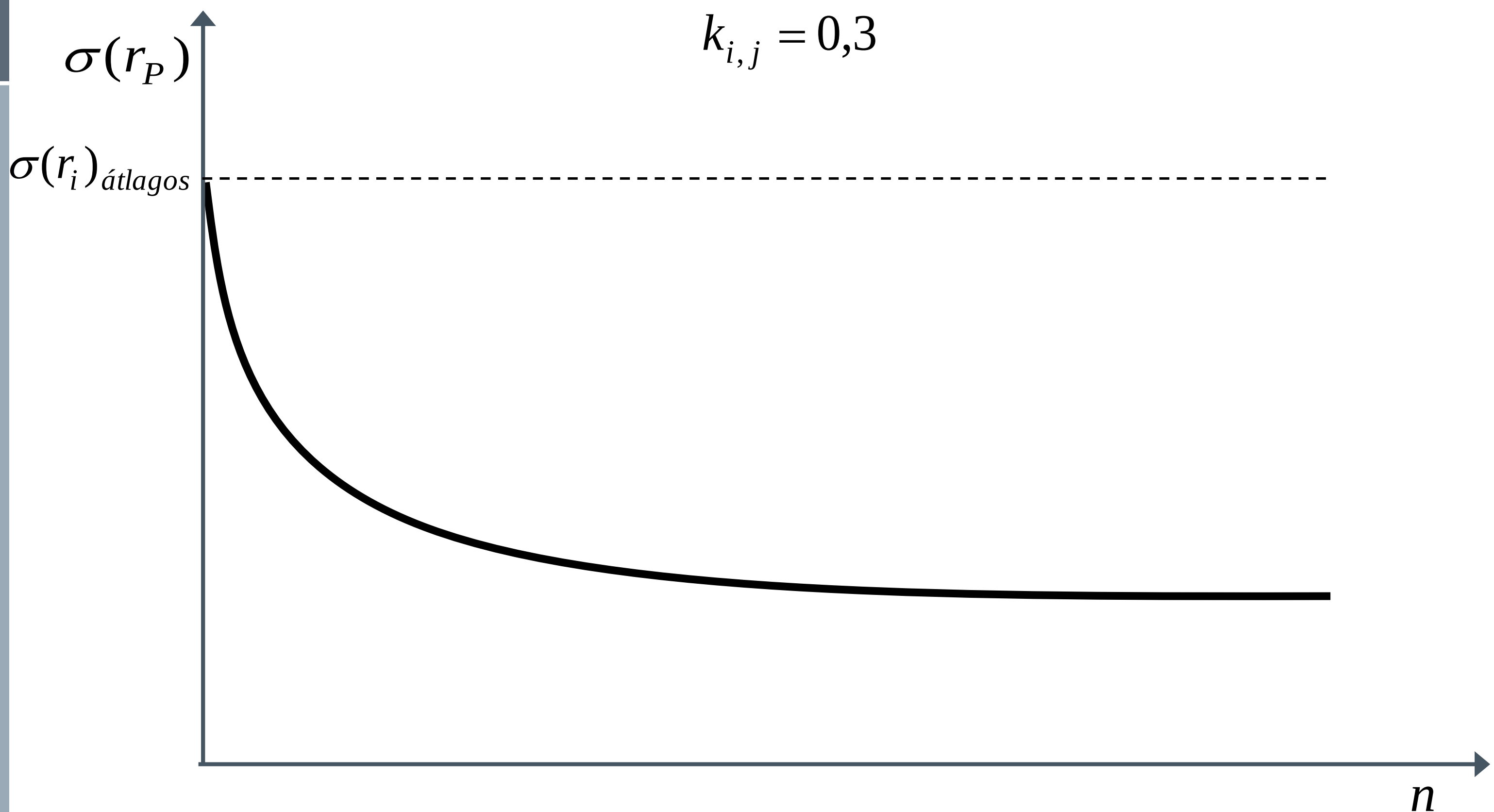
$$\sigma(r_P) = \frac{\sqrt{n}}{n}\sigma(r_i)_{átlagos} = 0$$

- Köztes esetek
  - 0 és 1 között
    - A portfólió szórása az elemszám növelésével nulláig nem, de valamelyest azért csökken.
    - Ilyenkor valamennyit kioltanak a részek egymás ingadozásából, de mivel tendenciózusan egy irányban ingadoznak, ennek határa van.

BME



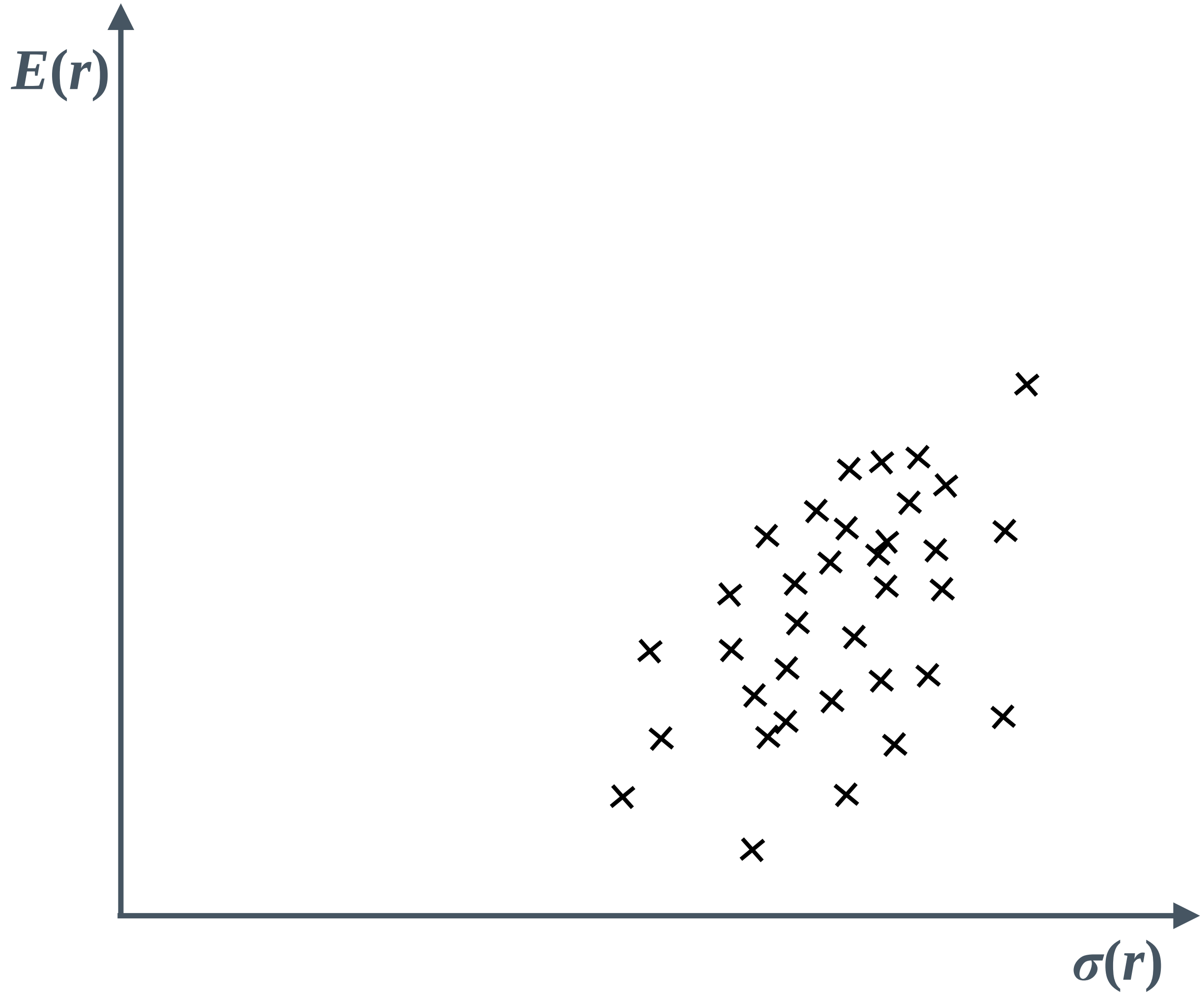
BME



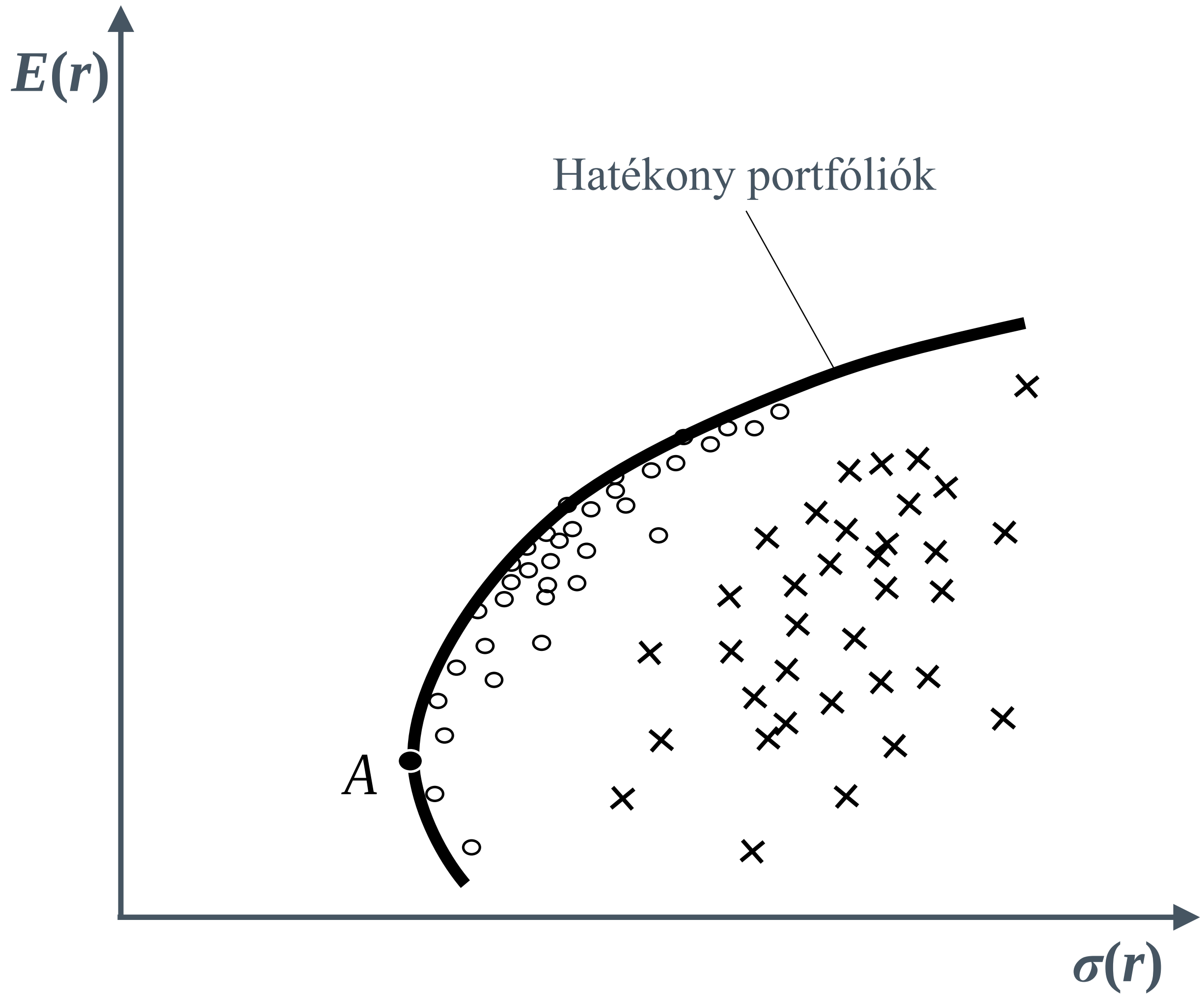
- Az általános szabály
  - Amennyiben nincs teljes függőség, a nagyobb elemszám kisebb szóráshoz vezet. Minél kisebbek a páronkénti korrelációk, annál gyorsabban és annál kisebbre csökken a szórás.
- Portfólióelmélet alapgondolata
  - Nem csak az egyes elemek szórásával kell foglalkozni, hanem korrelációs kapcsolatrendszerével is.
  - A nagyobb elemszám rendszerint csökkeni a szórást
    - Érdemes portfóliót tartani

2.2.3 Portfóliók a „világ összes kockázatos befektetéséből”

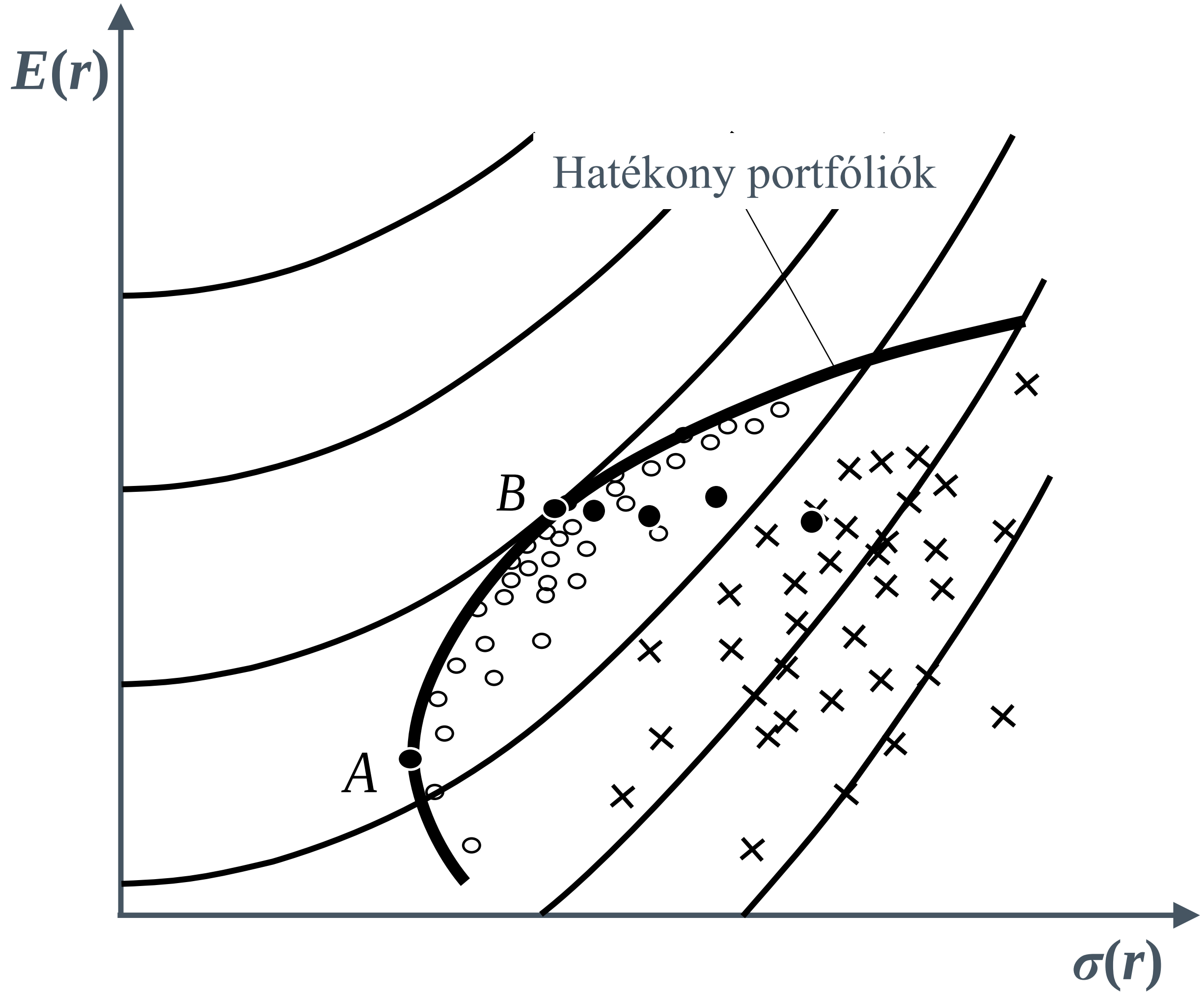
- A „világ összes kockázatos értékpapírjából” előállítható portfóliók
  - Egy „csomóban” kell, hogy legyenek.
  - Az értékpapírok bármely kombinációjával sem tudjuk a szórást kioltani.


$E(r)$
$\sigma(r)$

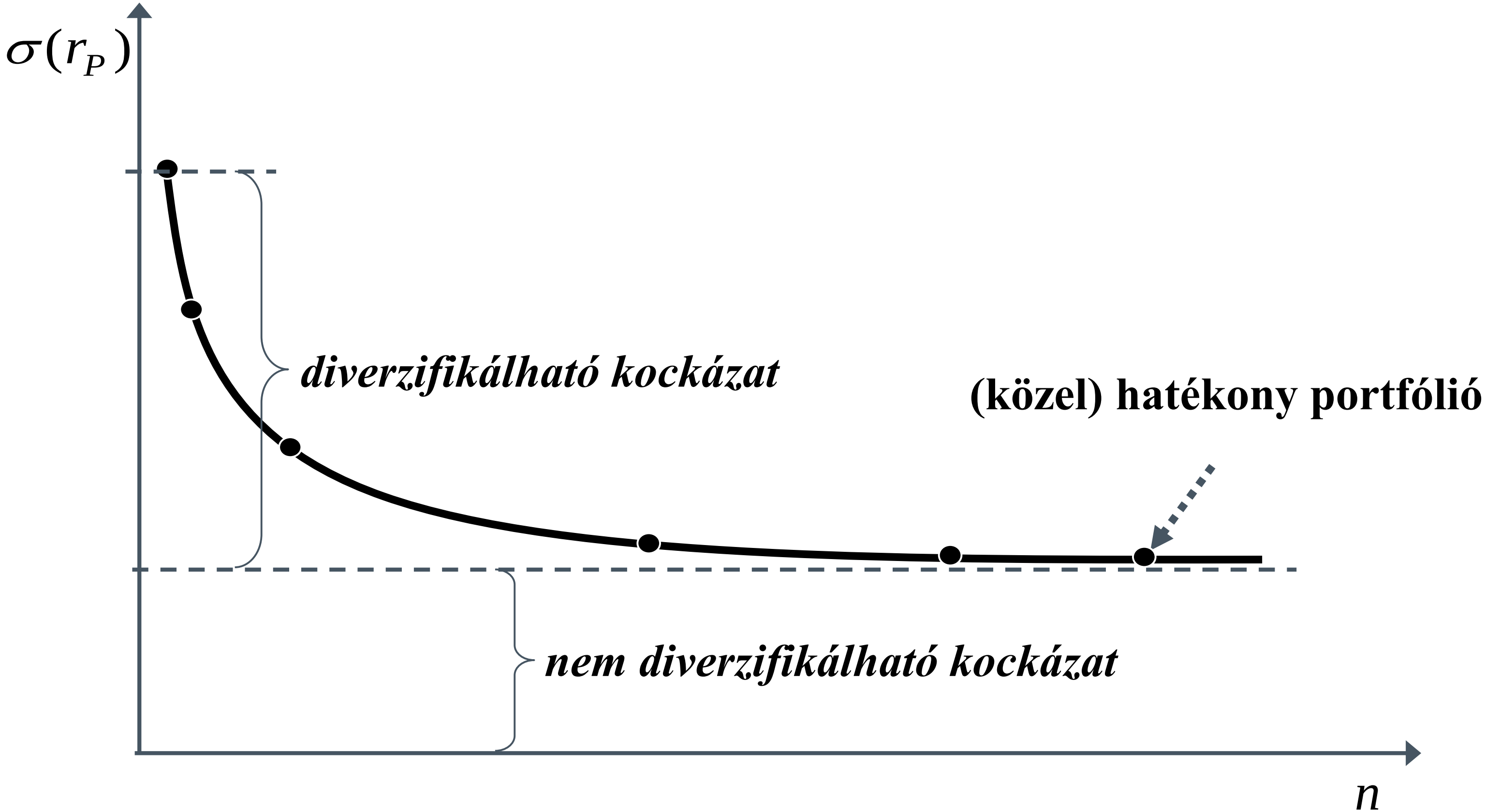
BME

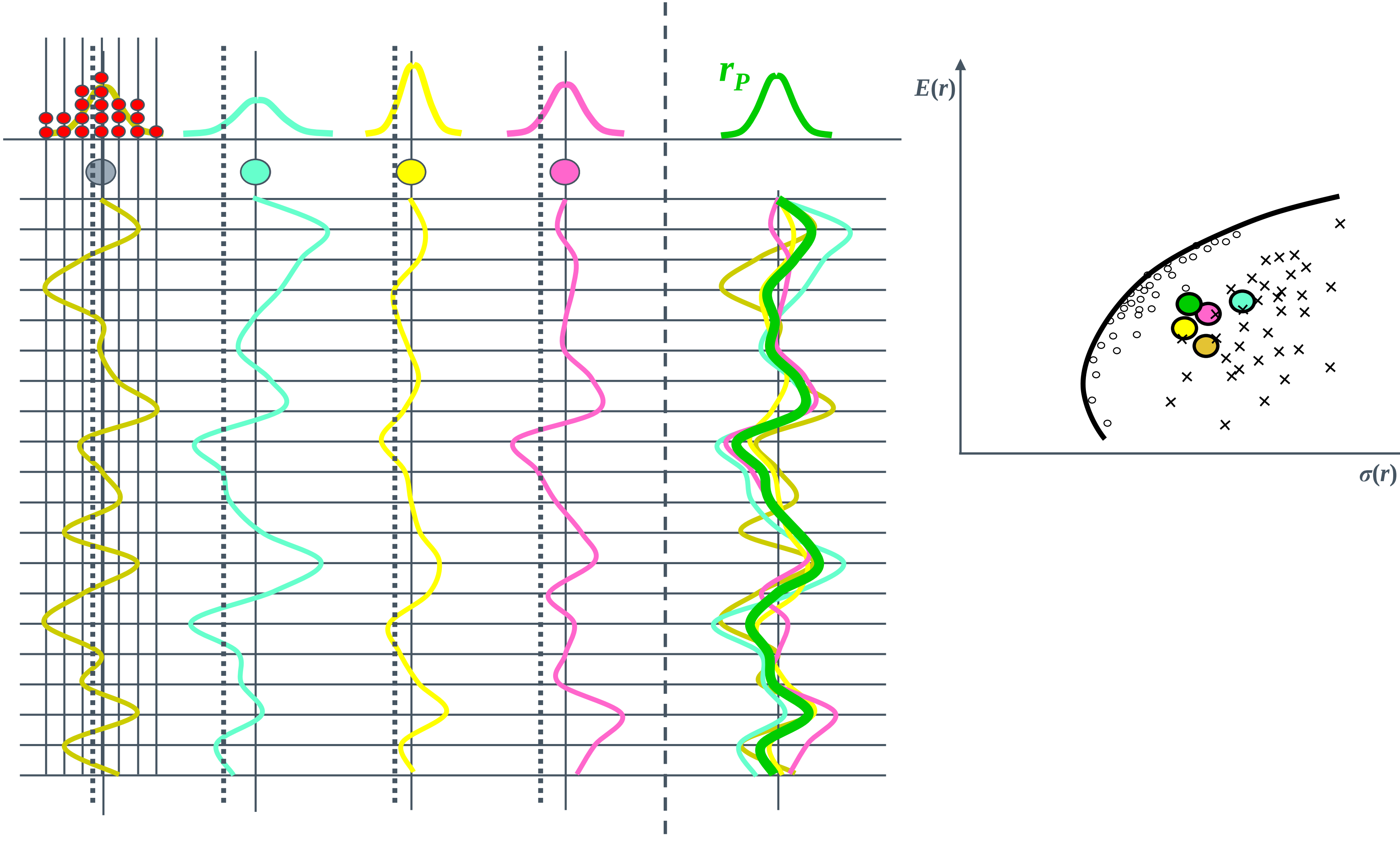


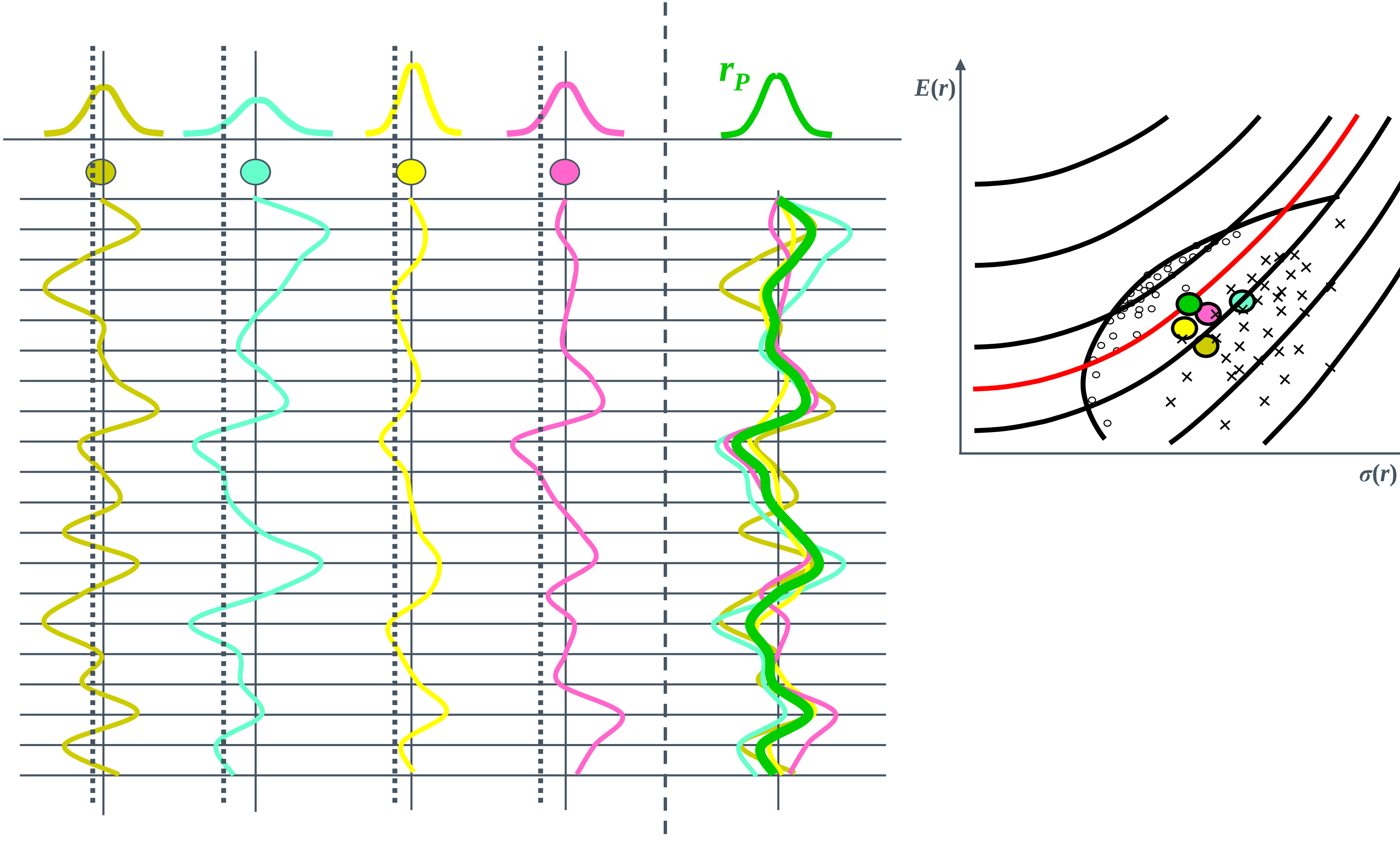
- Hatékony portfóliók
  - „Kategóriájuk legjobbjai”
  - Adott kockázati szinten a legmagasabb várható hozamot, adott várható hozamnál a legkisebb kockázatot adják.



E(r)
Hatékony portfóliók
B
A
σ(r)


$\sigma(r_P)$
diverzifikálható kockázat
(közel) hatékony portfólió
nem diverzifikálható kockázat
n


r_P
$E(r)$
$\sigma(r)$

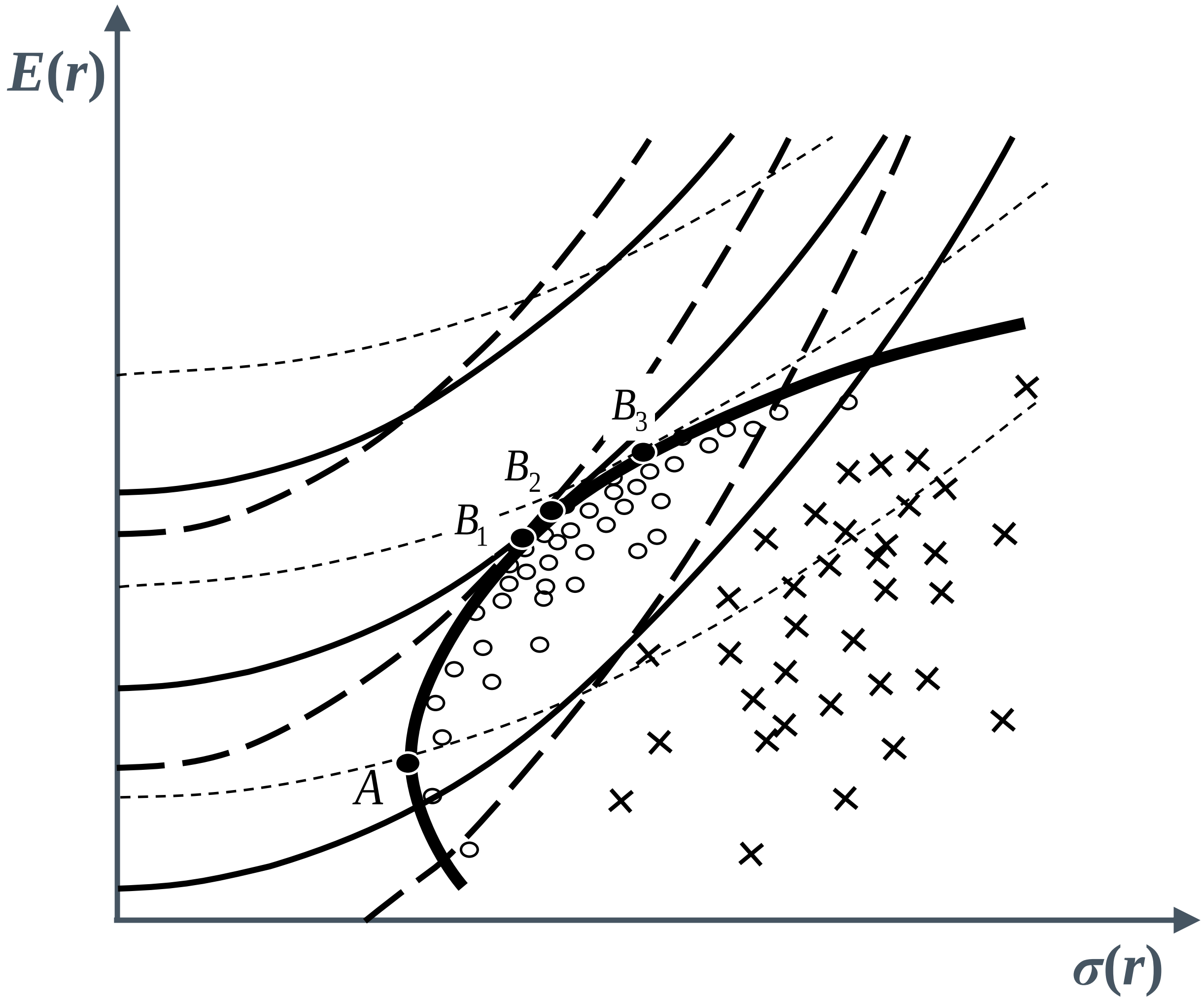

r_P
$E(r)$
$\sigma(r)$

BME

2.2.4 Markowitz-féle modell

- Diverzifikálni jó!
- A racionális szereplők ezt fogják csinálni
- Méghozzá a maximumot kiaknázva, hatékony portfóliókat tartva.

Markowitz-féle modell



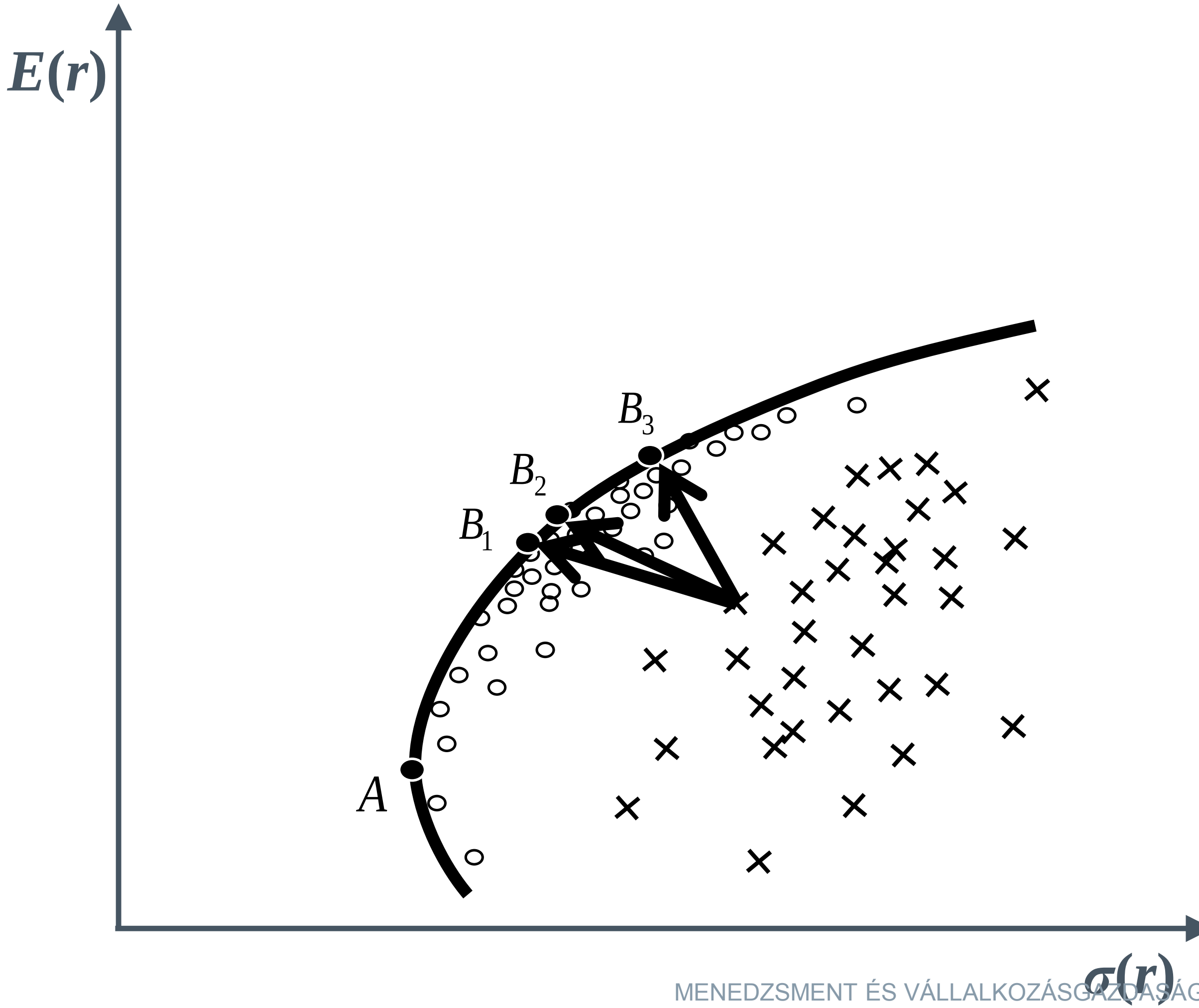
BME

› Markowitz-féle modell értékelése

- „Forradalmi”
- Az egyes hatékony portfóliók között nincs különbség: Markowitz csupán „étlapot” kínál.
- Nem elég egy befektetésnek csupán a várható hozamát és a kockázatát vizsgálni: a portfóliótartás jelensége miatt, annak a többi befektetéshez való viszonya is döntő fontosságú.
- Egy befektetés tényleges kockázatának érzékelése, megítélése befektetőnként eltérő. Ezért a Markowitz-féle portfólióelmélet gyakorlati alkalmazása szinte reménytelen.

› Probléma Markowitz-féle modellel

BME

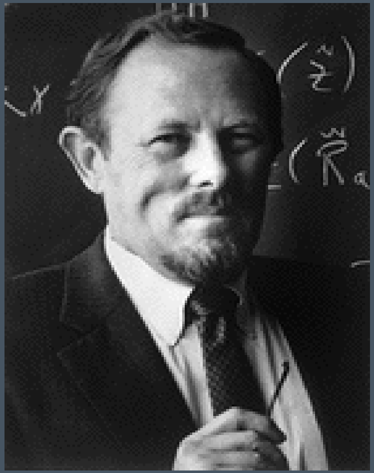


2.3 Piaci portfólió tartása

2.3.1 Sharpe-féle modell

- Markowitztól tahát annyit tudtunk meg, hogy a kockázat érzékelése a portfólióba való beágyazottság (a korrelációs kapcsolatrendszer) miatt meglehetősen bonyolult.

WILLIAM SHARPE



University of California at Los Angeles (Business Administration, majd közgazdaságtan)

PhD 1961-ben („Single factor model of security prices”)

A „ Capital asset pricing model”-t 1962-ben publikálta (1964-ben fogadták el)

Egymástól függetlenül publikálták még: John Lintner, Jan Mossin és Jack Treynor.

Nobel-díj 1990-ben

„Sharpe-modell”

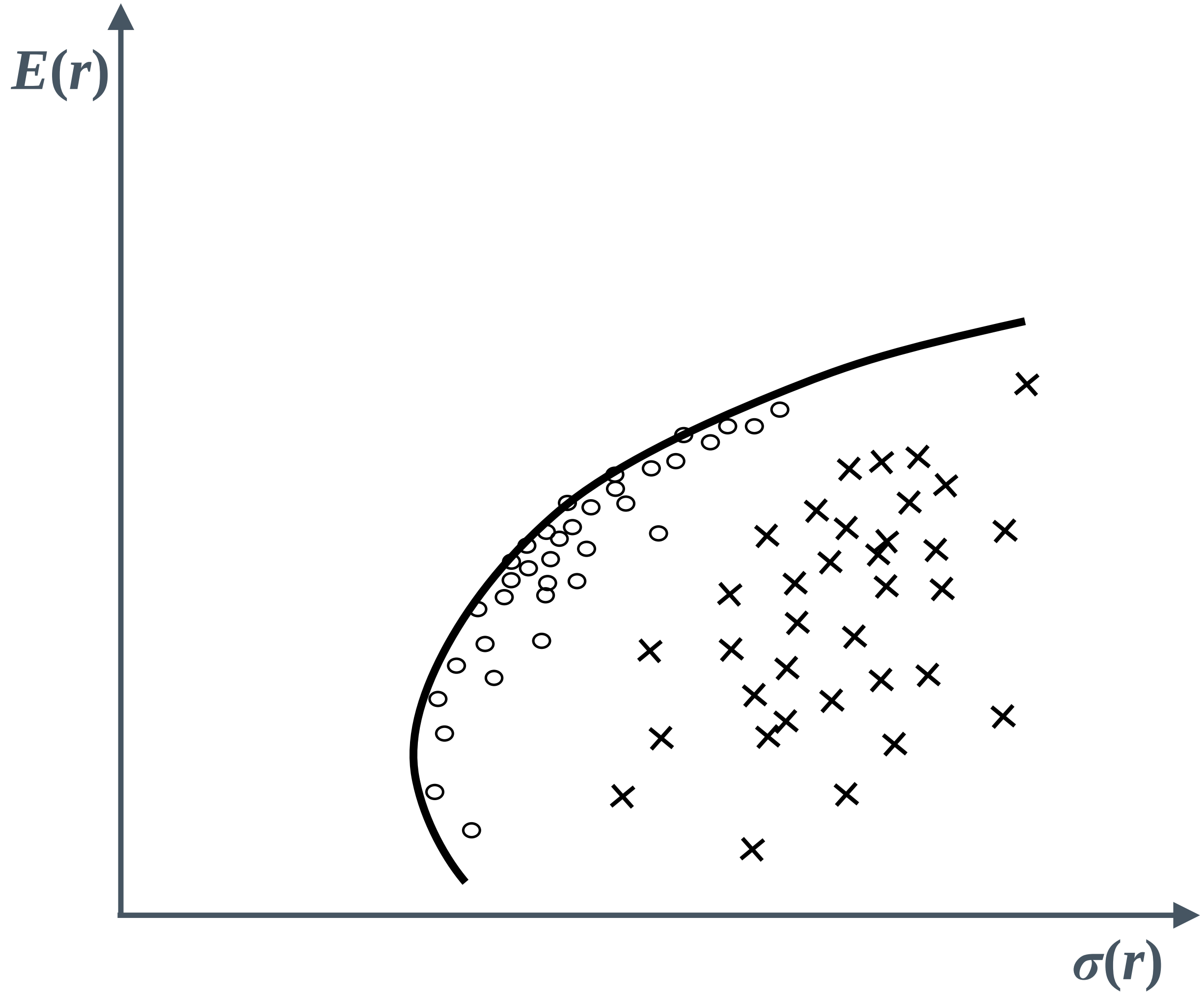
BME

Sharpe peremfeltételei

- Tőkepiac
  - Sok befektető van, akik árelfogadók
  - Az adóknak és törvényi szabályozóknak nincs hatása a befektetői preferenciákra
  - Tökéletes az informáltság
  - Nincsenek tranzakciós költségek
- Befektetők
  - Markowitz-féle portfólió-modellt követik
  - <u>Várakozásaik homogének</u>
- Befektetési lehetőségek
  - Tőzsdén forgalmazott kockázatos értékpapírok, valamint <u>kockázatmentes befektetés és hitelfelvétel</u>.
  - A kockázatmentes befektetések és hitelfelvételek kamata megegyező és állandó.

- Homogén várakozások hipotézise
  - A befektetők azonos módon elemeznek
  - Közgazdasági „világnézetük” azonos
  - Tudásuk azonos, mind tökéletesen informáltak
  - Befektetési várakozásaik megegyeznek
  - Ugyanolyan jövőbeli várható pénzáramlásokra és valószínűség-eloszlásokra számítanak
  - Befektetők „tojáshéja” „ugyanott van”

BME



› A kockázatmentes lehetőség bevonásának következménye:

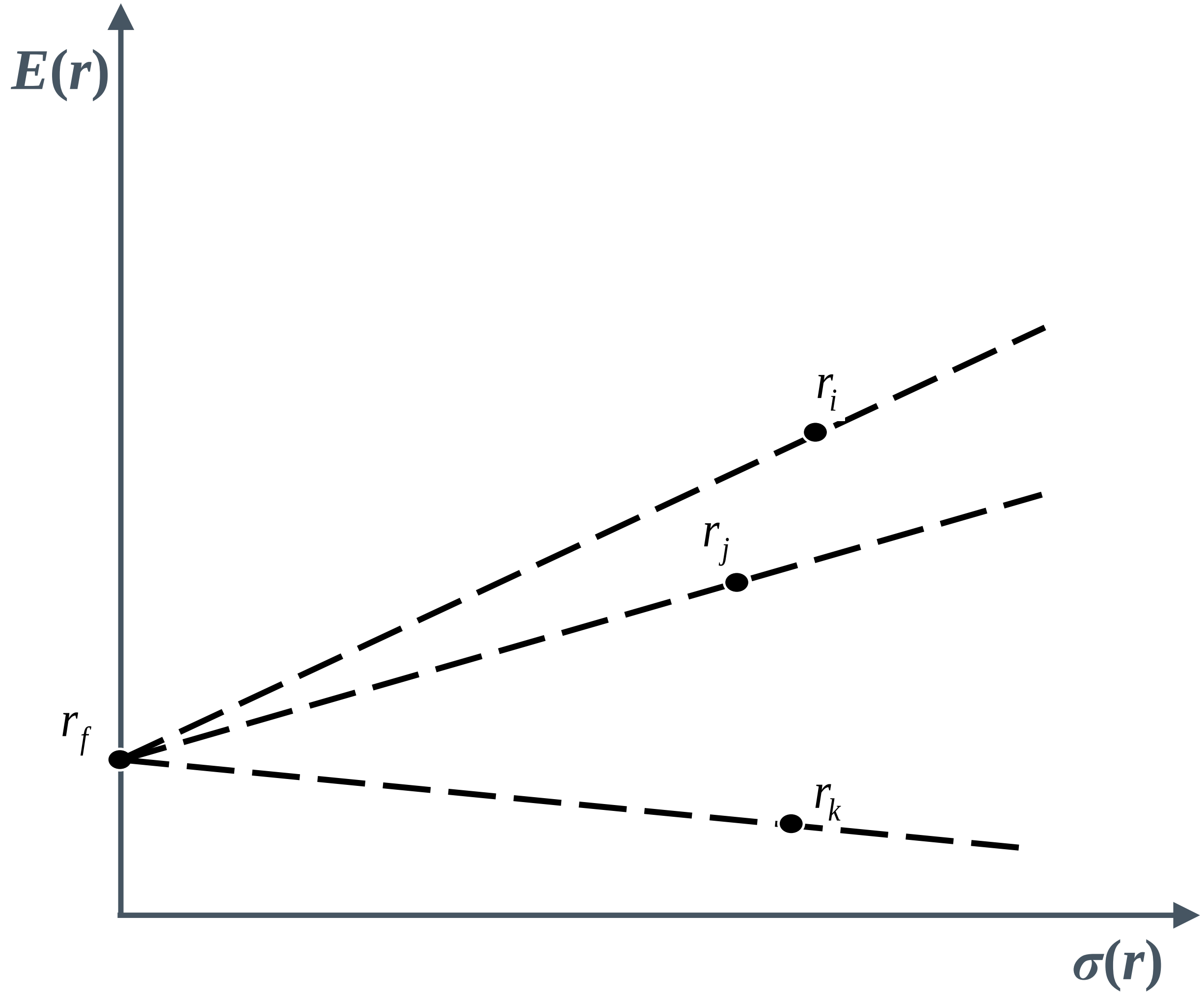
$$E(r_P) = a_i E(r_i) + a_j E(r_j)$$

$$\sigma(r_P) = \sqrt{a_i^2 \sigma^2(r_i) + a_j^2 \sigma^2(r_j) + 2k_{i,j} a_i \sigma(r_i) a_j \sigma(r_j)}$$

$$= \sqrt{0 + a_j^2 \sigma^2(r_j) + 0} = \sqrt{a_j^2 \sigma^2(r_j)}$$

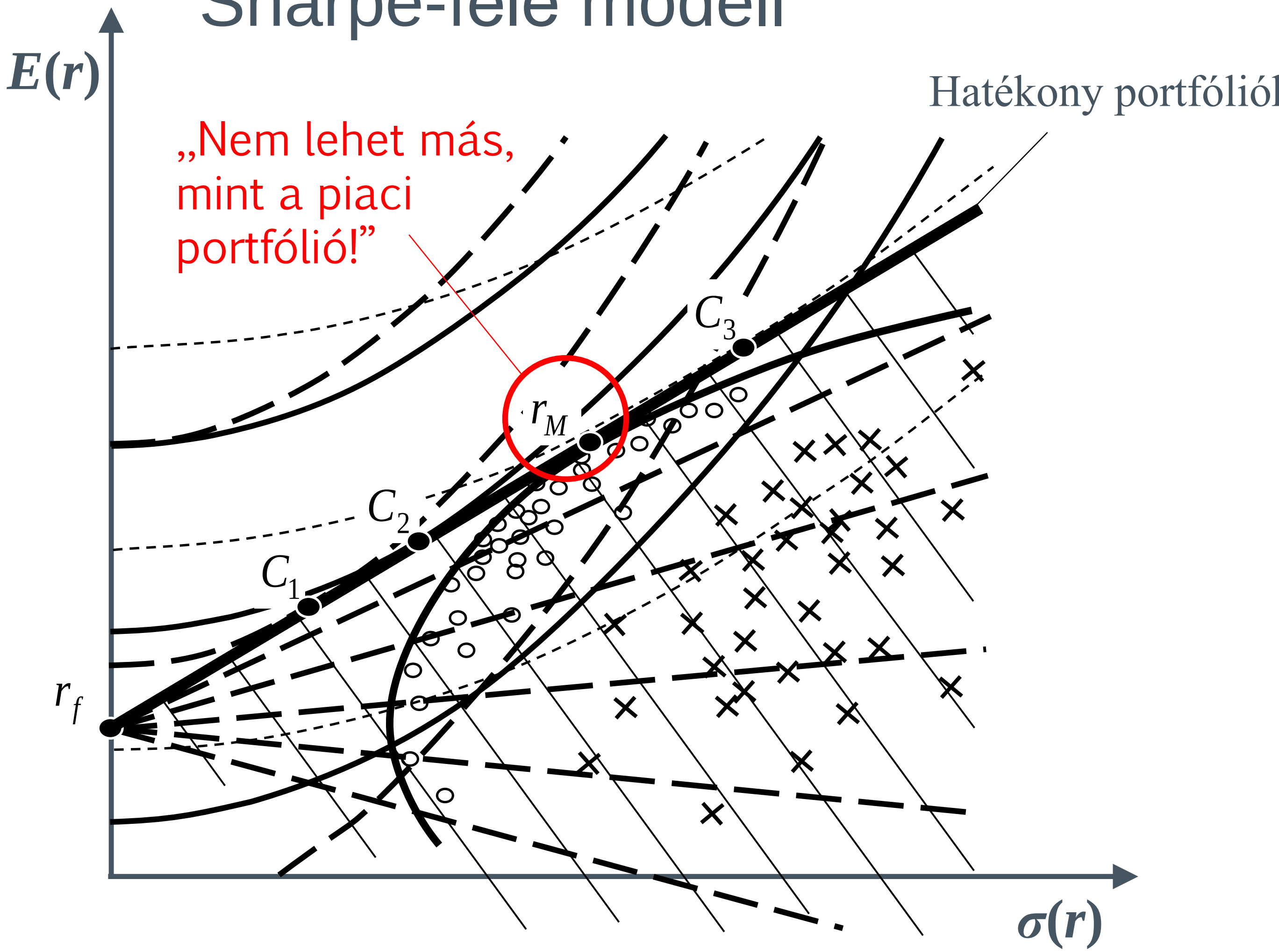
$$= a_j \sigma(r_j)$$

BME



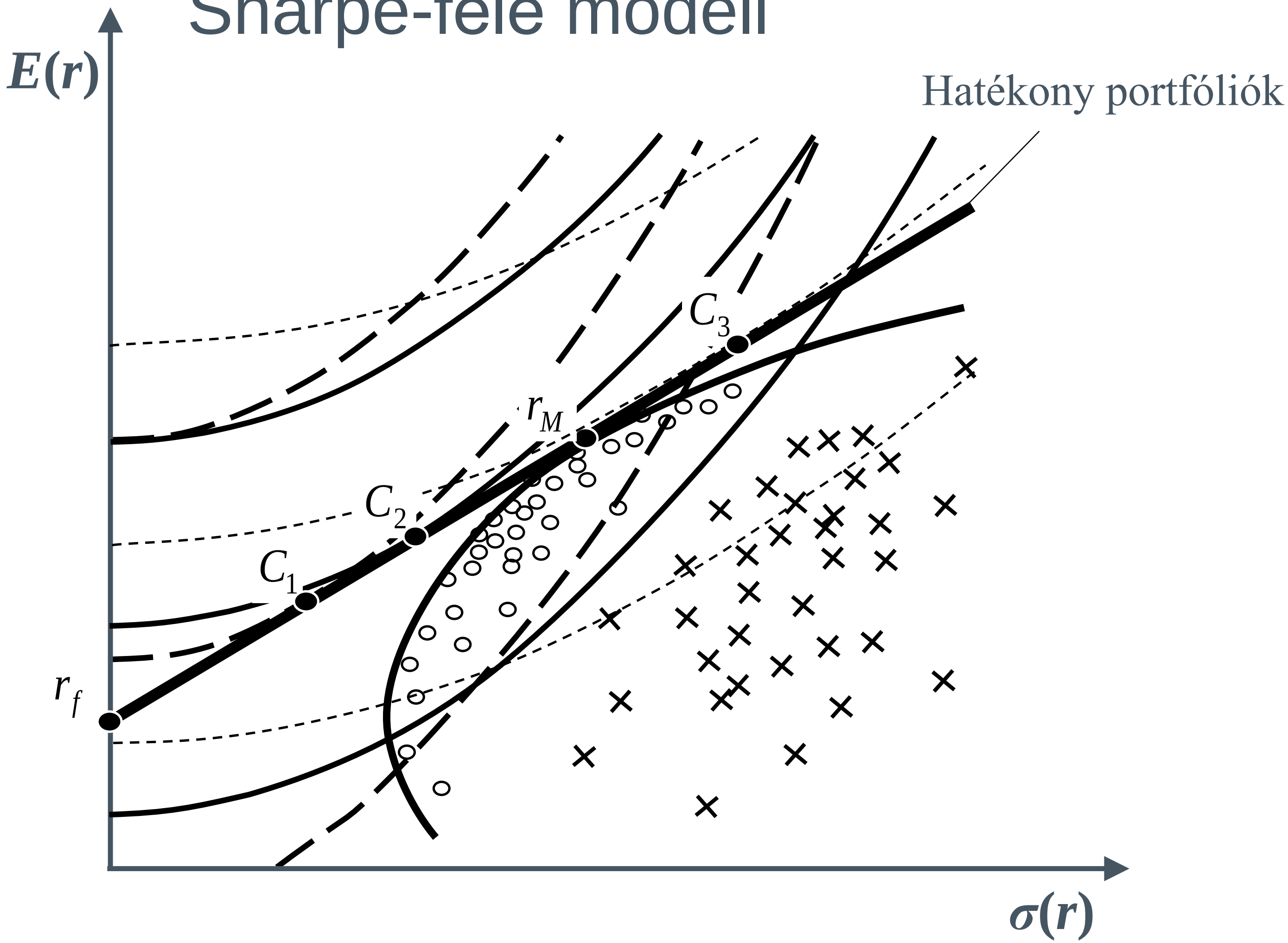
- Kombináljuk a kockázatmentes lehetőség bevonását és a homogén várakozások feltételezését!

Sharpe-féle modell



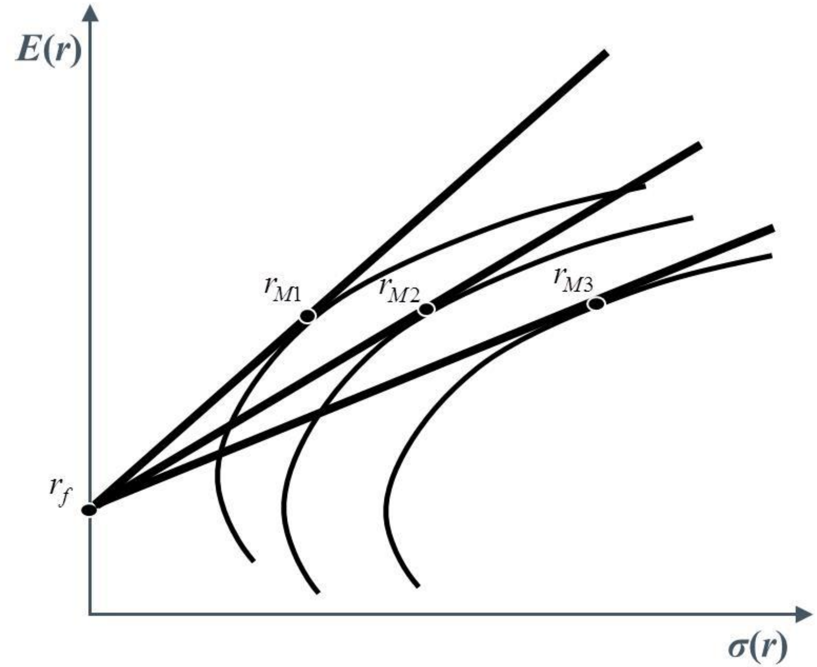
- Mivel ismerjük az M portfóliót, már meg tudjuk ragadni a kockázatosságot is…
  - M „nem lehet más, mint a piaci portfólió!”
- Összefoglalva
  - Minden befektető a kockázatos értékpapírpiac egészének arányait mintázó portfólióban, azaz a piaci portfólióban tartja kockázatos befektetéseit.
  - Ezt kombinálja a kockázatmentes lehetőséggel.
- Ez a Sharpe-féle modell

Sharpe-féle modell



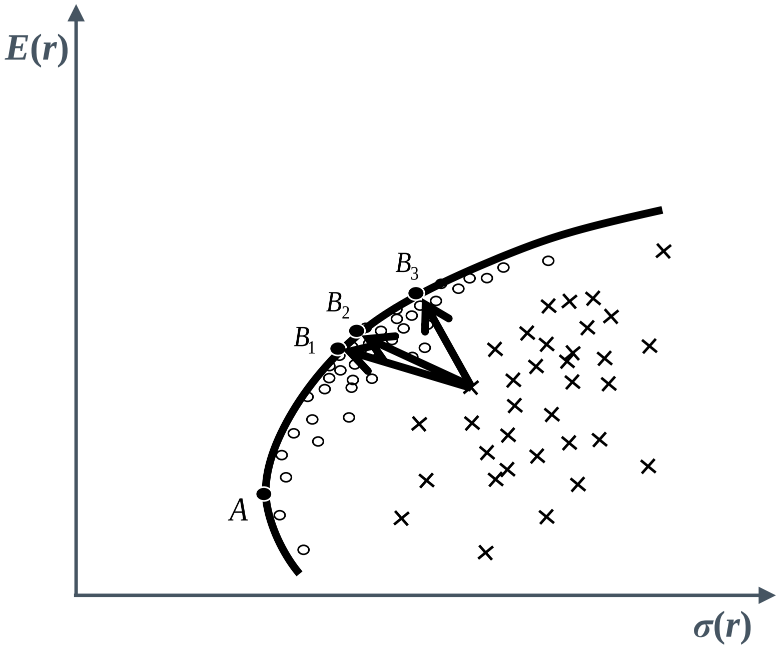
Homogén várakozások sajátos szerepe

- Ha nem lennének homogén várakozások, akkor nem esnének egybe a befektetők kockázatos portfóliói, így ekkor nem lenne egységesen tartott *M* piaci portfólió sem.

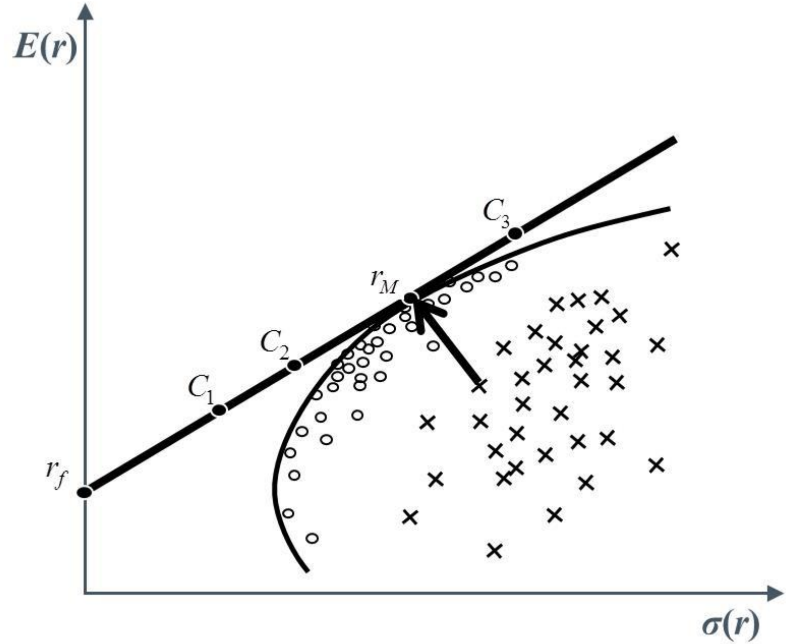


BME

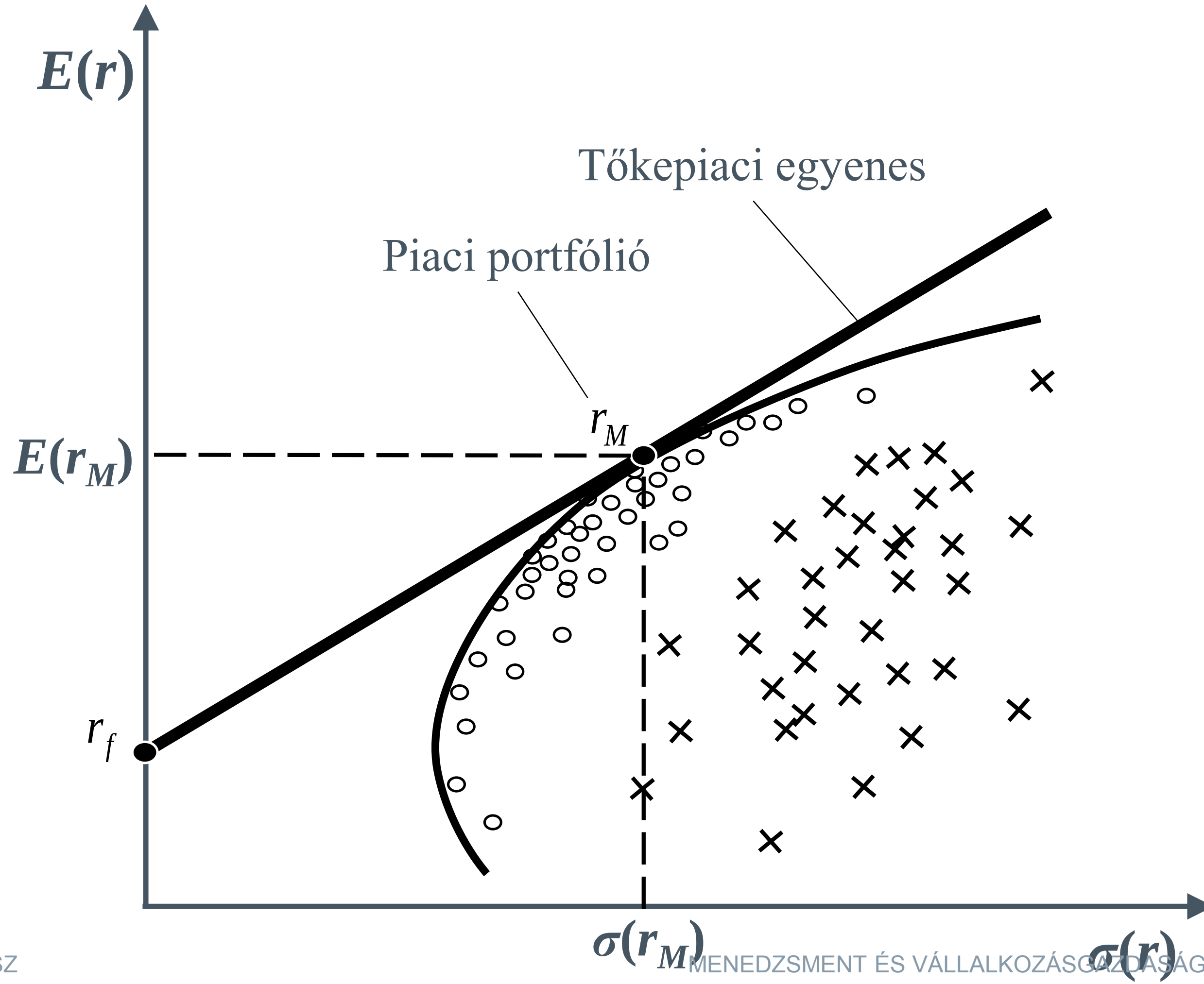
Markowitz-féle modell



Sharpe-féle modell



2.3.2 Tőkepiaci egyenes



› Egyéni választások:

$$E(r_P) = a_f r_f + a_M E(r_M)$$

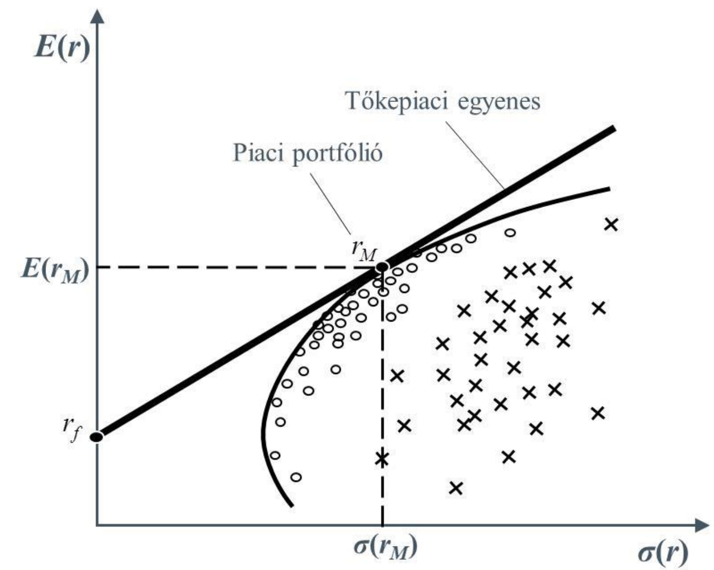
$$\sigma(r_P) = a_M \sigma(r_M)$$

› Kockázat piaci ára

- A piaci portfólió (az „átlagos piaci kockázat”) egységnyi szórásra eső
- Kockázati prémiuma:

$$\frac{E(r_M) - r_f}{\sigma(r_M)}$$

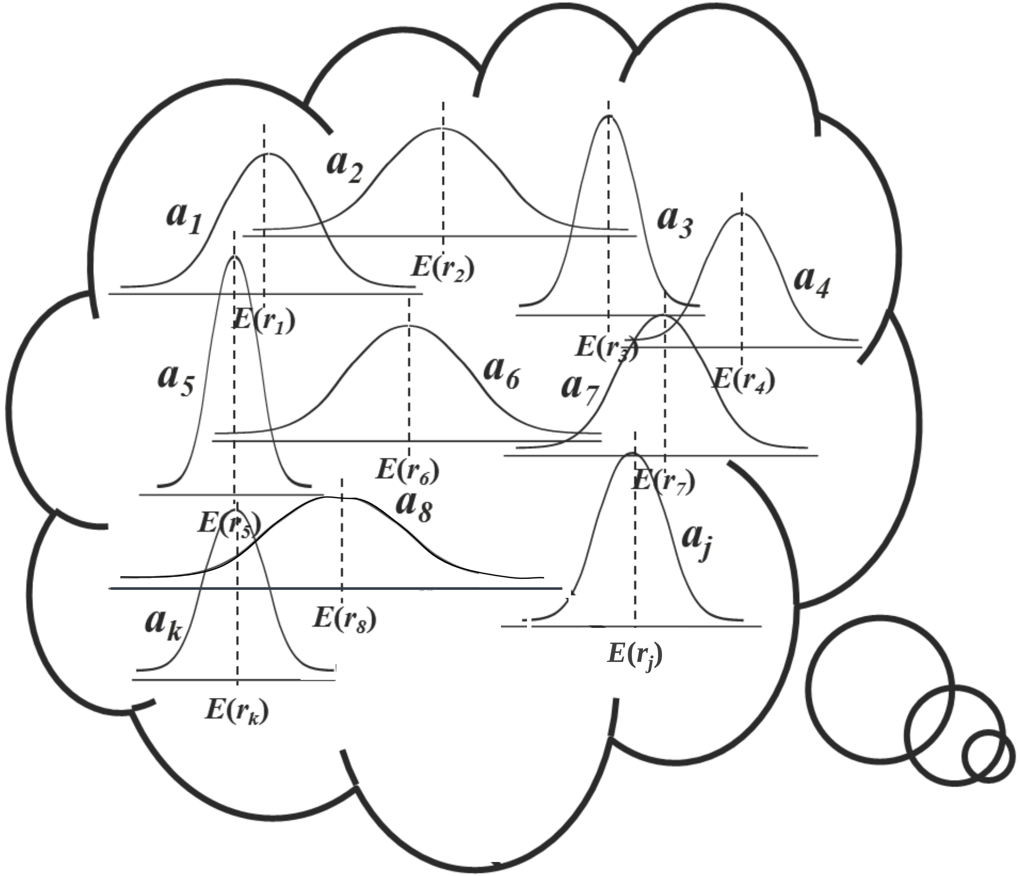
- Fedezeti ügylet



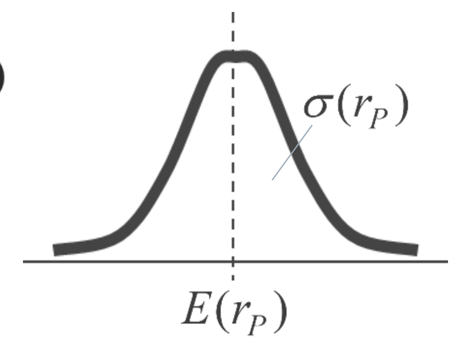
2.4 Tőkepiaci árfolyamok modellje

› A piaci portfólió tartásának belátásával megnyílik az út az egyes befektetések releváns kockázatának megadására.
  – Ismerjük a portfólió-környezetet, a „zsebet”.
› Mitől függ, hogy egy i befektetés (értékpapír) kedvező vagy kedvezőtlen?
  – A releváns kockázat független f-től, csak M-től függ, tehát a kockázat érzékelése mindenkinek azonos!

BME

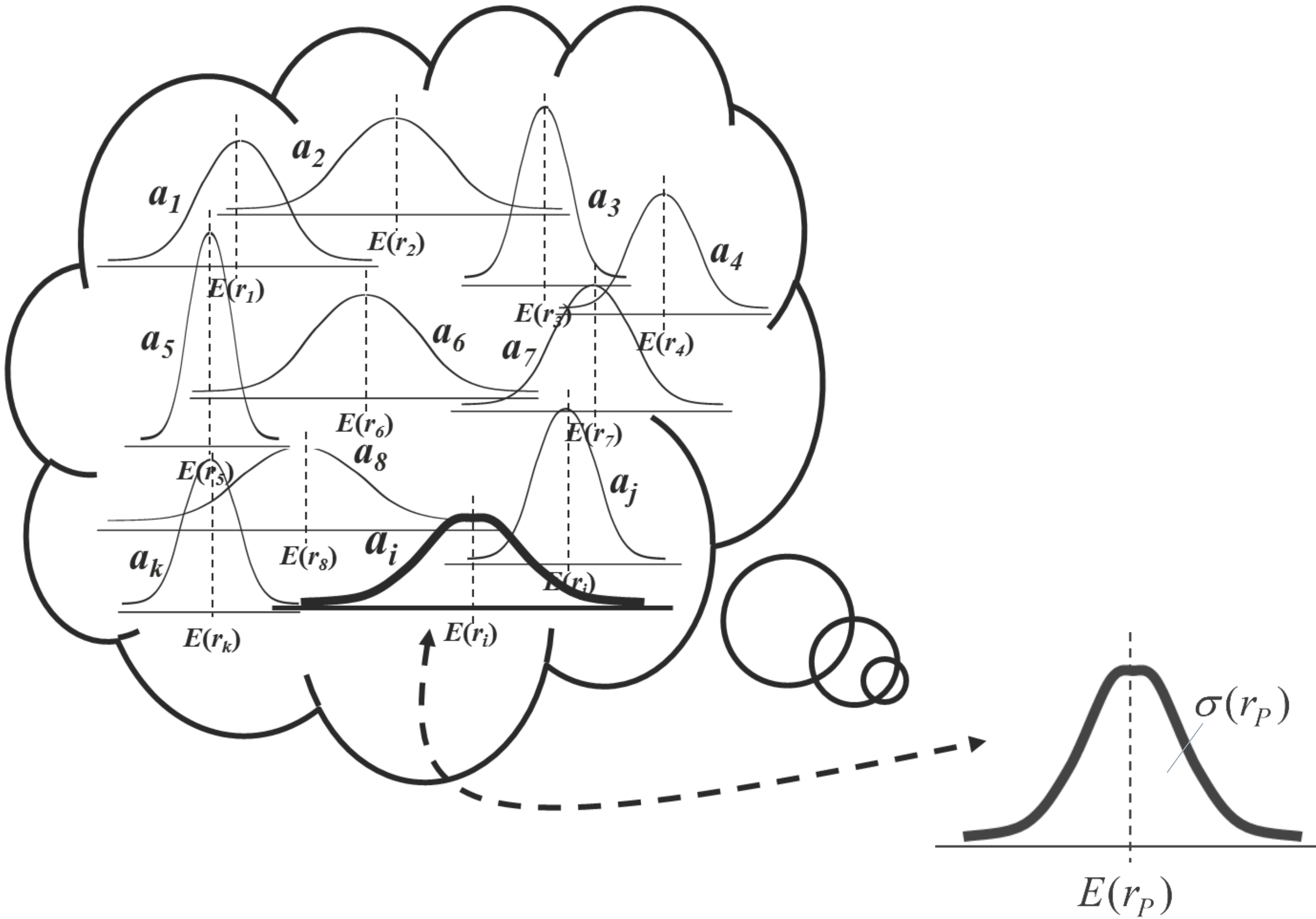


a_1
a_2
a_3
a_4
a_5
a_6
a_7
a_8
a_j
a_k
$E(r_1)$
$E(r_2)$
$E(r_3)$
$E(r_4)$
$E(r_5)$
$E(r_6)$
$E(r_7)$
$E(r_8)$
$E(r_j)$
$E(r_k)$

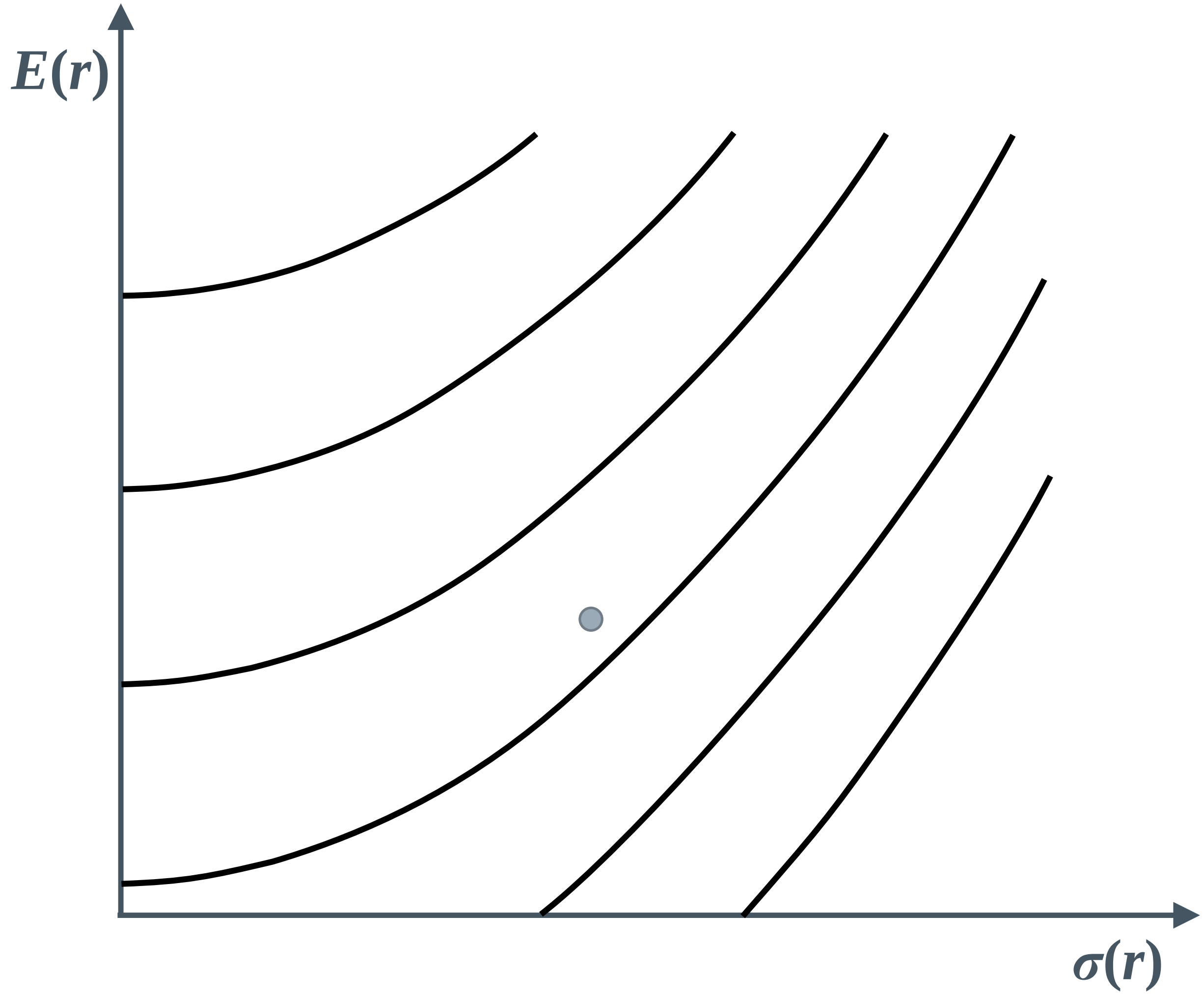


$\sigma(r_P)$
$E(r_P)$

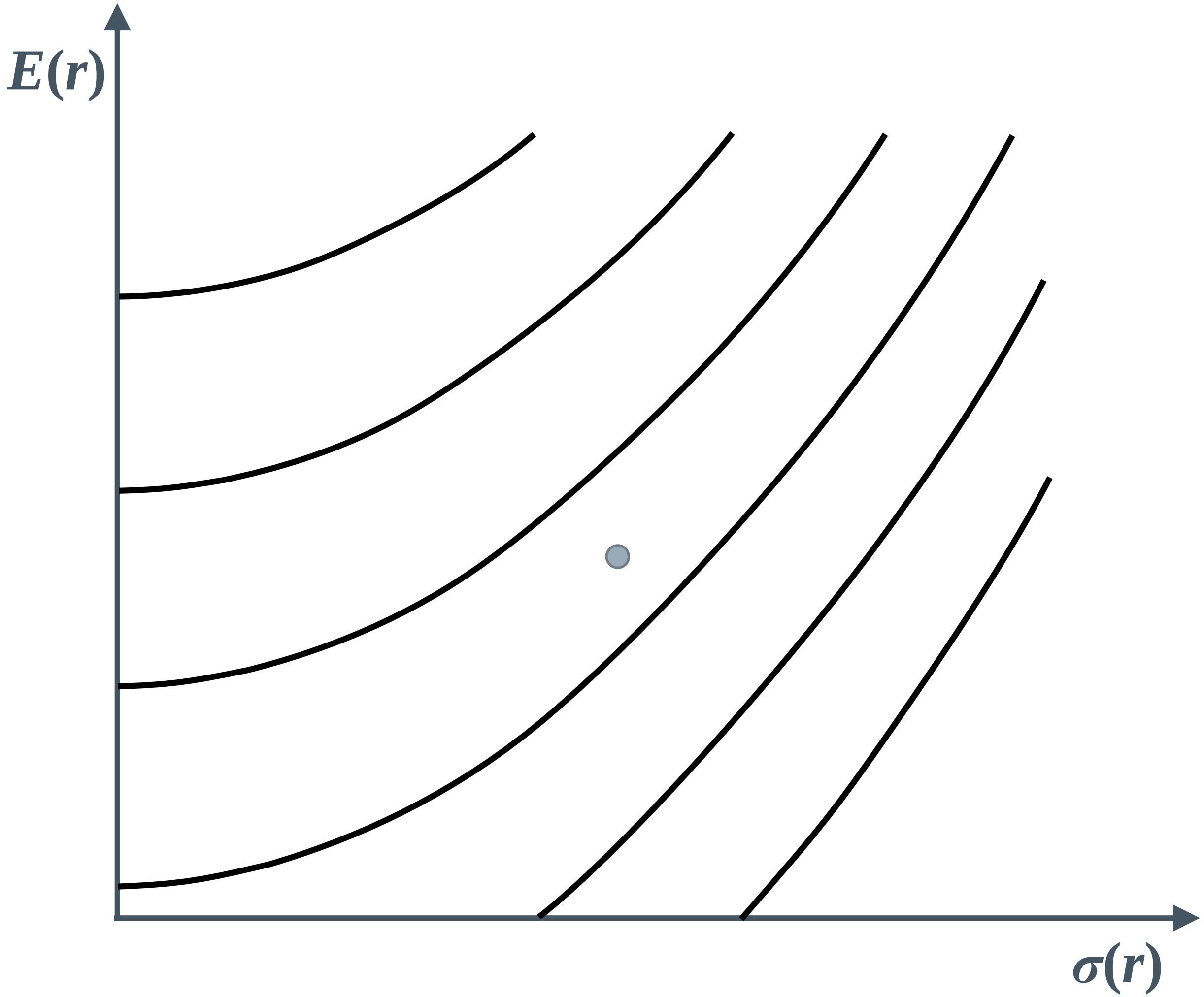
BME



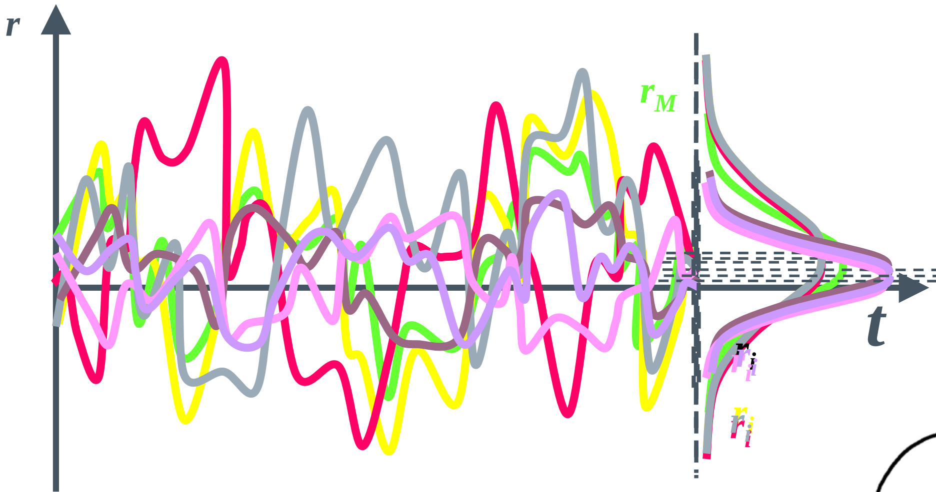
a_1
a_2
a_3
a_4
a_5
a_6
a_7
a_8
a_i
a_j
a_k
$E(r_1)$
$E(r_2)$
$E(r_3)$
$E(r_4)$
$E(r_5)$
$E(r_6)$
$E(r_7)$
$E(r_8)$
$E(r_i)$
$E(r_j)$
$E(r_k)$
$\sigma(r_P)$
$E(r_P)$

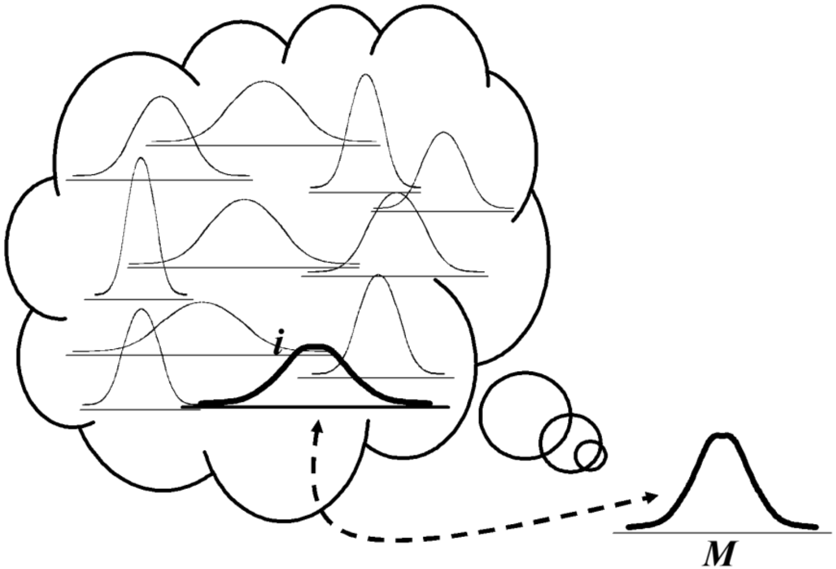

$E(r)$
$\sigma(r)$

BME

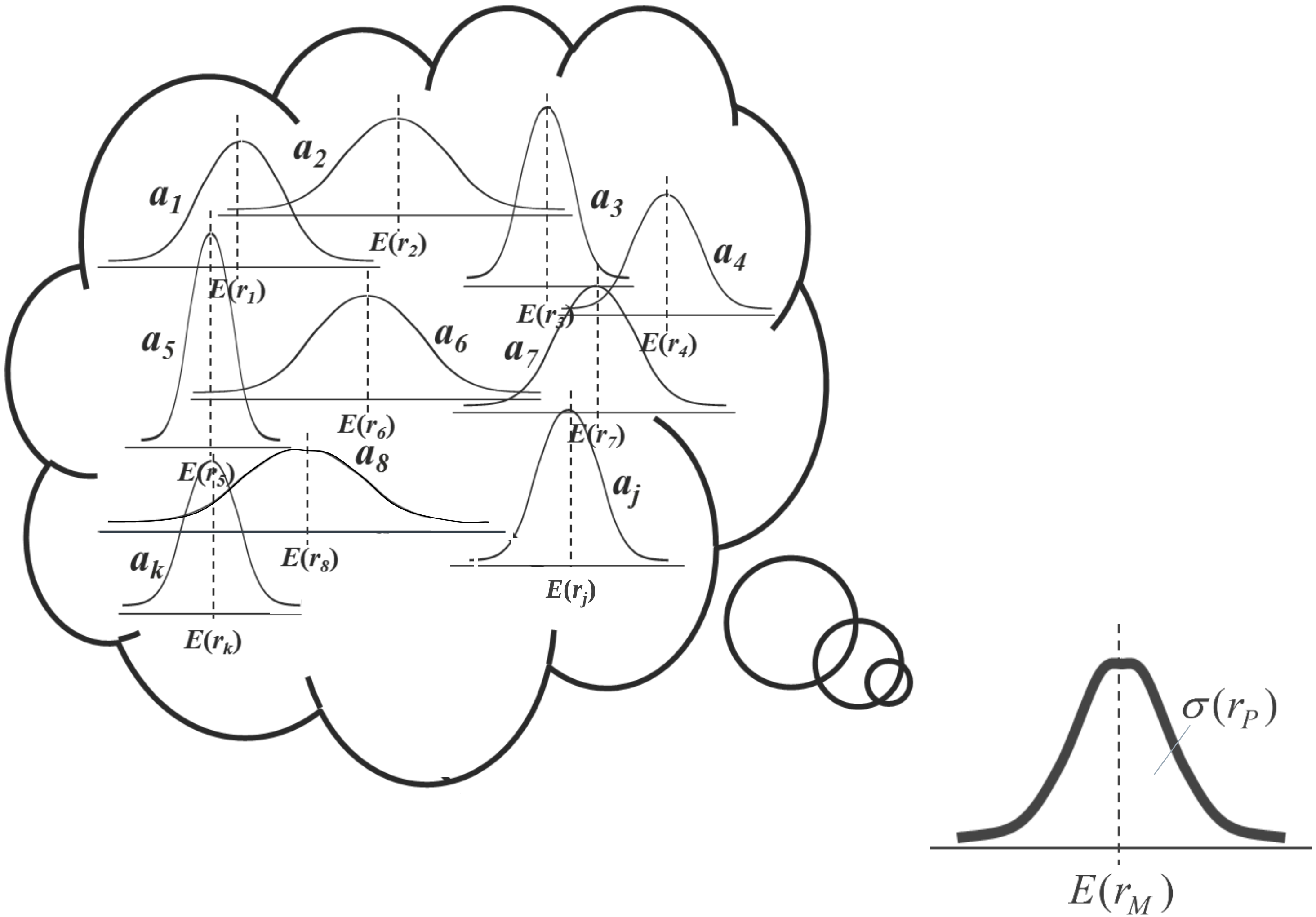


› Nézzük előbb intuitív irányból!

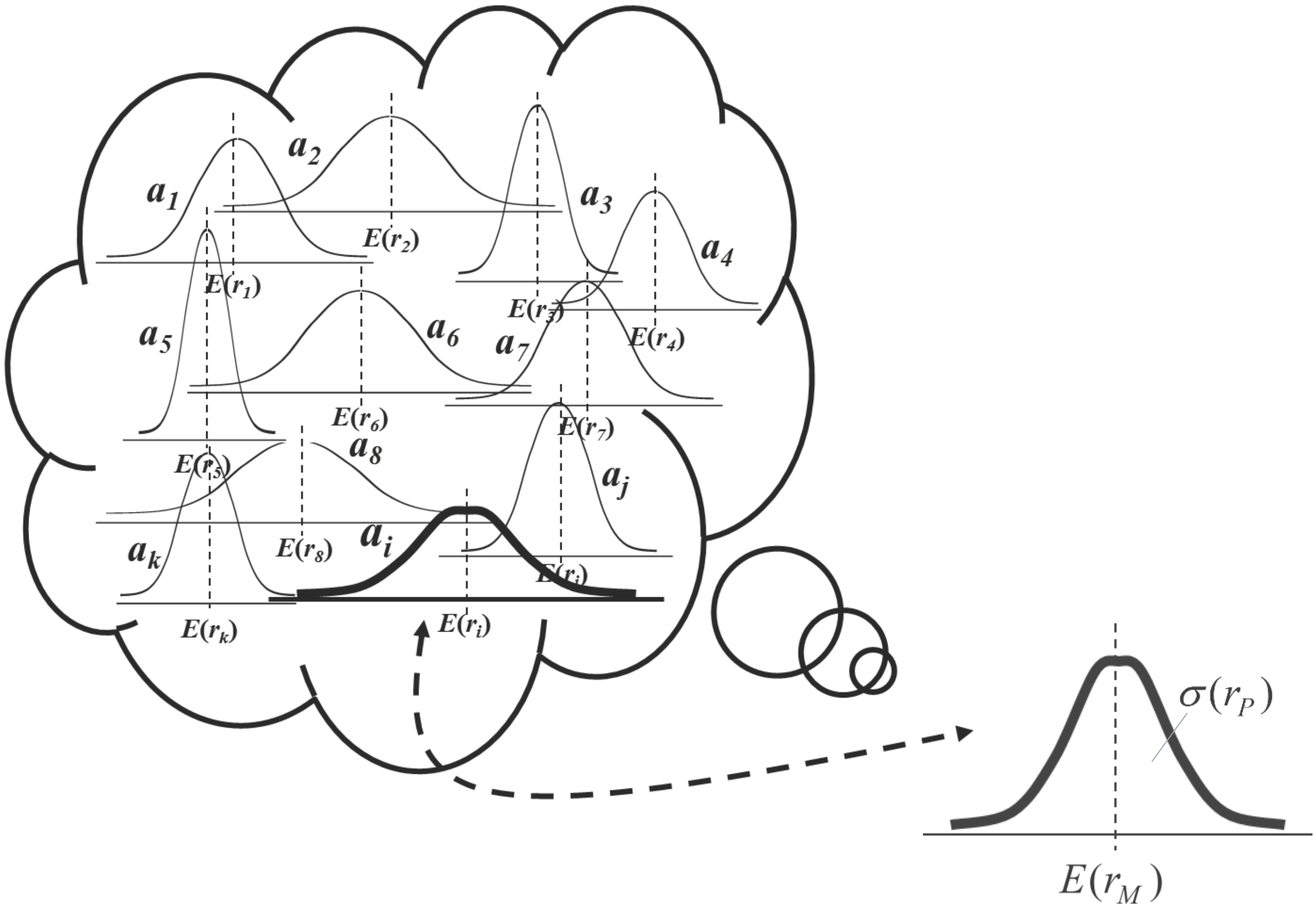




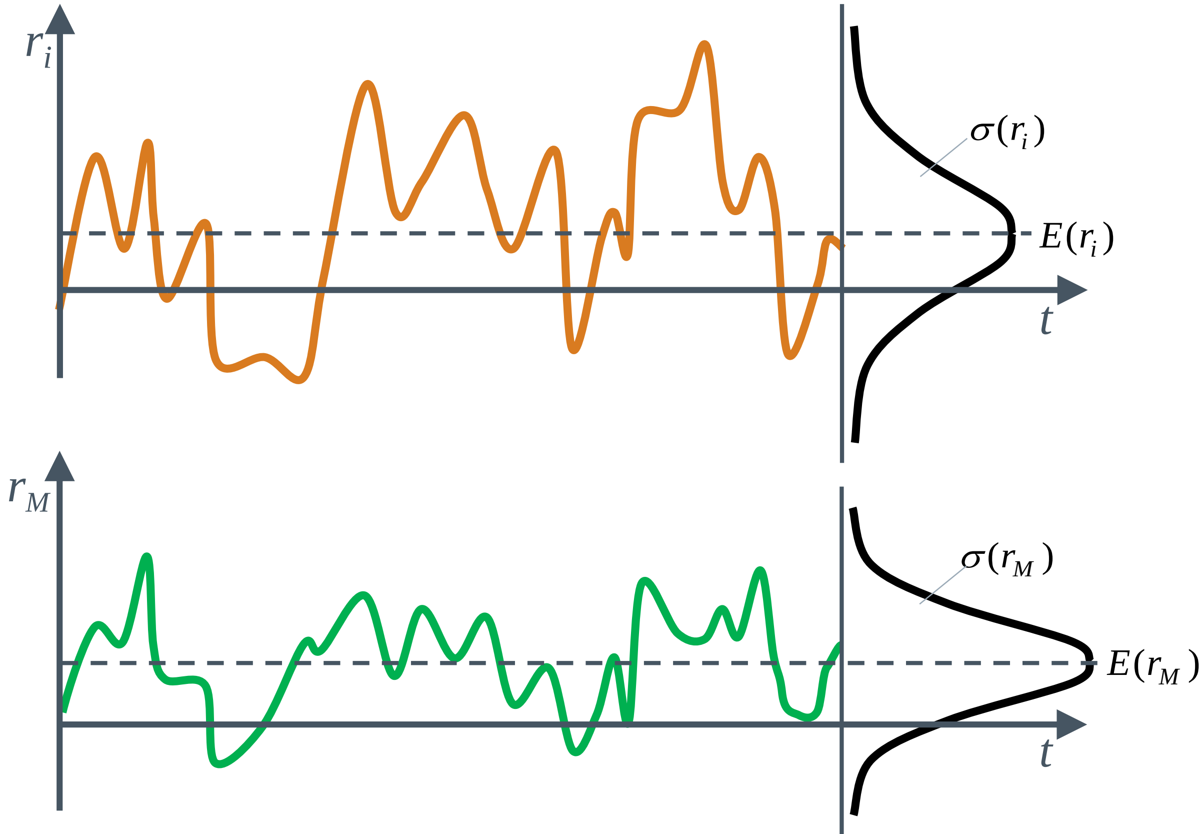
BME

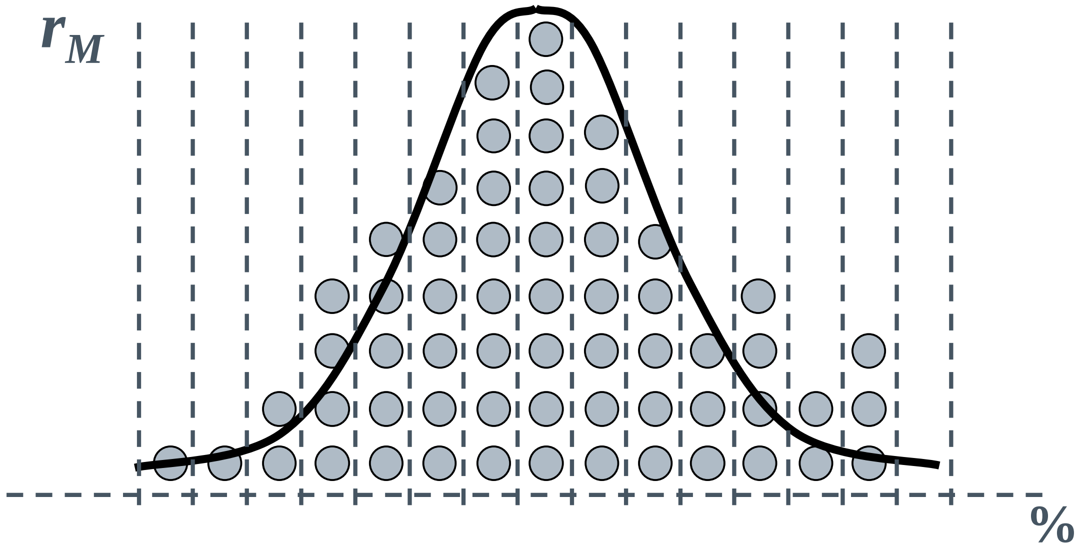

a_1
$E(r_1)$
a_2
$E(r_2)$
a_3
$E(r_3)$
a_4
$E(r_4)$
a_5
$E(r_5)$
a_6
$E(r_6)$
a_7
$E(r_7)$
a_8
$E(r_8)$
a_j
$E(r_j)$
a_k
$E(r_k)$
$\sigma(r_P)$
$E(r_M)$

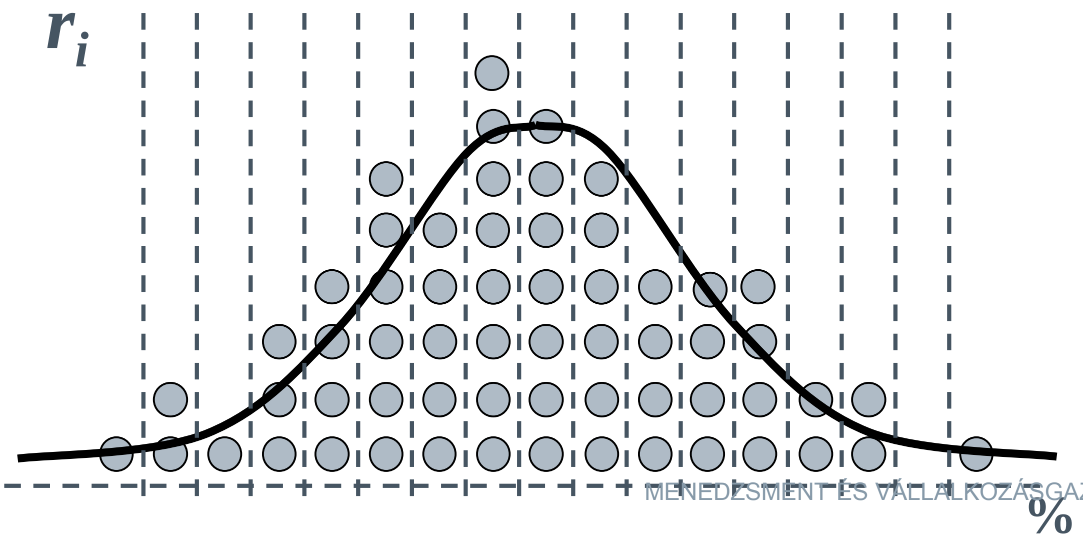
BME

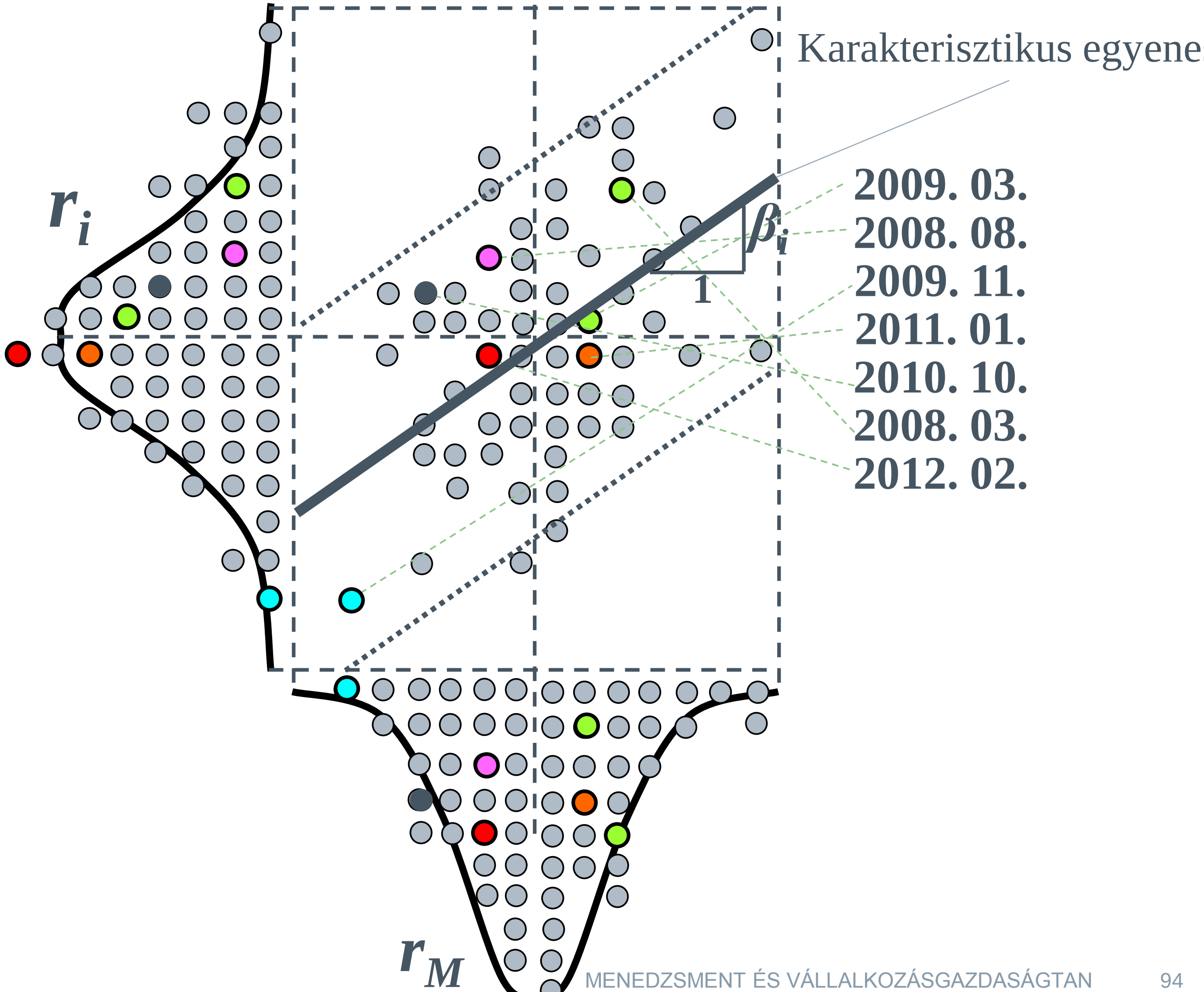

a_1
a_2
$E(r_2)$
a_3
a_4
$E(r_1)$
$E(r_3)$
a_5
a_6
a_7
$E(r_4)$
$E(r_6)$
$E(r_7)$
a_8
$E(r_5)$
a_j
a_i
a_k
$E(r_8)$
$E(r_j)$
$E(r_k)$
$E(r_i)$
$\sigma(r_P)$
$E(r_M)$

2.4.1 Béta és a karakterisztikus egyenes

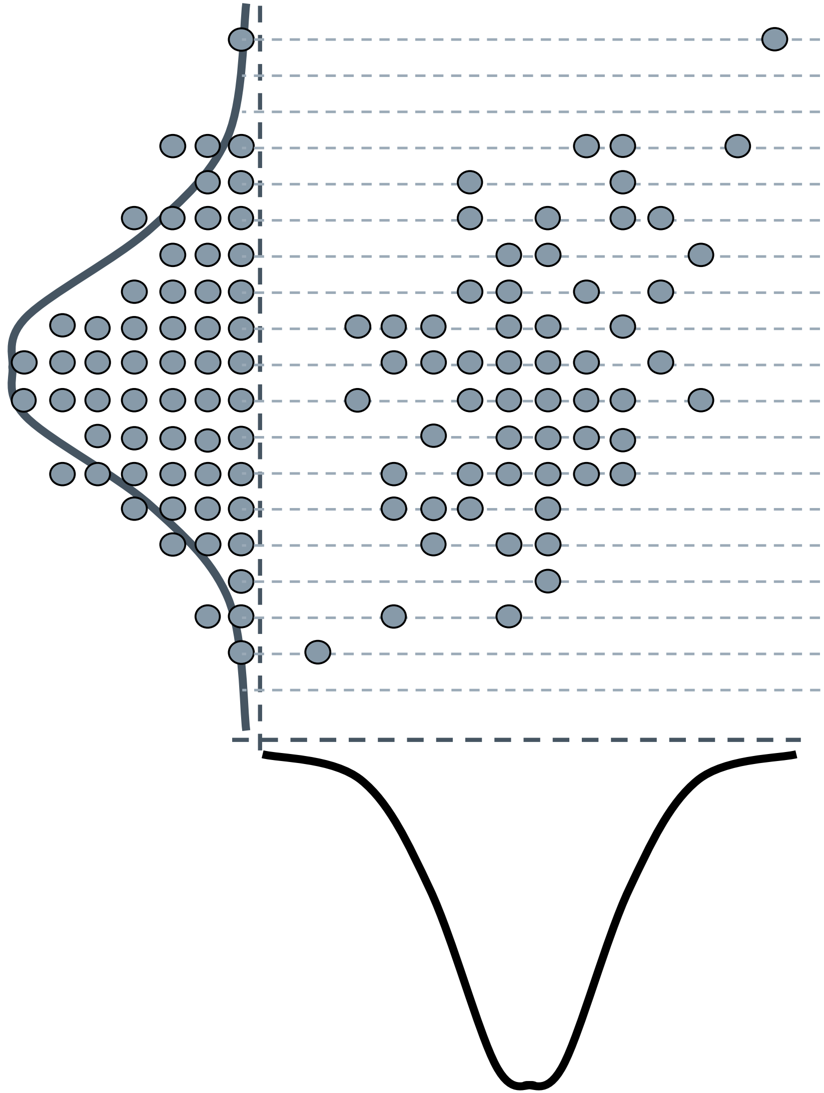


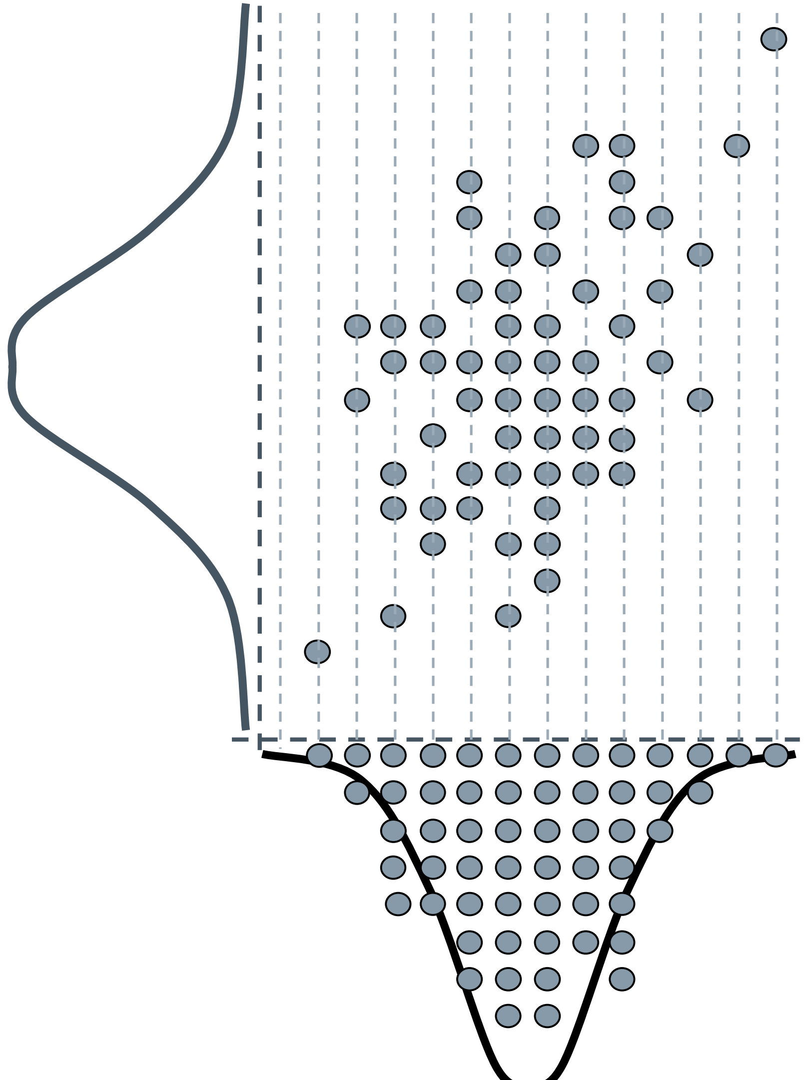

r_M
%

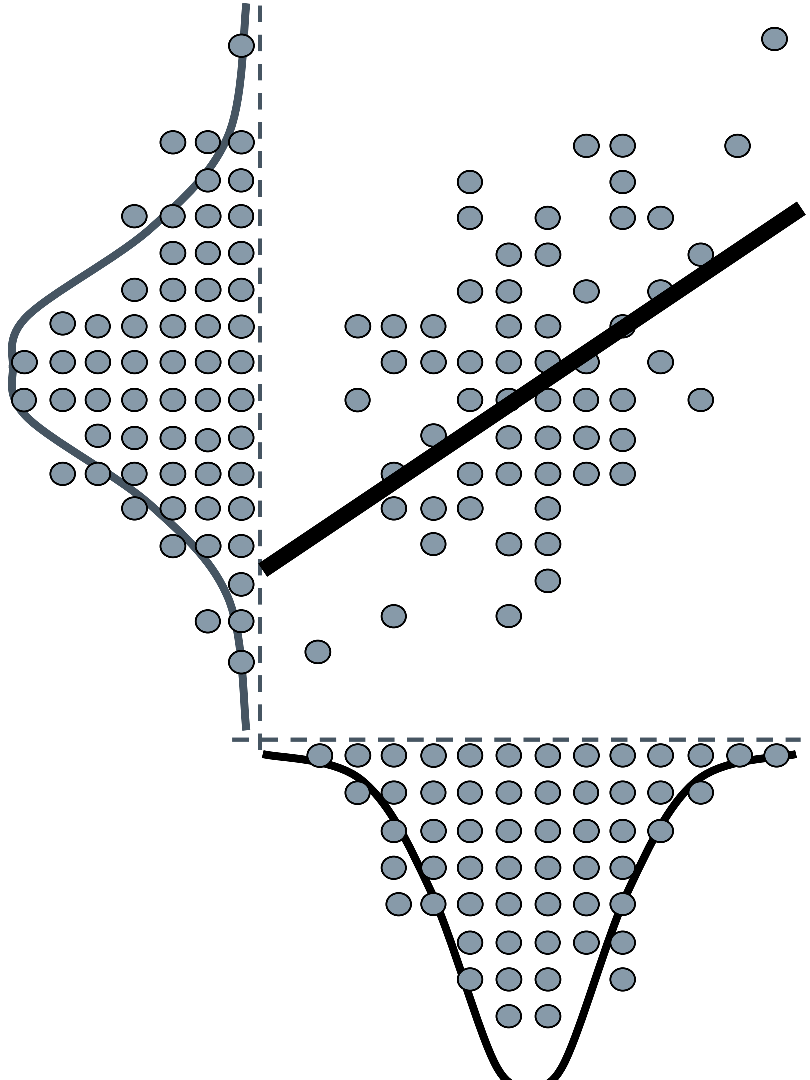

r_i
%

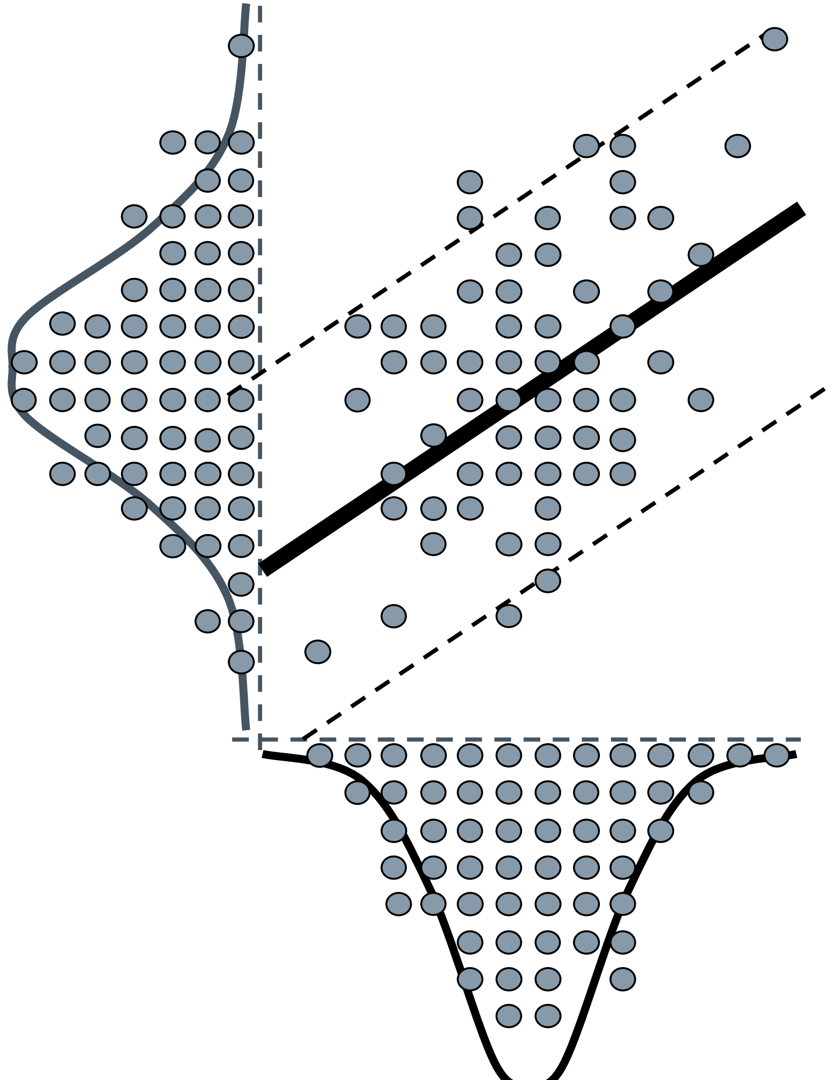


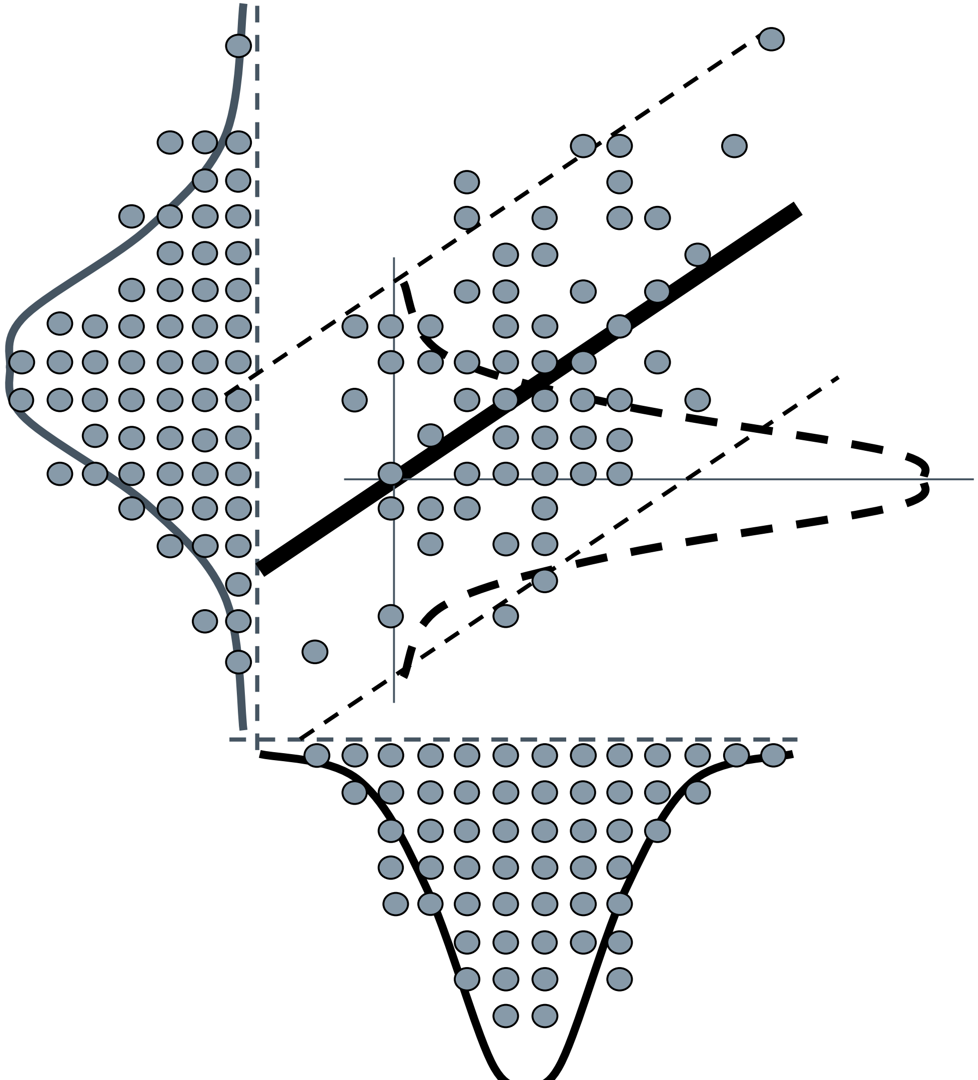
Karakterisztikus egyenes
r_i
β_i
1
2009. 03.
2008. 08.
2009. 11.
2011. 01.
2010. 10.
2008. 03.
2012. 02.
r_M

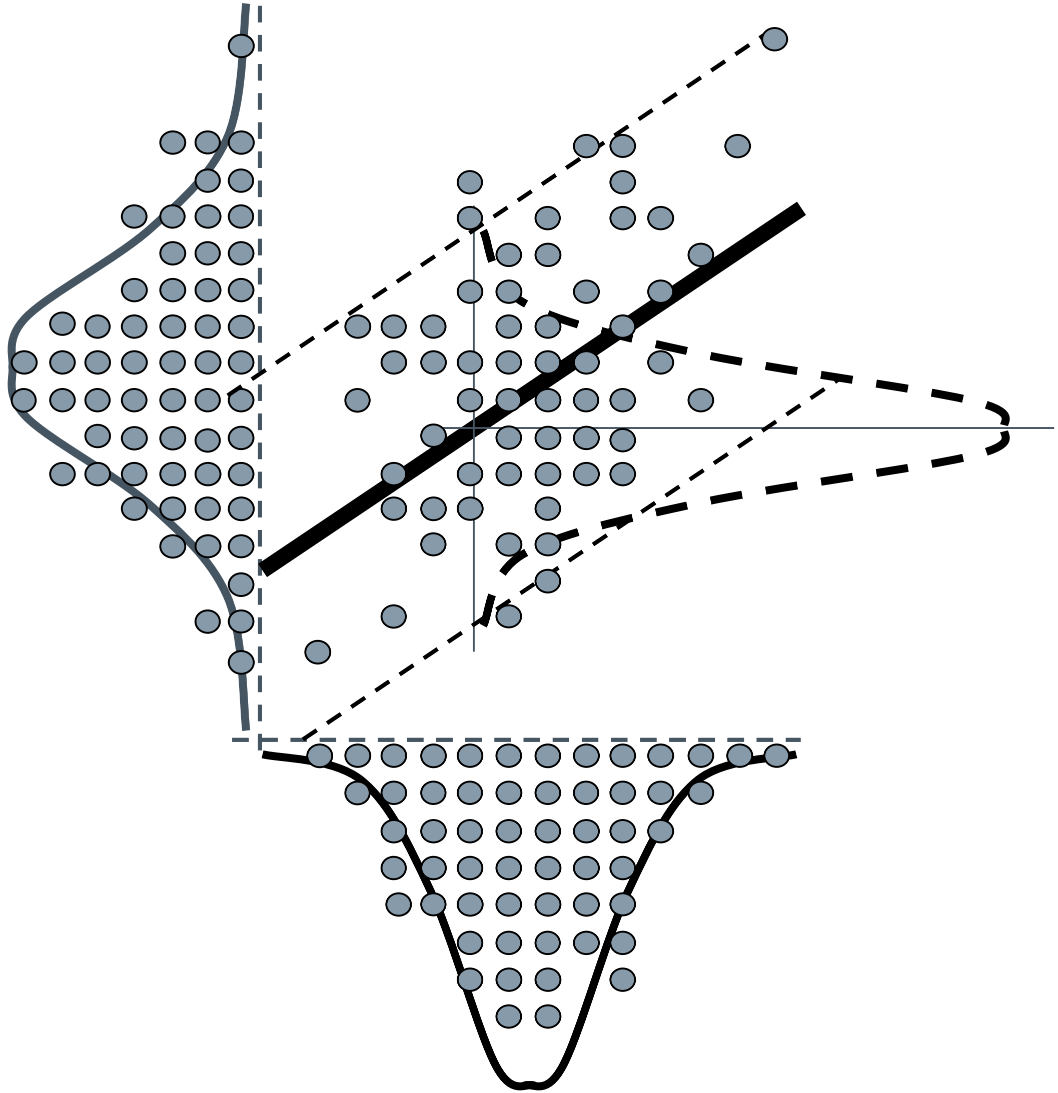


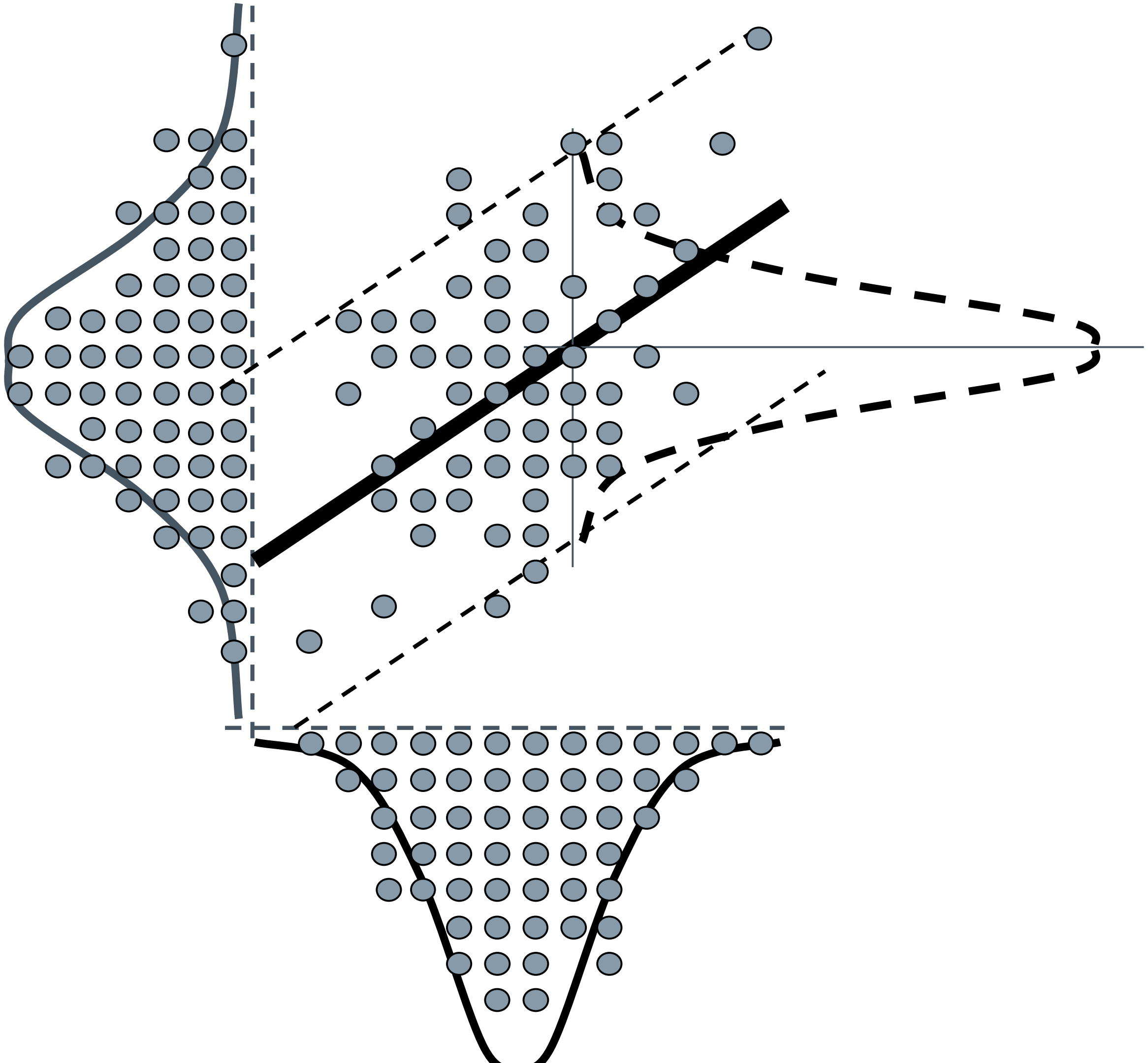


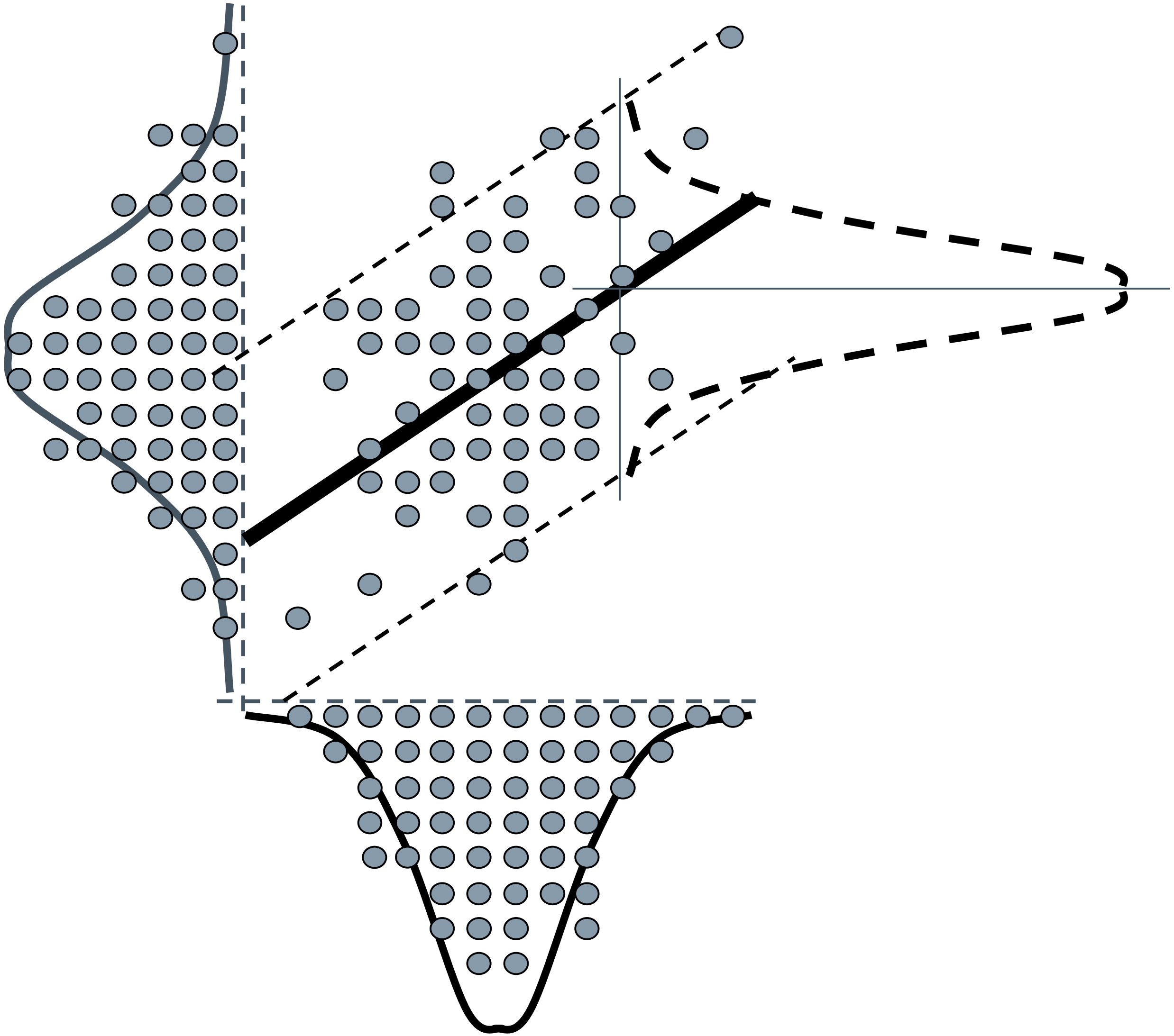


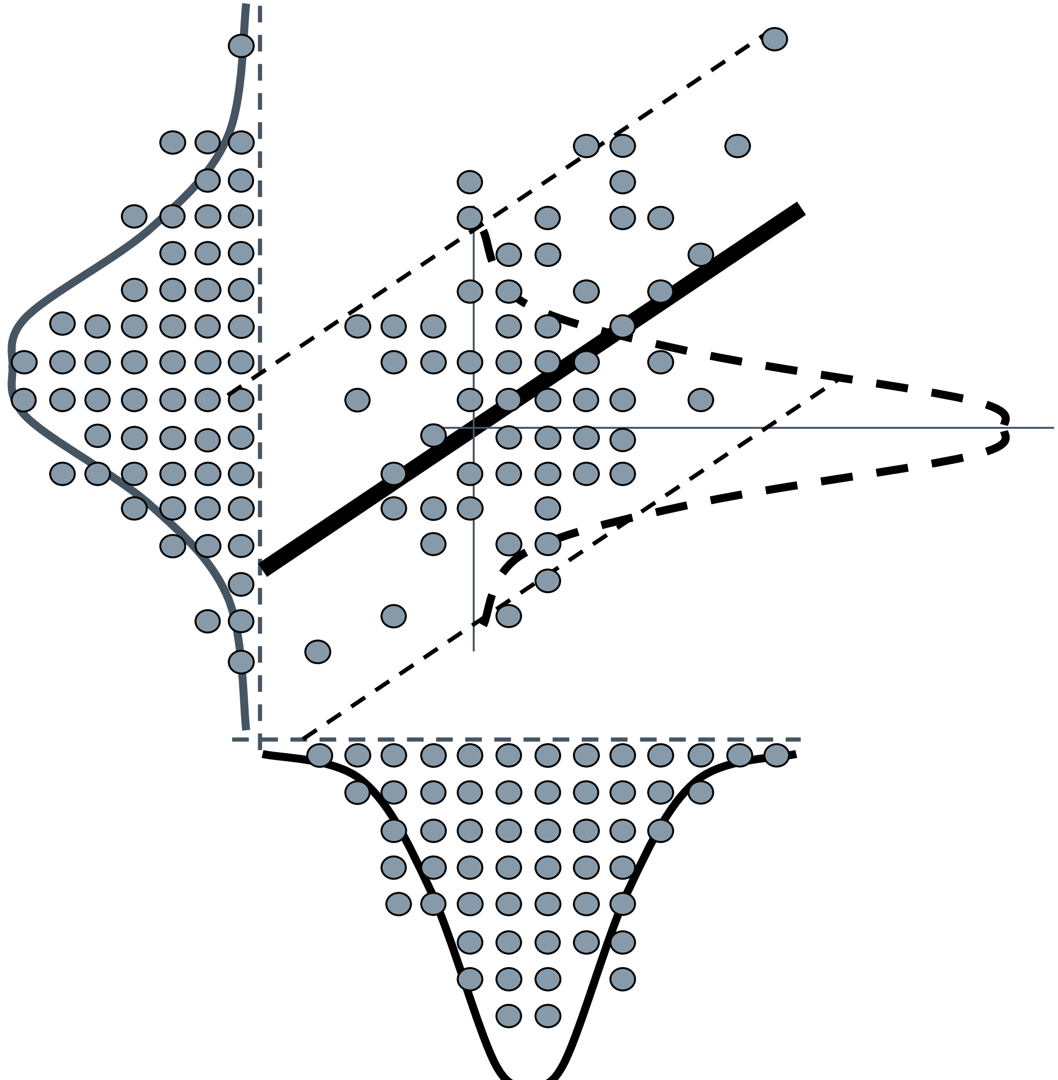


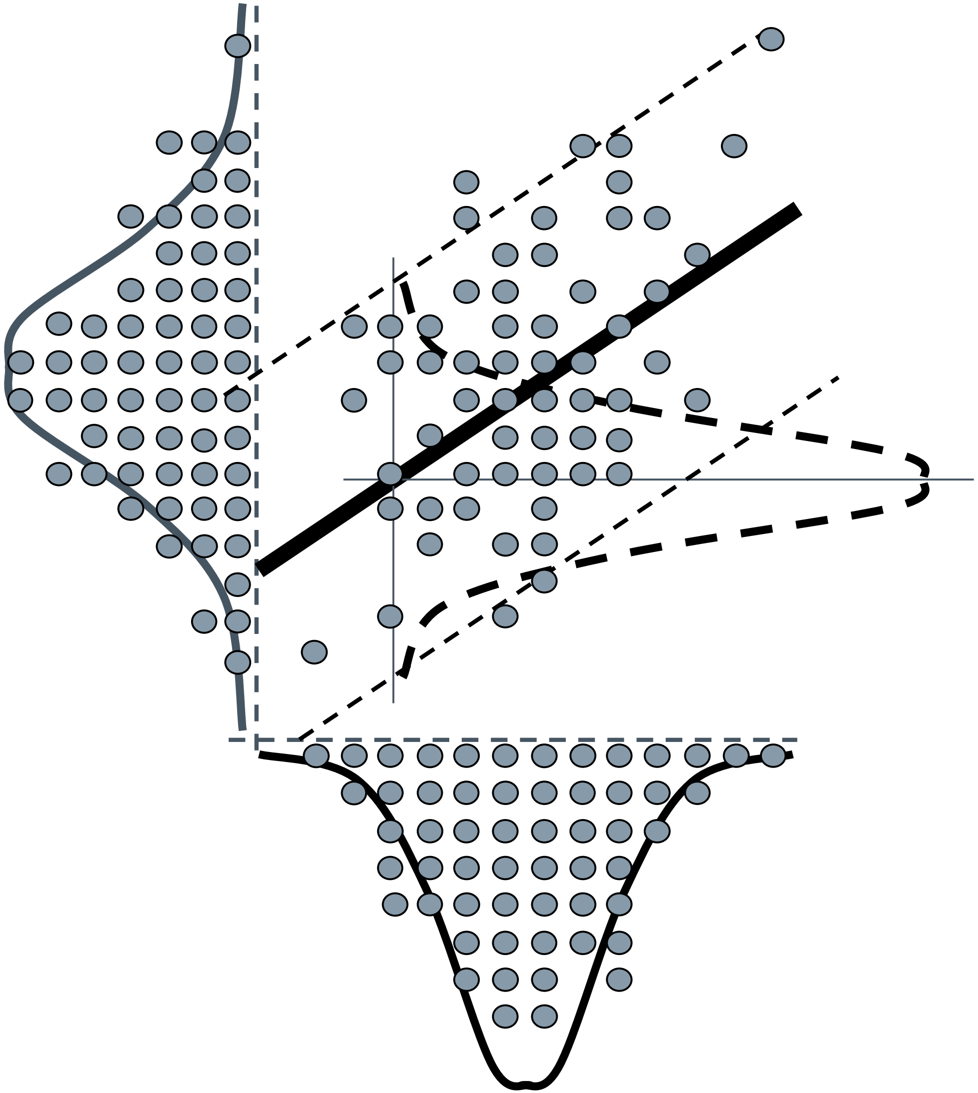


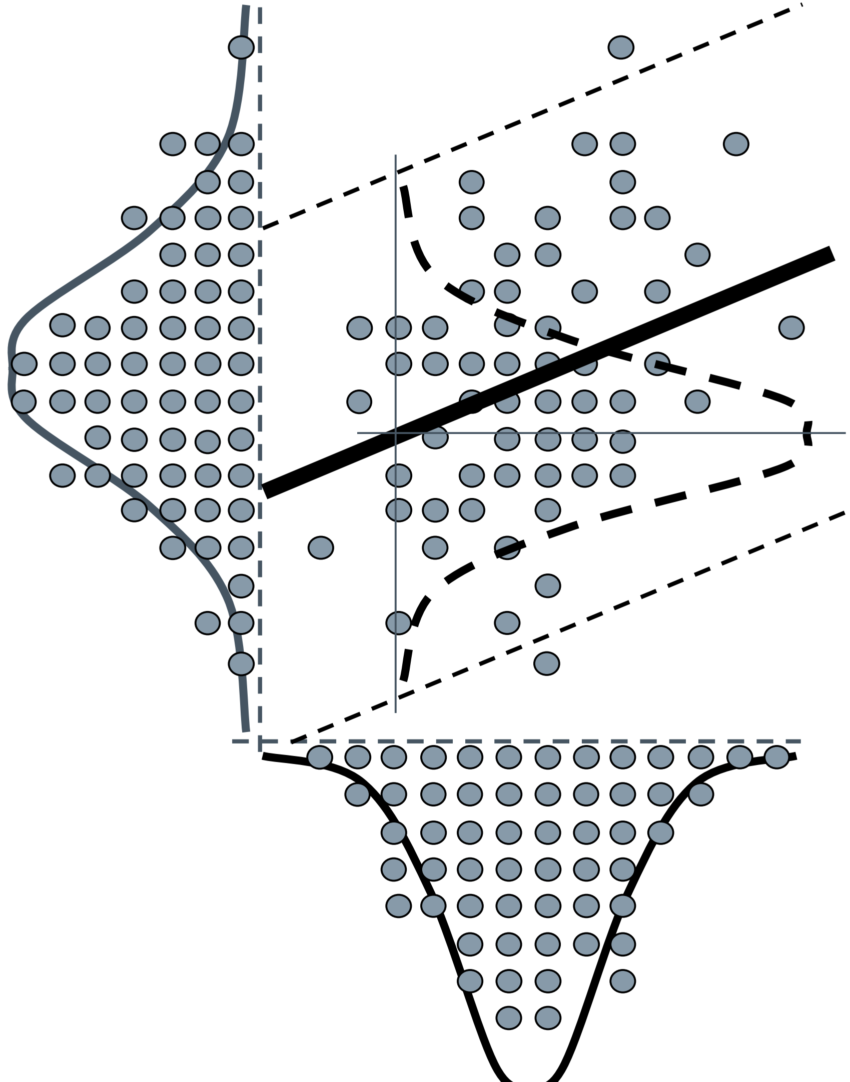


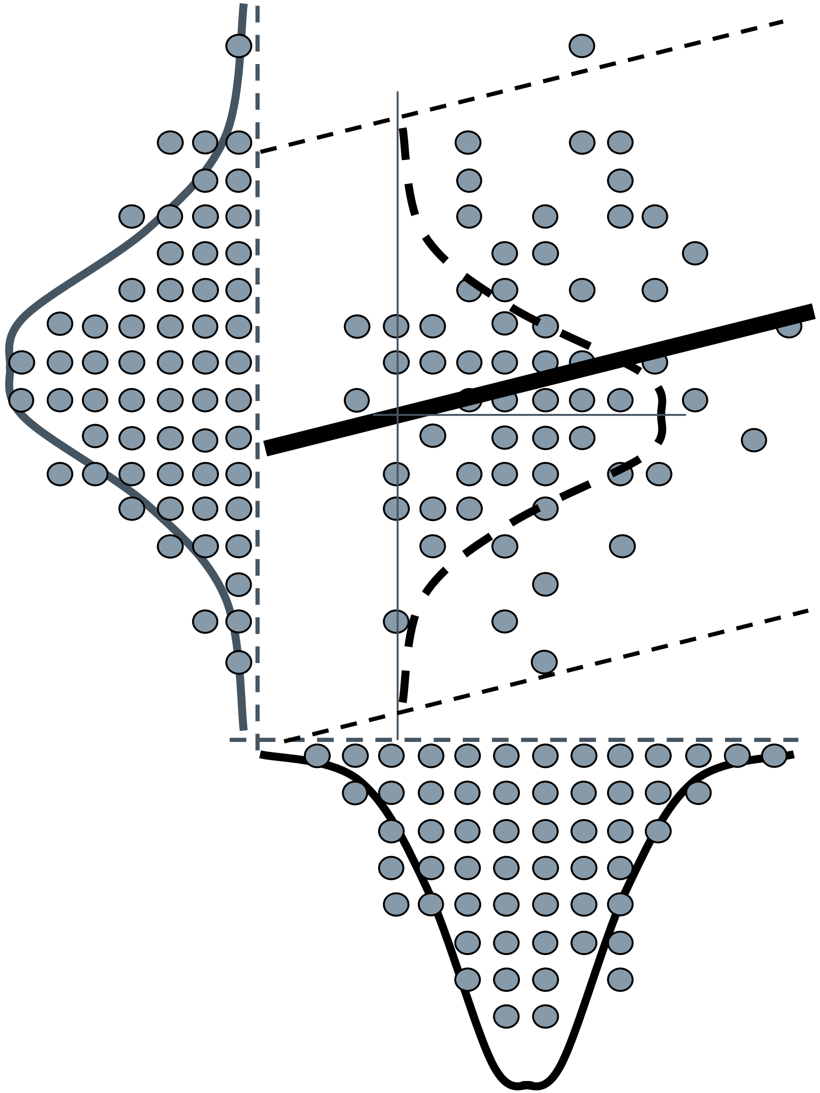


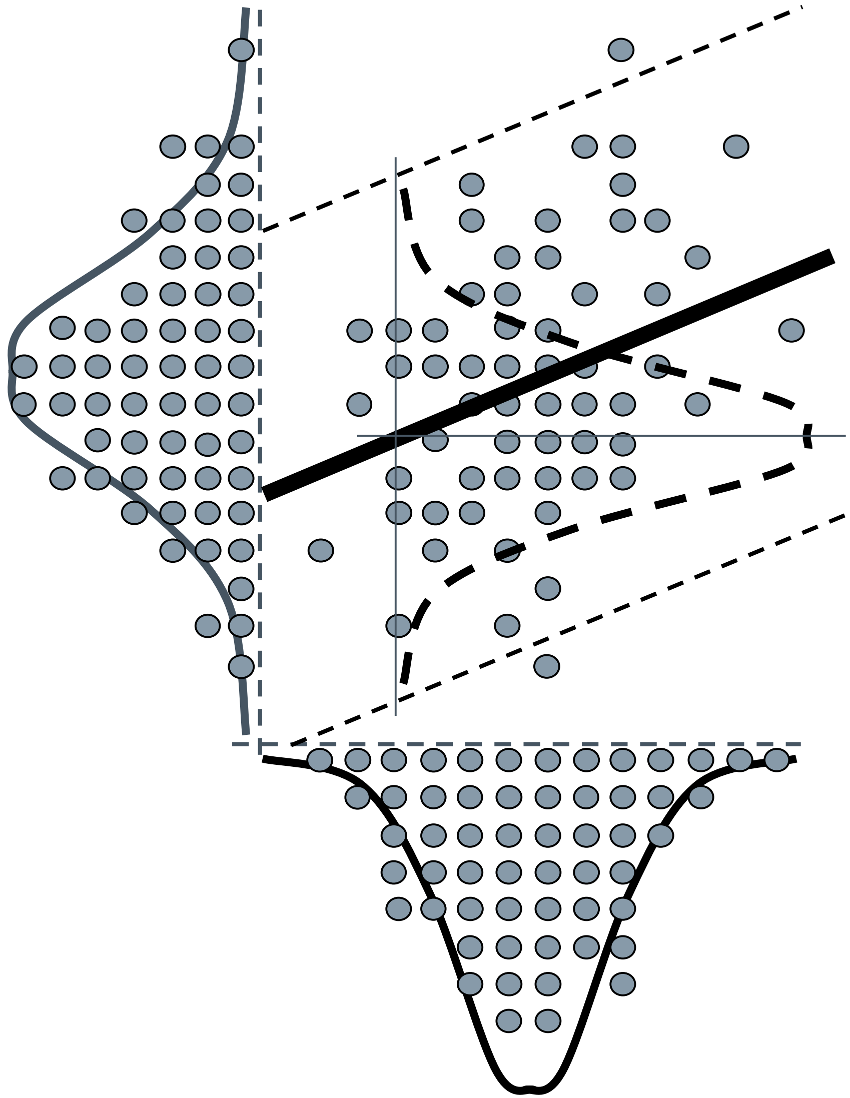


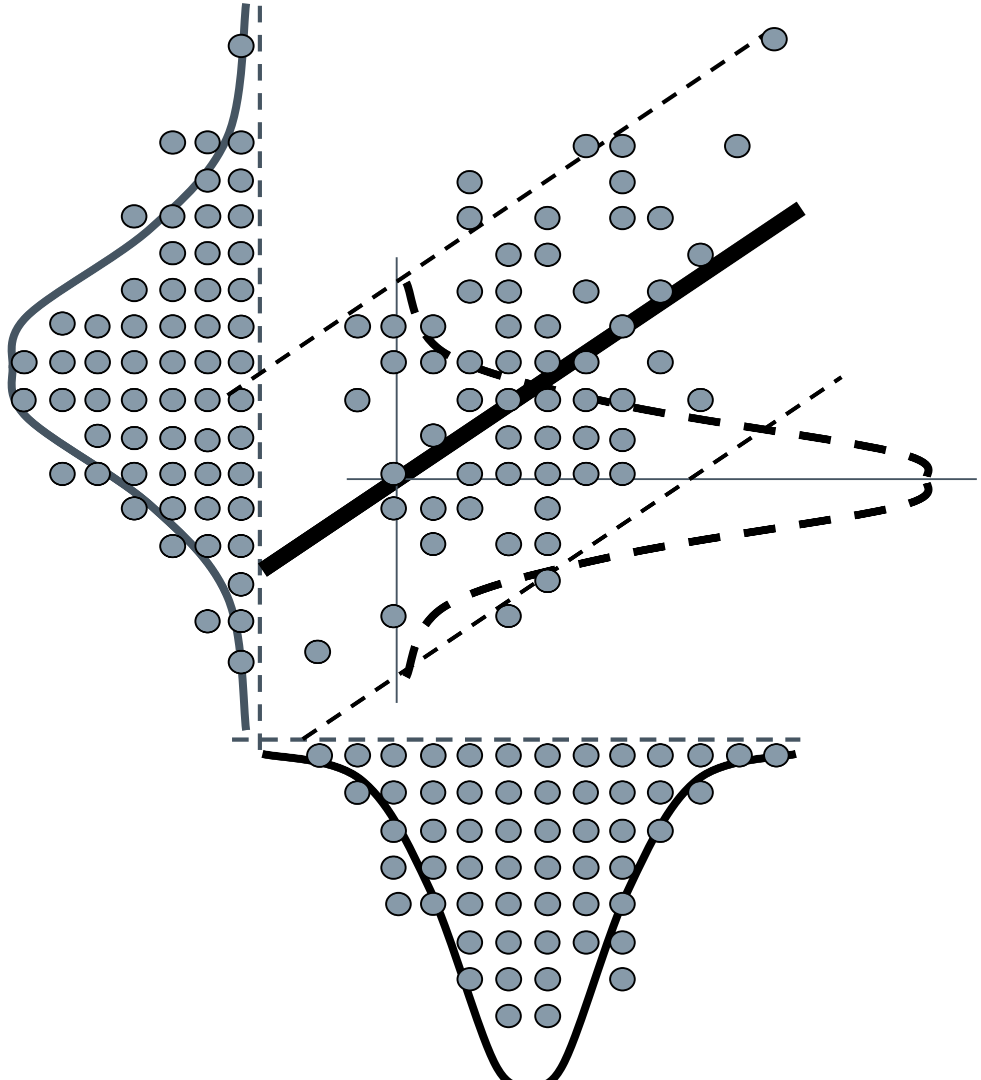


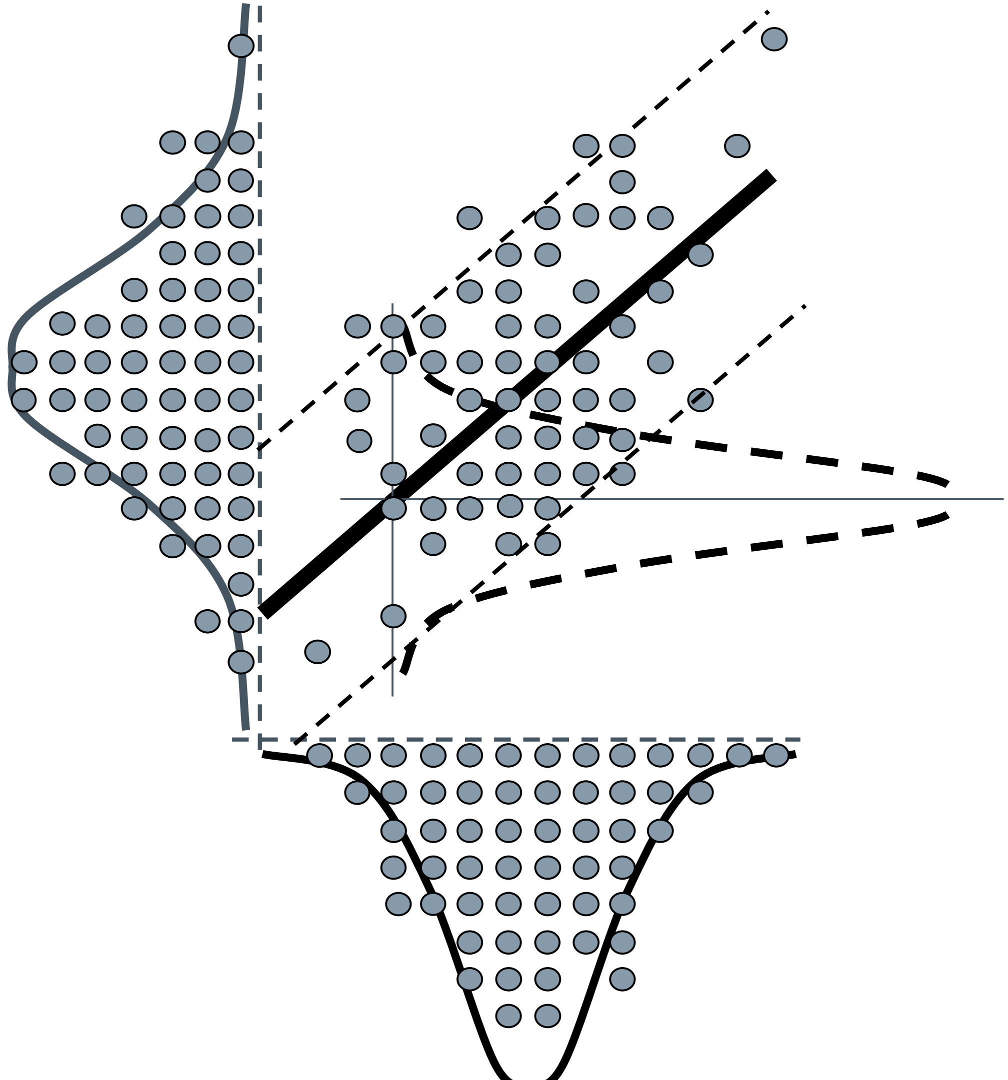


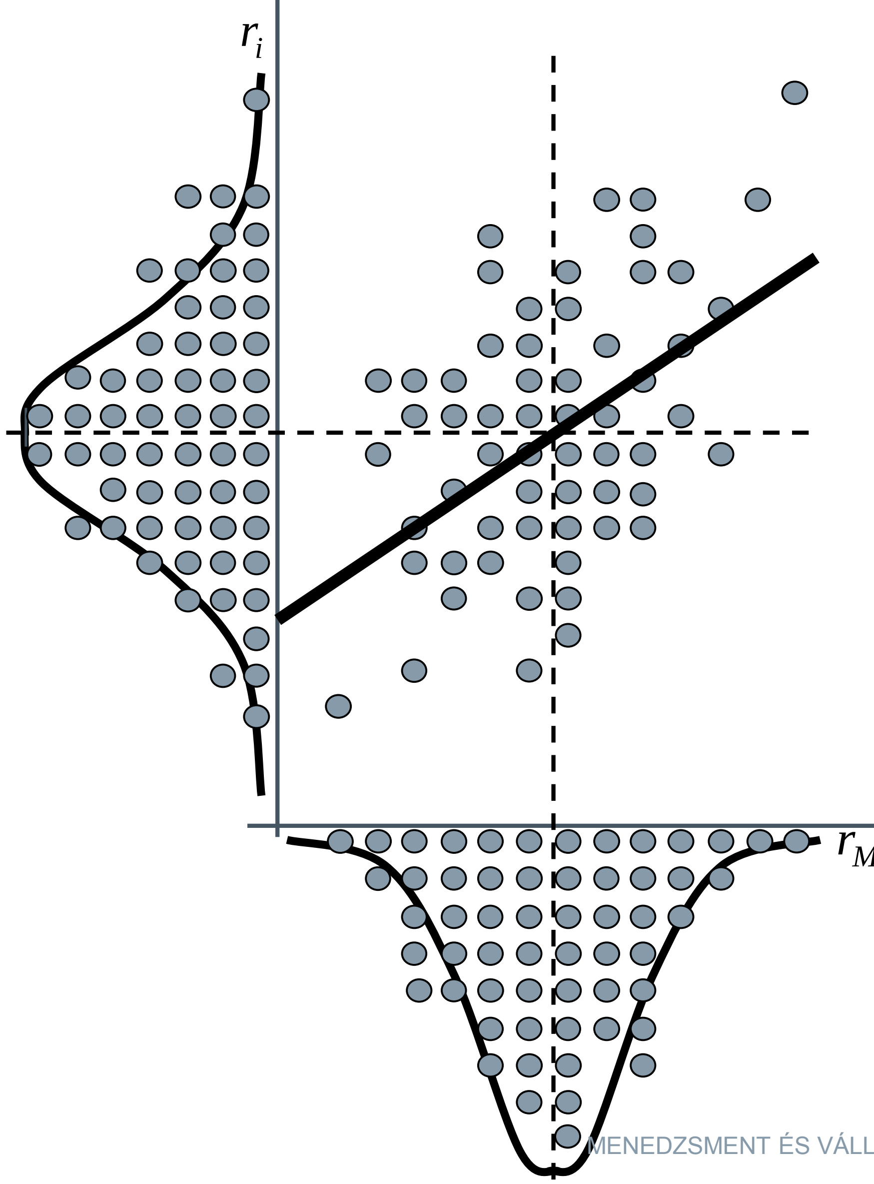


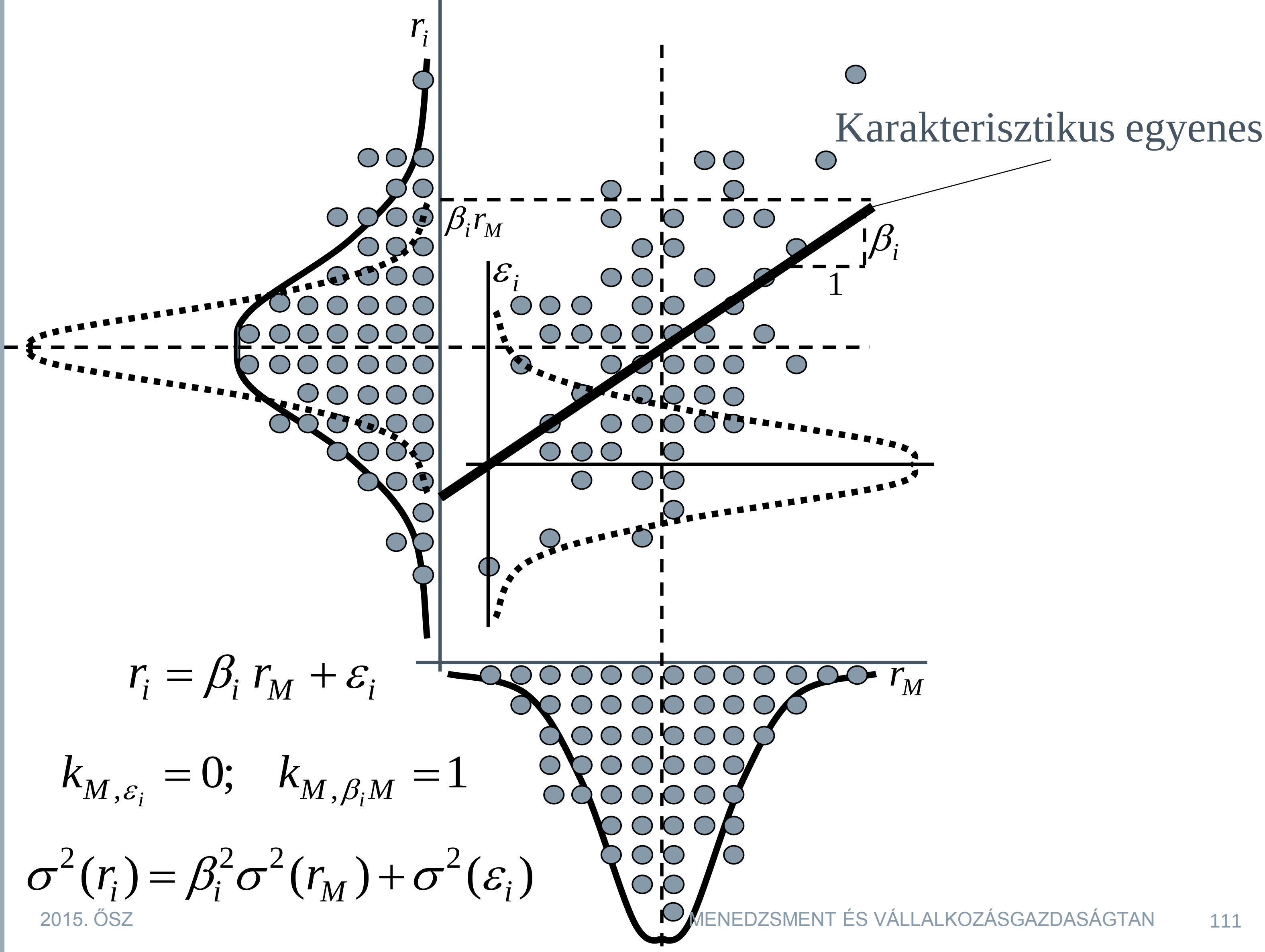








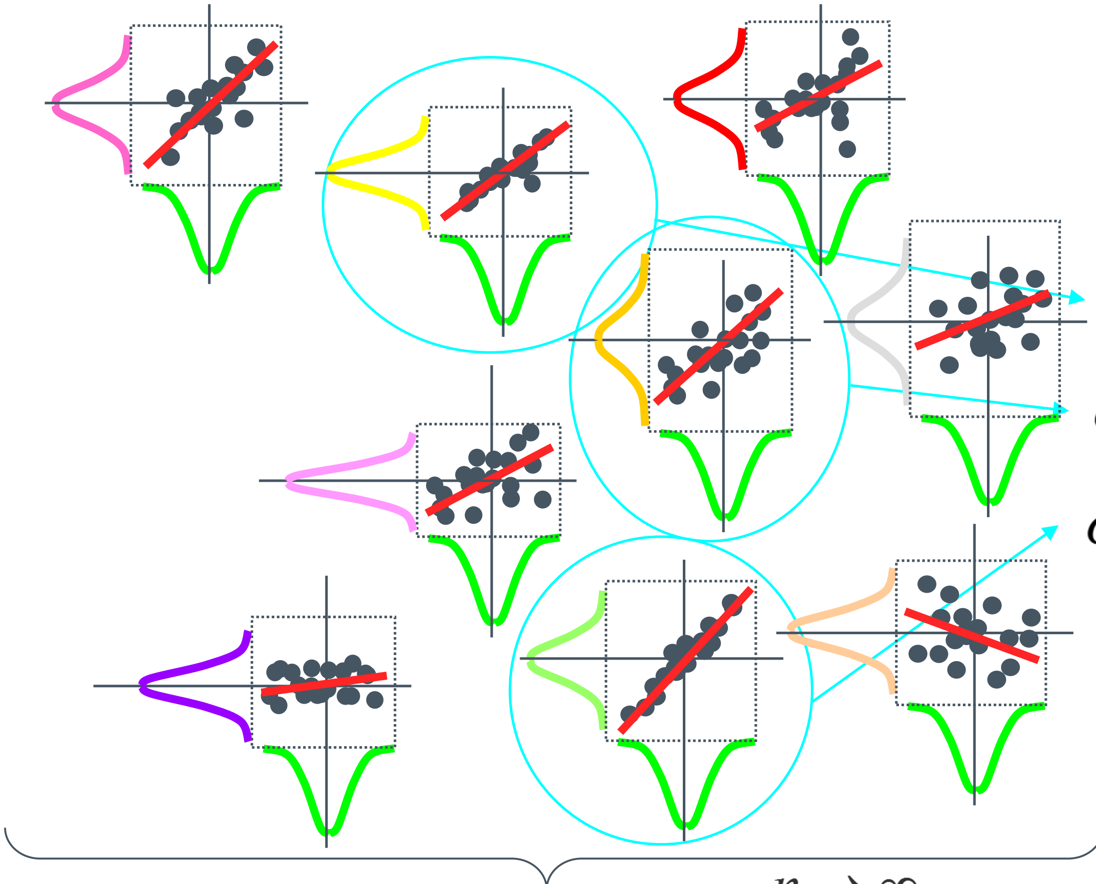

r_i
r_M



$$r_i = \beta_i\, r_M + \varepsilon_i$$

$$k_{M,\varepsilon_i} = 0; \quad k_{M,\beta_i M} = 1$$

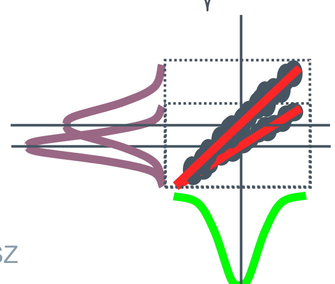
$$\sigma^2(r_i) = \beta_i^2 \sigma^2(r_M) + \sigma^2(\varepsilon_i)$$



$$\sigma^2(r_i) = \beta_i^2\sigma^2(r_M) + \cancel{\sigma^2(\varepsilon_i)}$$

$$\sigma^2(r_j) = \beta_j^2\sigma^2(r_M) + \cancel{\sigma^2(\varepsilon_j)}$$

$$\sigma^2(r_k) = \beta_k^2\sigma^2(r_M) + \cancel{\sigma^2(\varepsilon_k)}$$



$$n \to \infty$$

$$\sigma(r_P) = \sigma(r_M)\left(a_1\beta_1 + \ldots + a_i\beta_i + a_j\beta_j + a_k\beta_k + \ldots\right)$$

$$= \sigma(r_M)\beta_{\acute{a}tlagos}$$

BME

Teljes kockázat

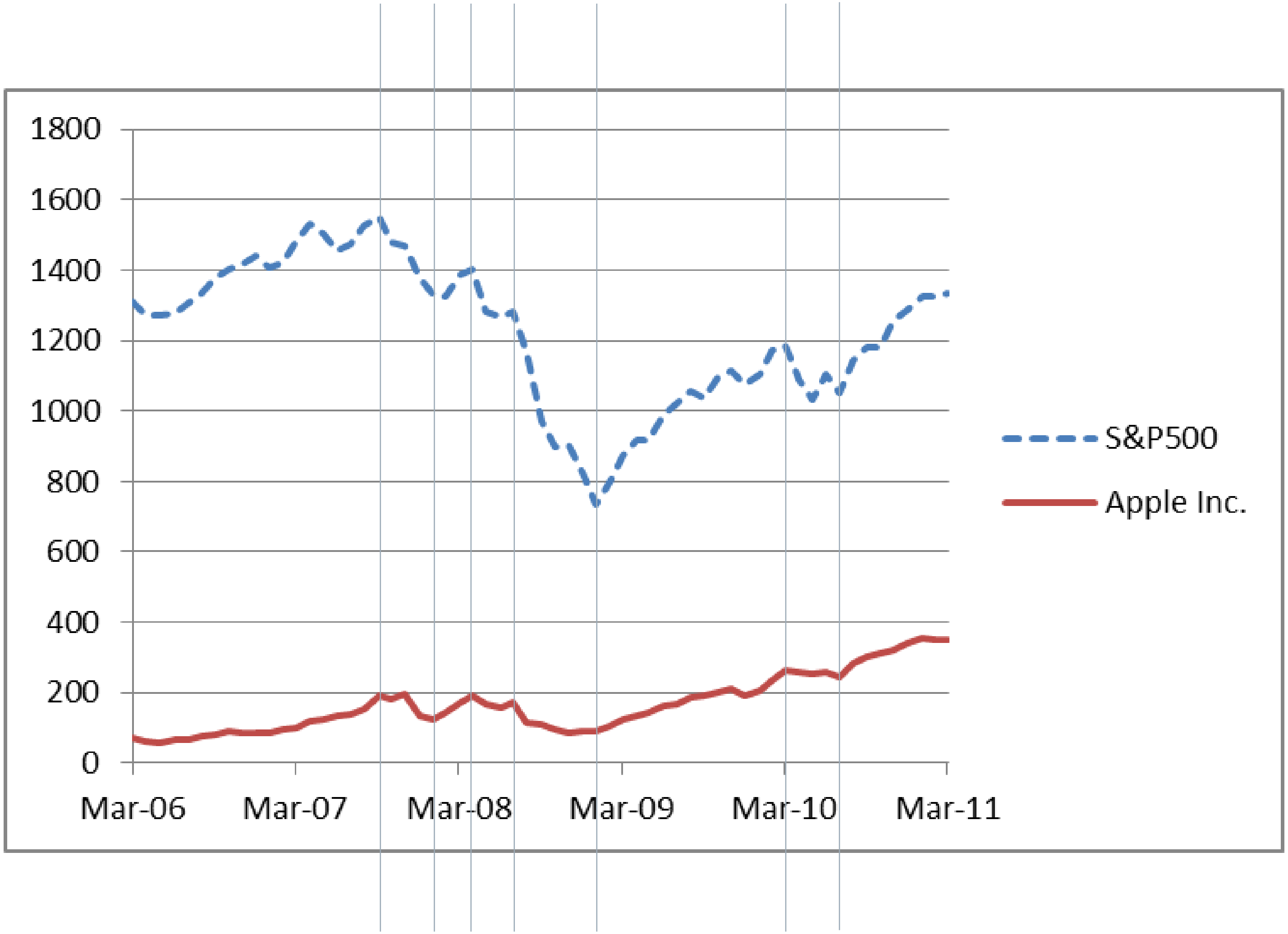
$$\sigma^2(r_i) = \beta_i^2 \sigma^2(r_M) + \sigma^2(\varepsilon_i)$$

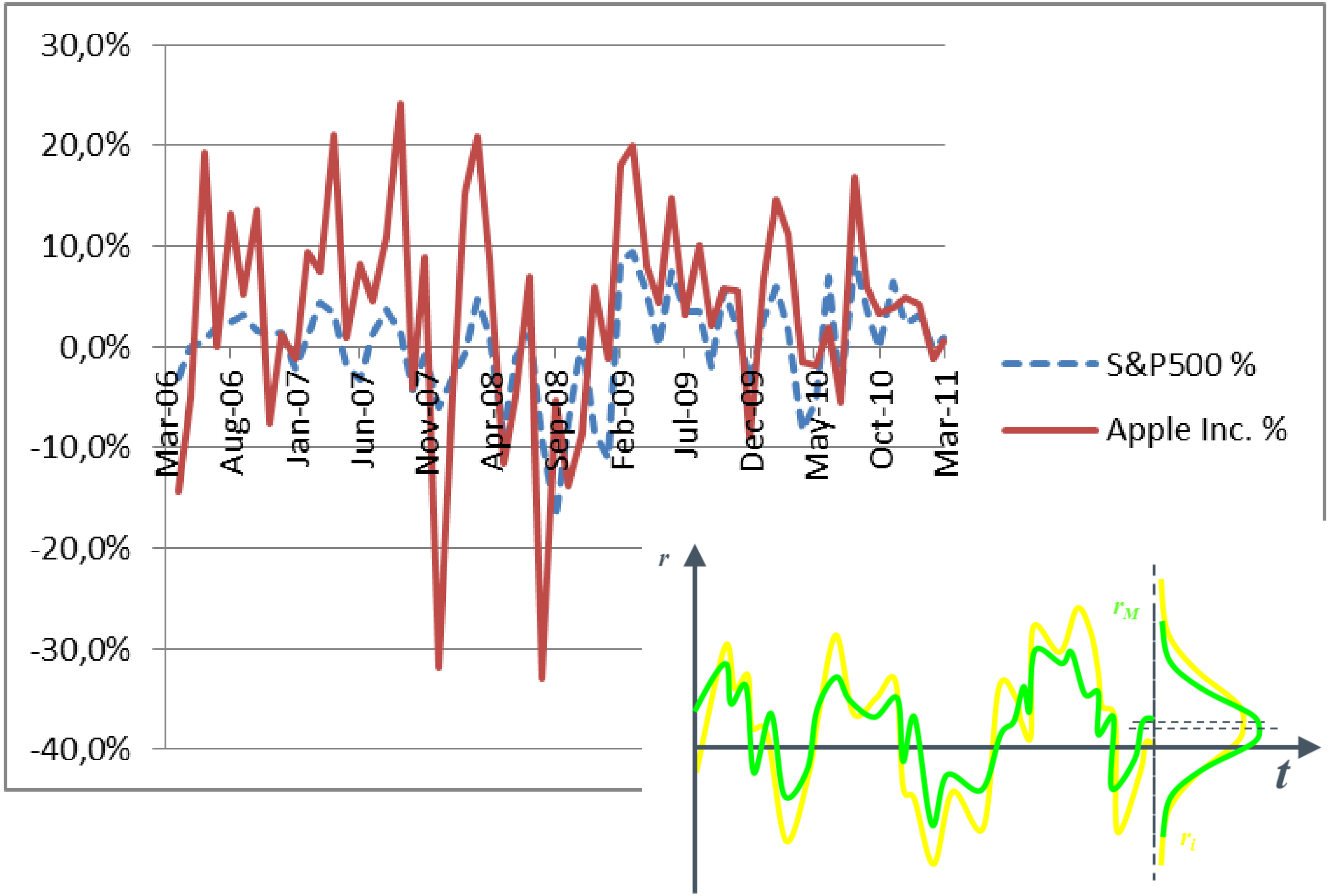
Piaci kockázat
(Nem diverzifikálható)
(Szisztematikus)
(Releváns)

$$\boxed{\beta_i \, \sigma(r_M)}$$

Egyedi kockázat
(Diverzifikálható)
(Nem szisztematikus)

	Dátum	S&P500 *M*	Apple Inc. *i*	S&P500 *M%*	Apple Inc. *i%*
1	2011.03.01	1337	351	0,8%	0,6%
2	2011.02.01	1326	349	-0,1%	-1,1%
3	2011.01.03	1327	353	3,2%	4,1%
4	2010.12.01	1286	339	2,2%	5,0%
5	2010.11.01	1258	323	6,5%	3,9%
6	2010.10.01	1181	311	-0,2%	3,3%
7	2010.09.01	1183	301	3,7%	6,0%
8	2010.08.02	1141	284	8,8%	16,9%
9	2010.07.01	1049	243	-4,8%	-5,4%
10	2010.06.01	1102	257	6,9%	2,0%
11	2010.05.03	1031	252	-5,3%	-1,9%
12	2010.04.01	1089	257	-8,3%	-1,5%
13	2010.03.01	1187	261	1,5%	11,1%
14	2010.02.01	1169	235	5,9%	14,6%
15	2010.01.04	1104	205	2,8%	6,8%
16	2009.12.01	1074	192	-3,7%	-9,0%
17	2009.11.02	1115	211	1,7%	5,5%
18	2009.10.01	1096	200	5,8%	5,8%
19	2009.09.01	1036	189	-2,0%	2,2%
20	2009.08.03	1057	185	3,5%	10,1%
21	2009.07.01	1021	168	3,4%	3,1%
22	2009.06.01	987	163	7,4%	14,8%
23	2009.05.01	919	142	0,0%	4,4%
24	2009.04.01	919	136	5,3%	7,9%
25	2009.03.02	873	126	9,4%	20,0%
26	2009.02.02	798	105	8,6%	18,0%
27	2009.01.02	735	89	-11,0%	-1,1%
28	2008.12.01	826	90	-8,5%	5,9%
29	2008.11.03	903	85	0,8%	-8,6%
30	2008.10.01	896	93	-7,5%	-13,9%


1800
1600
1400
1200
1000
800
600
400
200
0
Mar-06
Mar-07
Mar-08
Mar-09
Mar-10
Mar-11
S&P500
Apple Inc.

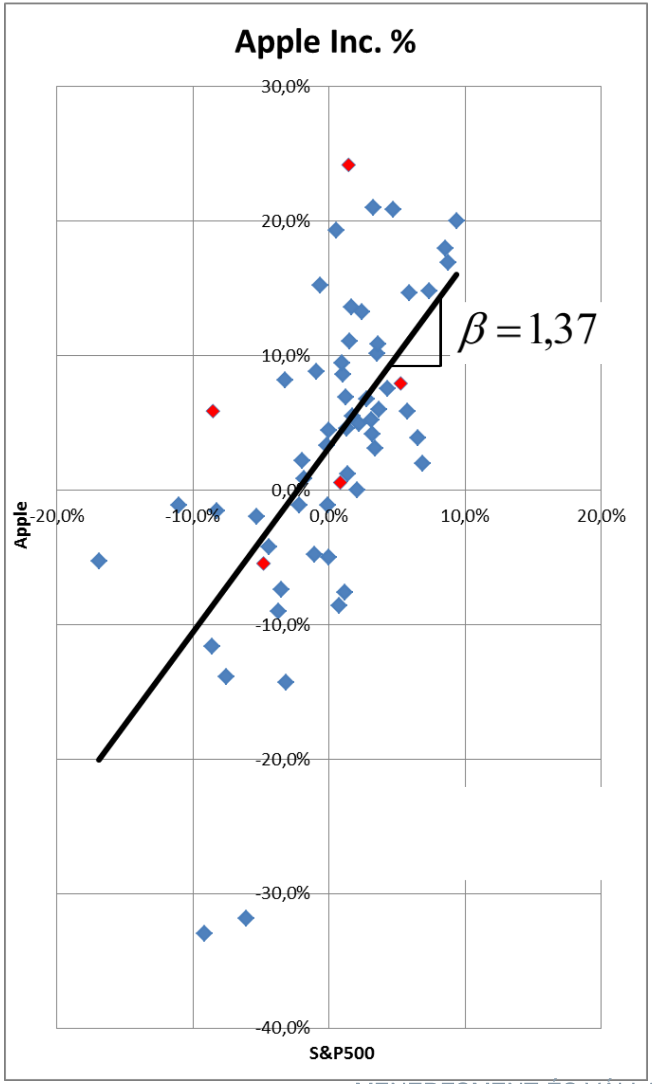

30,0%
20,0%
10,0%
0,0%
-10,0%
-20,0%
-30,0%
-40,0%
Mar-06
Aug-06
Jan-07
Jun-07
Nov-07
Apr-08
Sep-08
Feb-09
Jul-09
Dec-09
May-10
Oct-10
Mar-11
S&P500 %
Apple Inc. %
r
r_M
r_i
t

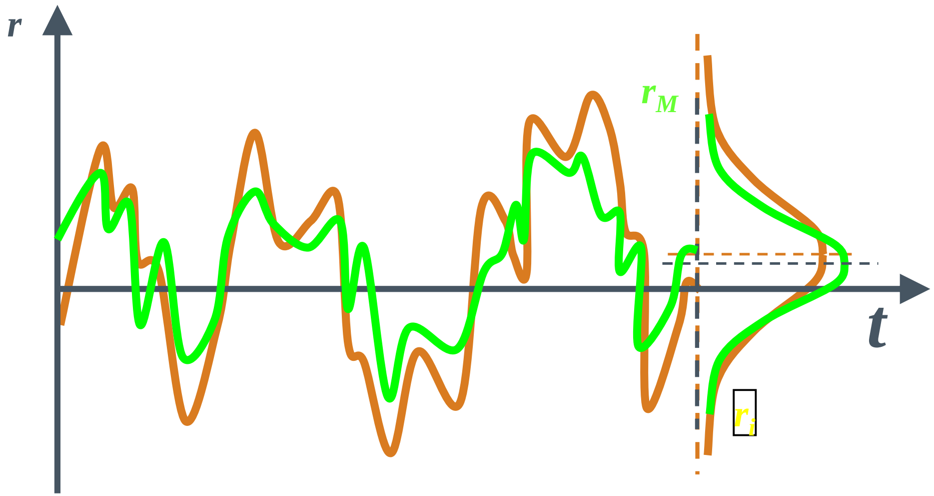
BME

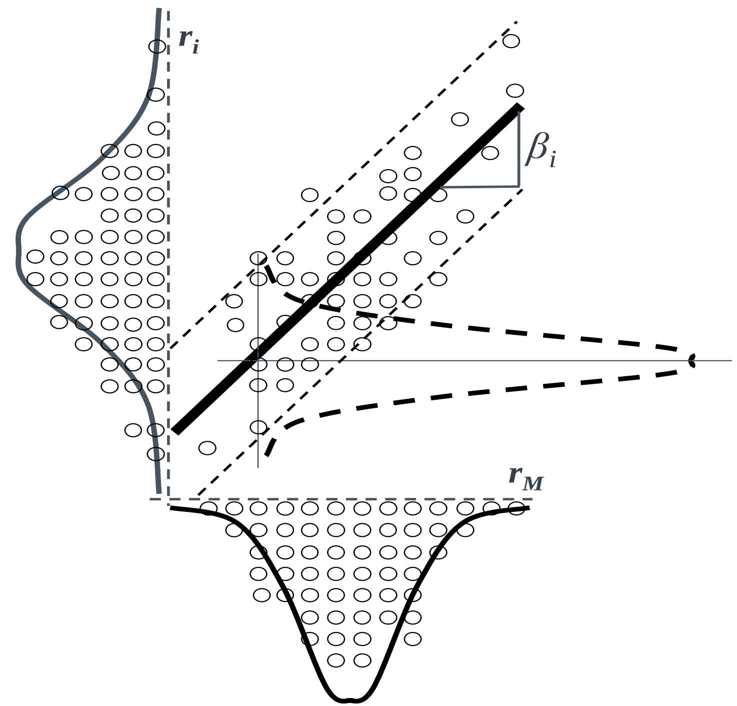
	Dátum	**S&P500** *M*	**Apple Inc.** *i*	**S&P500** *M%*	**Apple Inc.** *i%*
1	2011.03.01	1337	351	0,8%	0,6%
2	2011.02.01	1326	349	-0,1%	-1,1%
3	2011.01.03	1327	353	3,2%	4,1%
4	2010.12.01	1286	339	2,2%	5,0%
5	2010.11.01	1258	323	6,5%	3,9%
6	2010.10.01	1181	311	-0,2%	3,3%
7	2010.09.01	1183	301	3,7%	6,0%
8	2010.08.02	1141	284	8,8%	16,9%
9	2010.07.01	1049	243	-4,8%	-5,4%
10	2010.06.01	1102	257	6,9%	2,0%
11	2010.05.03	1031	252	-5,3%	-1,9%
12	2010.04.01	1089	257	-8,3%	-1,5%
13	2010.03.01	1187	261	1,5%	11,1%
14	2010.02.01	1169	235	5,9%	14,6%
15	2010.01.04	1104	205	2,8%	6,8%
16	2009.12.01	1074	192	-3,7%	-9,0%
17	2009.11.02	1115	211	1,7%	5,5%
18	2009.10.01	1096	200	5,8%	5,8%
19	2009.09.01	1036	189	-2,0%	2,2%
20	2009.08.03	1057	185	3,5%	10,1%
21	2009.07.01	1021	168	3,4%	3,1%
22	2009.06.01	987	163	7,4%	14,8%
23	2009.05.01	919	142	0,0%	4,4%
24	2009.04.01	919	136	5,3%	7,9%
25	2009.03.02	873	126	9,4%	20,0%
26	2009.02.02	798	105	8,6%	18,0%
27	2009.01.02	735	89	-11,0%	-1,1%
28	2008.12.01	826	90	-8,5%	5,9%
29	2008.11.03	903	85	0,8%	-8,6%
30	2008.10.01	896	93	-7,5%	-13,9%

$$r = \frac{F_1 - F_0}{F_0} = \frac{351 - 349}{349} = 0{,}006 = 0{,}6\%$$

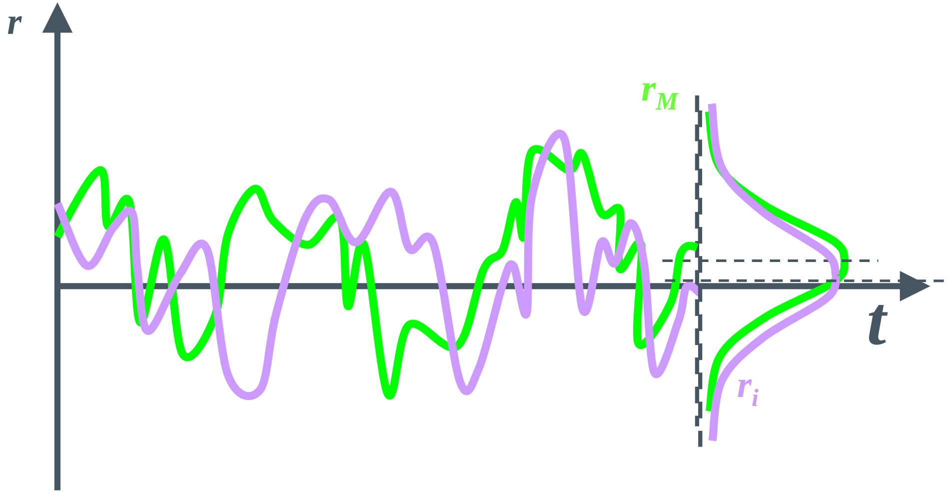
$$r = \frac{F_1 - F_0}{F_0} = \frac{1337 - 1326}{1326} = 0{,}008 = 0{,}8\%$$

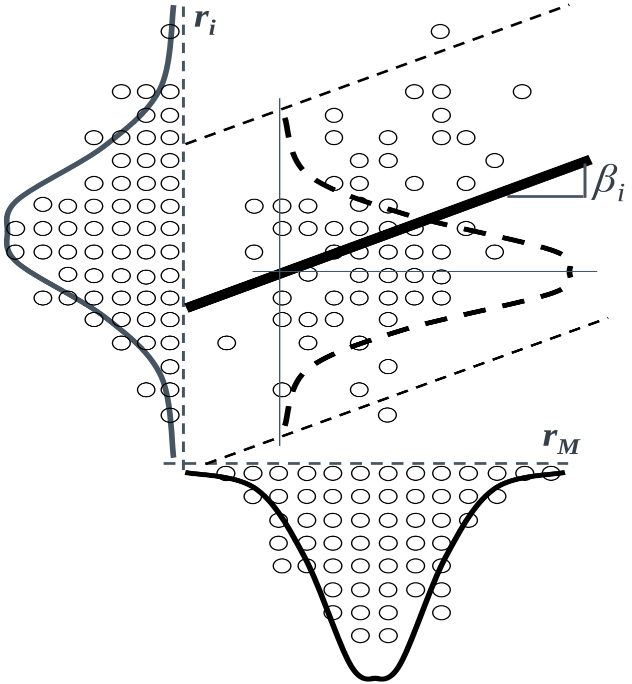

Apple Inc. %
30,0%
20,0%
10,0%
0,0%
-10,0%
-20,0%
-30,0%
-40,0%
-20,0%
-10,0%
0,0%
10,0%
20,0%
Apple
S&P500
$\beta = 1,37$

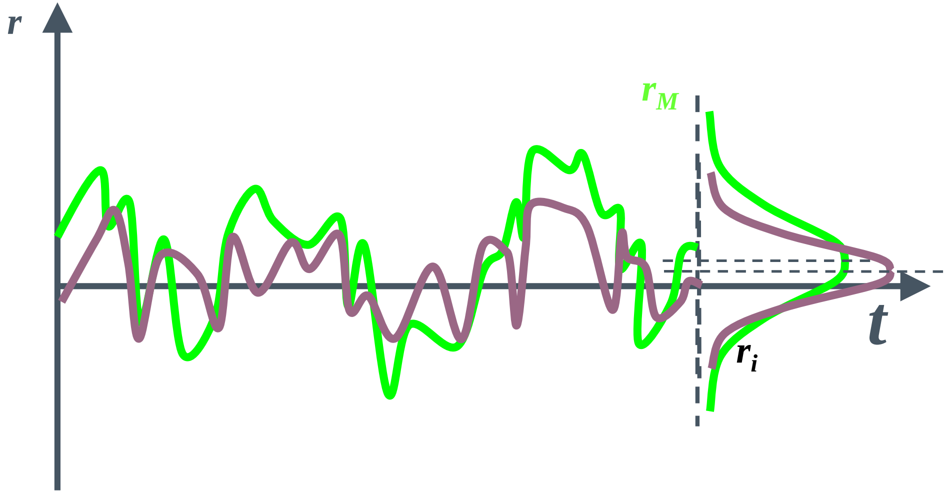

r
r_M
t
r_i

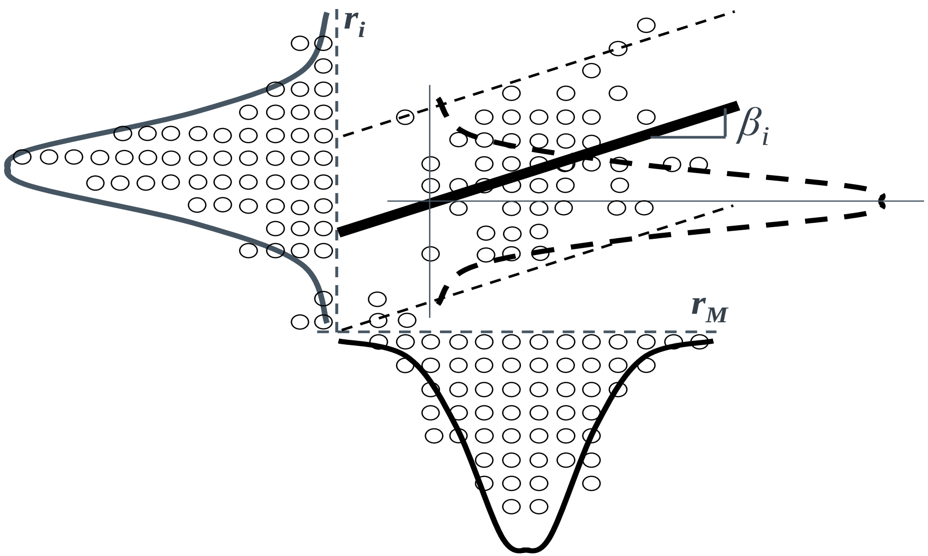

r_i
β_i
r_M

BME

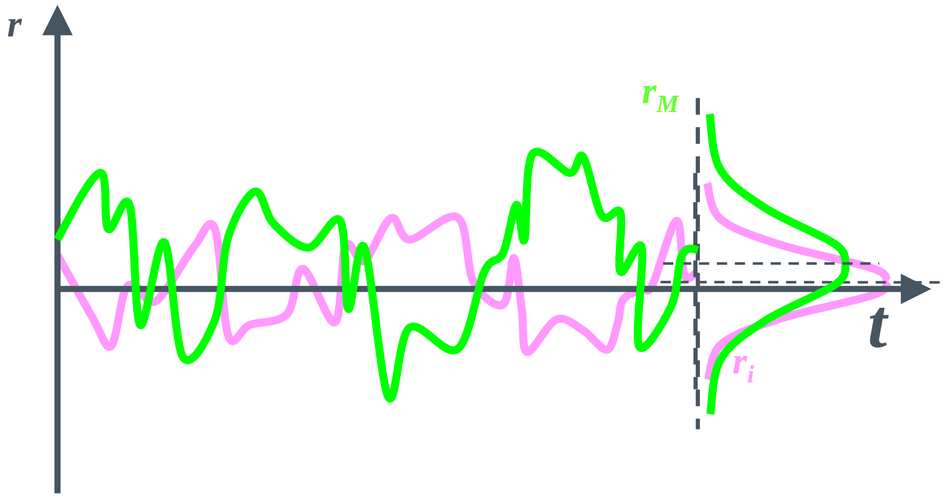


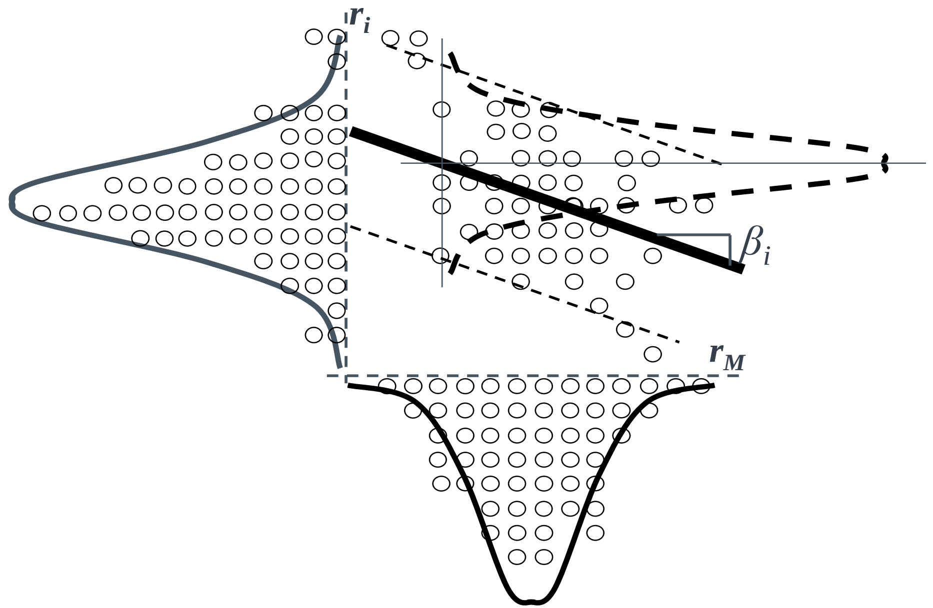



r
r_M
t
r_i


r_i
β_i
r_M

BME



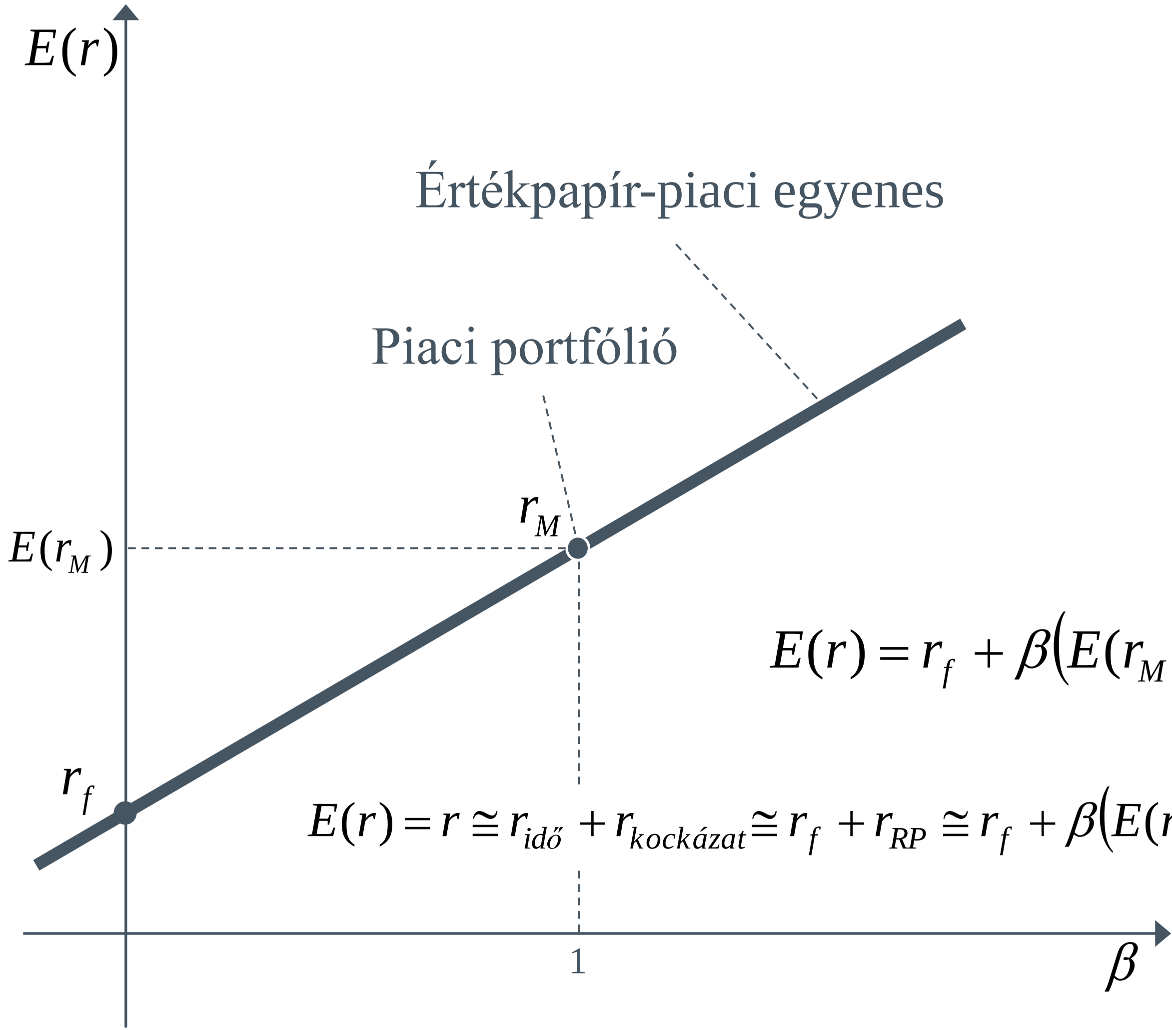


2.4.2 Értékpapír-piaci egyenes

› Beláttuk, hogy a béta…

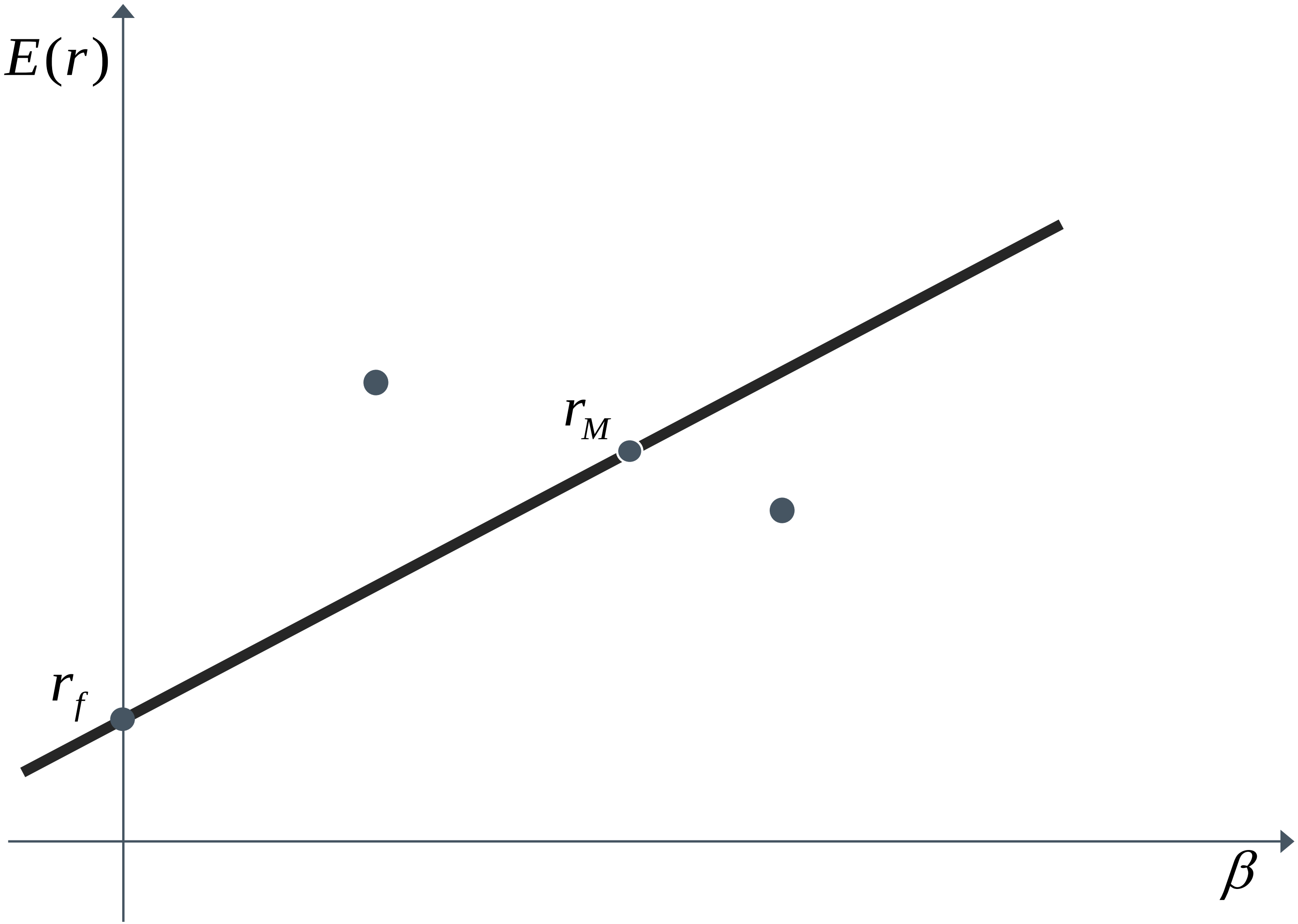
› Ha viszont a béta…, akkor a várható hozamok is a béták szerint kell rendeződjenek…

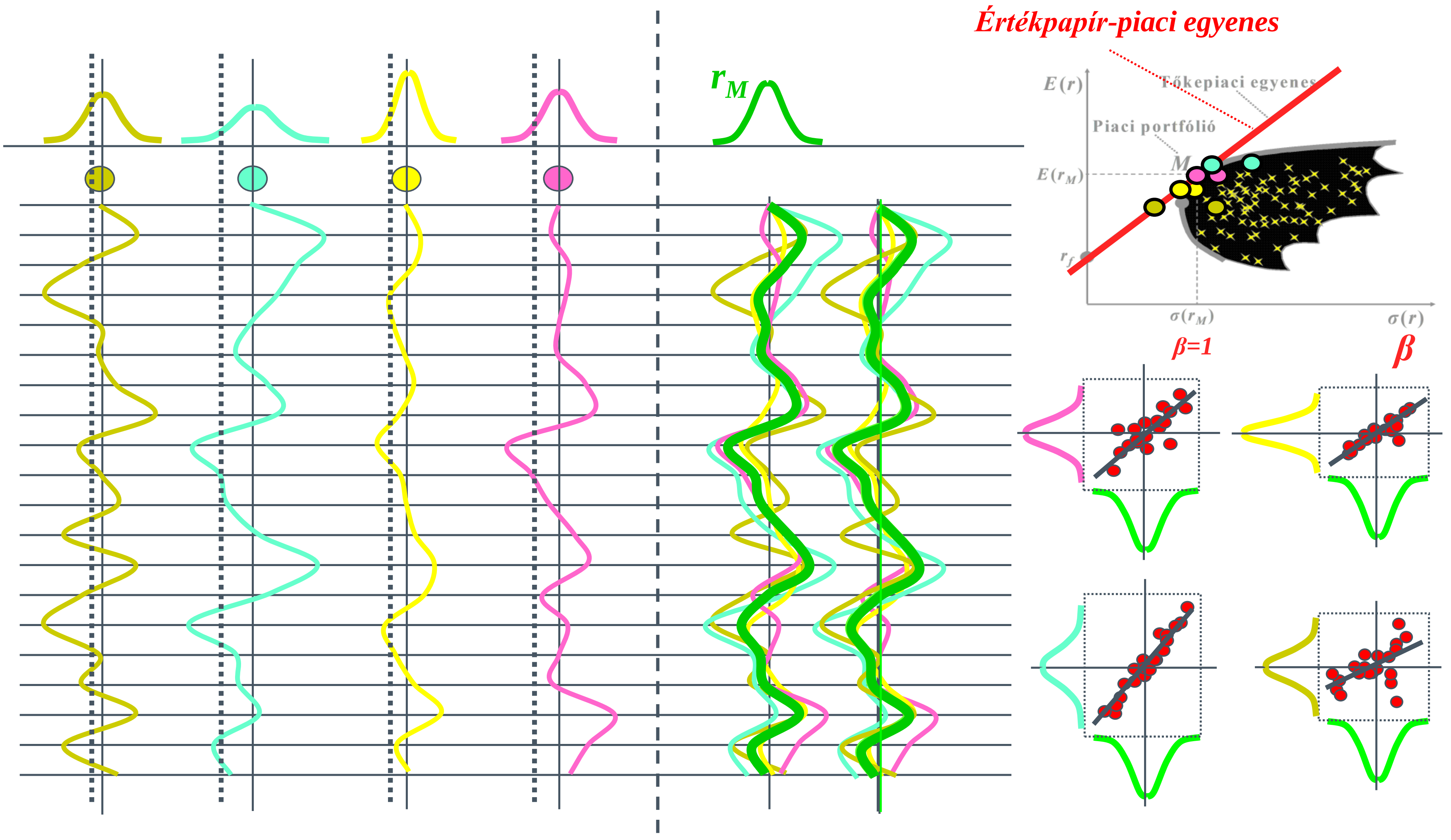
› Már vannak „pontjaink”:
   - $\beta = 0,\ r_f$
   - $\beta = 1,\ E(r_M)$



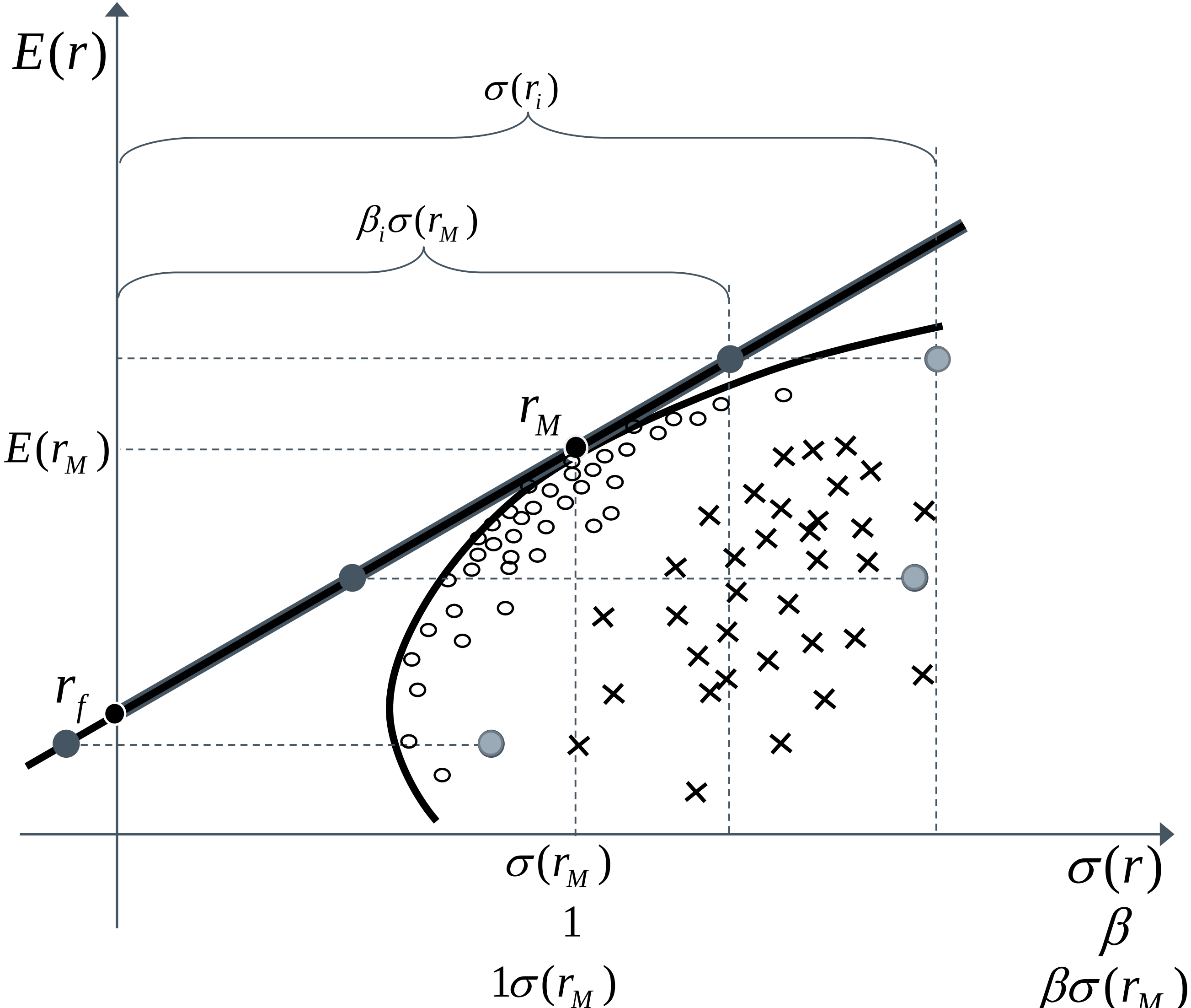
$$E(r) = r_f + \beta\left(E(r_M) - r_f\right)$$

$$E(r) = r \cong r_{idő} + r_{kockázat} \cong r_f + r_{RP} \cong r_f + \beta\left(E(r_M) - r_f\right)$$

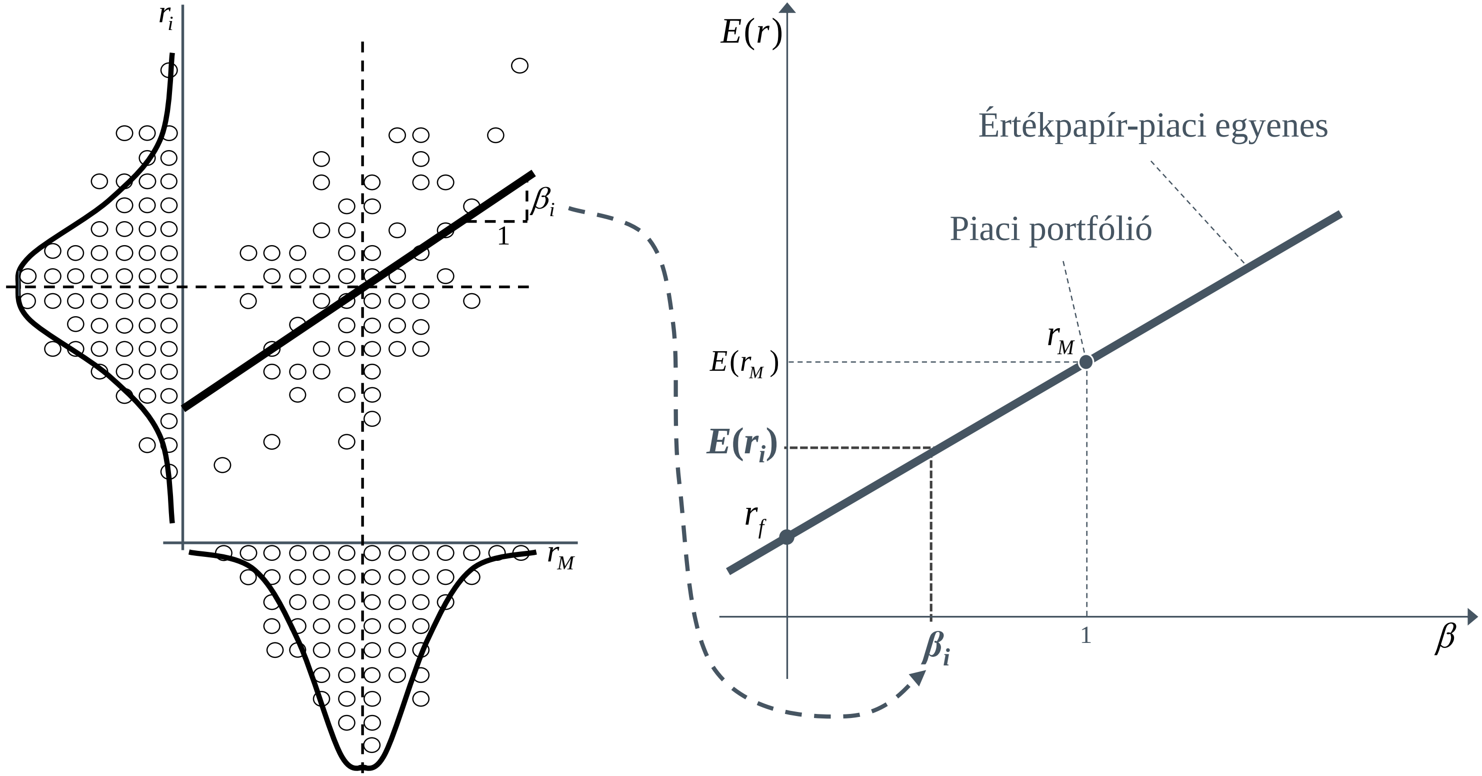

$E(r)$
r_M
r_f
β



r_M
Értékpapír-piaci egyenes
$E(r)$
Tőkepiaci egyenes
Piaci portfólió
M
$E(r_M)$
r_f
$\sigma(r_M)$
$\sigma(r)$
$\beta=1$
β


$E(r)$
$\sigma(r_i)$
$\beta_i\sigma(r_M)$
r_M
$E(r_M)$
r_f
$\sigma(r_M)$
1
$1\sigma(r_M)$
$\sigma(r)$
β
$\beta\sigma(r_M)$

- Béták stabilitása
  - Nagy gyakorlati jelentőség
  - Elfogadjuk a stabilitást…



Múltbeli (átlagos) viselkedés → Jövőbeli (várható) viselkedés

Várható = Elvárható = Átlagos

BME

Iparág	β
Acél (általános)	0,87
Acél (integrált)	0,91
Acél és bányászat	1,01
Alumínium	0,95
Arany / ezüst bányászat	0,91
Áruszállítás / Bérfuvarozás	0,80
Autó alkatrész gyártás (csere)	0,67
Autó- és (egyéb) gumi	0,91
Autóalkatrész gyártás (beszállító)	0,87
Bank (Kanada)	1,20
Bank (USA)	0,99
Bank (USA, Középnyugat)	1,02
Bank (USA-n kívül)	1,52
Befektetési tevékenység (nem USA)	1,44
Befektetési tevékenység (USA)	0,86
Biztosítás (élet)	1,16
Biztosítás (tulajdon / baleset)	1,12

BME

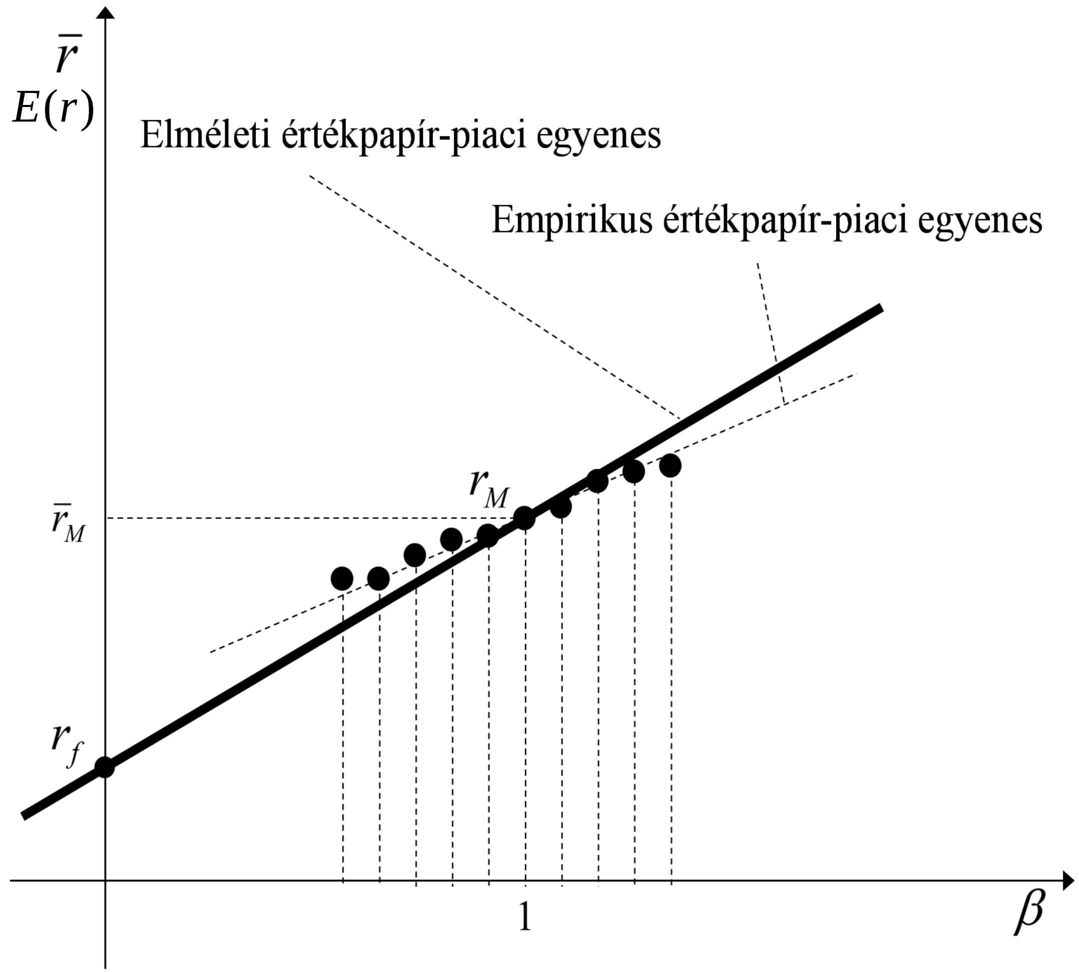
2.4.3 CAPM tesztjei

- A modell adta előrejelzések és a valós árak viszonya.
  - Abból indulunk ki, hogy a várakozások átlagosan és összességükben helyesek voltak.
  - Ekkor a hosszabb idő alatti valós adatoknak közelíteni kell a (korábbi) várakozásokhoz (stabil béták, idő- és kockázatdiszkontok esetén).

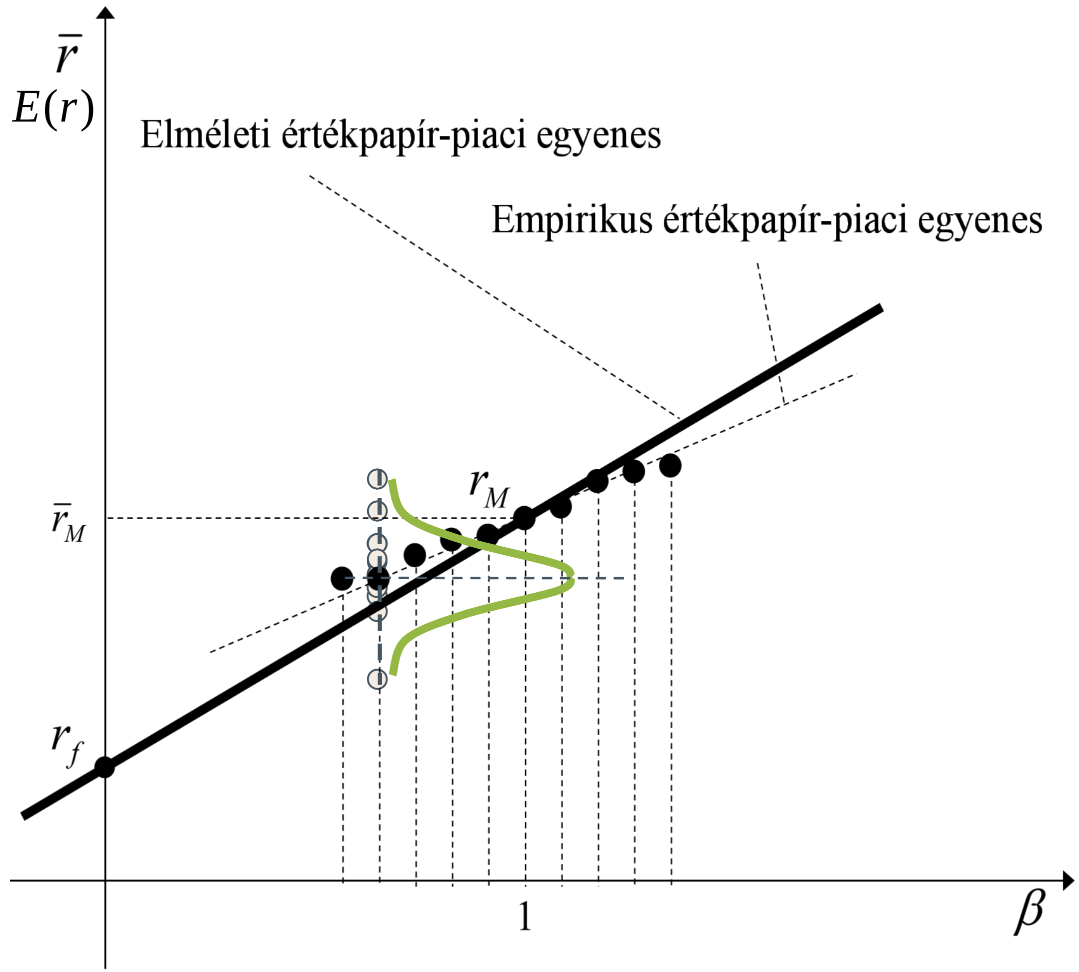
BME

- *CAPM* tesztelésének menete
  - Kijelölünk egy időszakot (mondjuk adott öt évet), és véletlenszerűen kiválasztunk „jó sok” (mondjuk száz) értékpapírt.
  - Egyenként meghatározzuk az értékpapírok bétáit, valamint átlagos éves hozamait.
  - Az eredményeket béta – átlagos hozam koordináták szerint ábrázoljuk.

BME


$\bar{r}$
$E(r)$
Elméleti értékpapír-piaci egyenes
Empirikus értékpapír-piaci egyenes
r_M
$\bar{r}_M$
r_f
1
β

BME



$\bar{r}$
$E(r)$
Elméleti értékpapír-piaci egyenes
Empirikus értékpapír-piaci egyenes
r_M
$\bar{r}_M$
r_f
1
β

- A *CAPM* „elég jó”…
  - Különösen annak a fényében, hogy a modell mögött milyen erős feltételezések állnak.
- Eltérések magyarázatai
  - 1) A *CAPM* valójában érvényes, csak a piaci portfólió megragadásával vannak problémák.
    - Nem megfelelő az M-et reprezentáló index.
  - 2) Olyan tőkepiaci tökéletlenségek lépnek fel, amik a *CAPM*-et irreálissá teszik.
    - Pl. hitelfelvételi költségek és korlátok, adótorzítások stb.
  - 3) Egyéb befektetői szempontok, faktorok is vannak, nem csak a β.