

- (10p) 1. Legyen \mathbf{x} és \mathbf{y} egy skaláris szorzatos vektortér tetszőleges elemei. Bizonyítsa be az $|\mathbf{x} + \mathbf{y}|^2 + |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2 = 2|\mathbf{x}|^2 + 2|\mathbf{y}|^2$ paralellogrammaszabályt !
- (10p) 2. Legyen V a "közönséges" vektorok tere; $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ egy ortonormált bázisa; $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ és $\mathbf{T} : V \rightarrow V$ a $\mathbf{T} \mathbf{w} = \mathbf{v} \times \mathbf{w}$ képlettel értelmezett operátor.
- (a) Határozza meg \mathbf{T} nullterét, képterét,
(b) és ezeknek egy-egy bázisát !
- (10p) 3. Létezik-e olyan p harmadfokú polinom, amely kielégíti a $p(k) = k^4$ ($k = 1, 2, 3$) és $p''(2) = 48$ feltételeket ?
- (10p) 4. Számítsa ki az $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix reciprokat !
- (10p) 5. Határozza meg a $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ mátrix sajátértékeit és négy lineárisan független sajátvektorát !
- (10p) 6. (a) Hol konvergens az $f_n(x) = \frac{e^{nx} - 1}{e^{nx} + 1}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) függvénysorozat ? Mi a határfüggvénye ?
(b) Egyenletes-e a konvergencia ?
- (10p) 7. Bizonyítsa be a $\left(\sum_{k=1}^{\infty} \arctg \frac{x}{k^2} \right)' = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{x^2 + k^4}$ azonosságot ! Itt x tetszőleges valós szám.
- (10p) 8. Határozza meg $\int_0^x \frac{e^t - 1}{t} dt$ 0 körüli Taylor-sorát !

70-80 pont = jeles
60-69 pont = jó
50-59 pont = közepes
40-49 pont = elégséges

1. Zárthelyi megoldásokkal

1998 tavasz I.évf. 13.-18.tk.

1. Határozza meg az $y' = xy^2$ differenciálegyenlet általános megoldását és azt a megoldást, mely kielégíti az $y(0) = -2$ kezdeti érték feltételt! Ellenőrizze a kapott eredményt!

2. Konvergensek-e az alábbi improprius integrálok? Válaszát indokolja!

$$\text{a) } \int_0^1 \frac{1}{\sin x} dx \quad \text{b) } \int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$$

3. Konvergensek-e az alábbi numerikus sorok? Válaszát indokolja!

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

4. Hol konvergens és hol egyenletesen konvergens az $f_n(x) = \frac{1}{n^x}$ függvénysorozat?

5. Hol folytonosak az alábbi függvények? Válaszát indokolja!

$$\text{a) } f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^4} \quad \text{ha } (x, y) \neq 0, f(0, 0) = 0 \quad \text{b) } g(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^4} \quad \text{ha } (x, y) \neq 0, g(0, 0) = 0$$