ANALÍZIS(2)
Mérnök Informatikus szak

**II. ZÁRTHELYI** $\beta$

**2011. április 14.**
Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

**1. feladat (17 pont)**

a) Határozza meg a következő sor konvergencia tartományát és abszolút konvergencia tartományát!
Adjon meg egy intervallumot, melyen a konvergencia egyenletes!

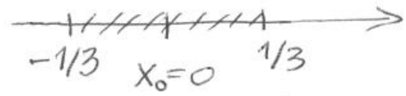
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{\sqrt[3]{n}}\, x^n$$

b) Adja meg a következő sor konvergenciasugarát!

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{\sqrt[3]{n}}\, x^{2n}$$

a.) $\boxed{12}$ $\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\dfrac{3^n}{\sqrt[3]{n}}} = \dfrac{3}{\sqrt[3]{\sqrt[n]{n}}}$, $\sqrt[n]{n} \to 1$ $\longrightarrow 3 = \dfrac{1}{R} \Rightarrow R = \dfrac{1}{3}$ 5

Végpontok:




3

$x = -\frac{1}{3}$: $\sum^{\infty} \frac{(-3)^n}{\sqrt[3]{n}} \left(-\frac{1}{3}\right)^n = \sum^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ div. $\left(\alpha = \frac{1}{3} < 1\right)$

$x = \frac{1}{3}$: $\sum^{\infty} \frac{(-3)^n}{\sqrt[3]{n}} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \sum^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$ konv., mert Leibniz sor.
De nem abszolút konv.

K. T.: $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$

1 A. K. T.: $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ $\left((x_0-R, x_0+R)\text{-en a sor absz. konv.}\right)$

3 Pl. $\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right] \subset (x_0-R, x_0+R)$-ben egyenletes a konv.

b) $\boxed{5}$ $x^2 = u$ helyettesítéssel az a.)-beli feladatot kapjuk.
Tehát
K.T.: $-\frac{1}{3} < u \le \frac{1}{3}$

$-\frac{1}{3} < x^2 \le \frac{1}{3} \Rightarrow |x| \le \frac{1}{\sqrt{3}}$

Ezért $R = \frac{1}{\sqrt{3}}$

**2. feladat (14 pont)**

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{n-2}$$

Írja fel a sor összegfüggvényét és határozza meg a sor konvergenciasugarát!

$f(x) := \sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{n-2}$ ; $f(0)=0$ (1)

$x \neq 0$: $f(x) = x^2 \sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^{n-2}}{n-2} = x^2 f_1(x)$ (2)

$f_1'(x) = \frac{d}{dx} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^{n-2}}{n-2} = \sum_{n=3}^{\infty} x^{n-3} = \frac{1}{1-x}$ (4)

$x \in (-R, R)$ $\qquad q = x \Rightarrow R = 1$ (1)

$\int_0^x f_1'(t)\,dt = f_1(x) - \underbrace{f_1(0)}_{=0} = f_1(x) = \int_0^x \frac{1}{1-t}\,dt = -\ln(1-t)\Big|_0^x =$ (2)

$= -\ln(1-x)$ (2)

$\Rightarrow f(x) = -x^2 \ln(1-x)$ és $R=1$ (nem változik) (2)

**3. feladat (15 pont)**

a) Adja meg az alábbi függvények megadott pontra támaszkodó Taylor sorát és annak konvergencia tartományát!

*a1)* $f(x) = \mathrm{e}^{-3x}$, $x_0 = 2$ $\qquad$ *a2)* $g(x) = x^2\,\mathrm{e}^{-x^2}$, $x_0 = 0$

b) Számítsa ki az

$$\int_0^{0,1} g(x)\,\mathrm{d}x$$

integrál értékét közelítően az integrálandó függvényt hatodfokú Taylor polinomjával közelítve! Adjon becslést az elkövetett hibára!

a1) $\boxed{4}$ $f(x) = e^{-3x} = e^{-3(x-2)-6} = e^{-6} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n (x-2)^n}{n!}$

K.T.: $(-\infty, \infty)$

a2.) $\boxed{4}$ $g(x) = x^2 e^{-x^2} = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!}\Big|_{u=-x^2} =$

$= x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n+2}$

K.T.: $(-\infty, \infty)$

an2z2110414/2.

b.) $\boxed{7}$ $\int_0^{0,1} g(x)\,dx = \int_0^{0,1} \left(x^2 - x^4 + \frac{1}{2!}x^6 - \frac{1}{3!}x^8 + \dots\right) dx$

$T_6(x) \rightarrow$

Szabad tagonként integrálni:

$= \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \frac{1}{2!}\frac{x^7}{7} - \frac{1}{3!}\frac{x^9}{9} + \dots \Big|_0^{0,1} =$

$= \underbrace{\frac{0,1^3}{3} - \frac{0,1^5}{5} + \frac{1}{2}\frac{0,1^7}{7}}_{:=a} - \underbrace{\frac{1}{6}\frac{0,1^9}{9}}_{:=b} + \dots \approx a$

$|H| \le |b| = \frac{1}{6}\frac{0,1^9}{9}$, mert Leibniz sor.

**4. feladat (16 pont)**

Írja fel az

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{1+x}} \qquad \text{és a} \qquad g(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{16-x^2}}$$

függvények $x_0 = 0$ körüli Taylor sorait és határozza meg azok konvergencia sugarait!

$g^{(6)}(0) = ?$ (Elemi műveletekkel adja meg!)

$f(x) = (1+x)^{-1/4} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/4}{n} x^n$ (3) $\qquad R_f = 1$ (1)

$g(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{16}} \frac{1}{\sqrt[4]{1-\frac{x^2}{16}}} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{-x^2}{16}\right)^{-1/4} =$

$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/4}{n}\left(\frac{-x^2}{16}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}\binom{-1/4}{n}\left(-\frac{1}{16}\right)^n x^{2n}$ (4)

$\left|-\frac{x^2}{16}\right| = \frac{|x|^2}{16} < 1 \Rightarrow |x| < 4 \Rightarrow R_g = 4$ (2)

$a_k = \frac{g^{(k)}(0)}{k!} \Rightarrow g^{(k)}(0) = k!\,a_k$

$g^{(6)}(0) = 6!\,a_6 = 6!\,\frac{1}{2}\binom{-1/4}{3}\left(-\frac{1}{16}\right)^3 = 6!\,\frac{1}{2}\,\frac{\left(-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{5}{4}\right)\left(-\frac{9}{4}\right)}{3!}\,\frac{-1}{16^3}$

(2) (2) (2)

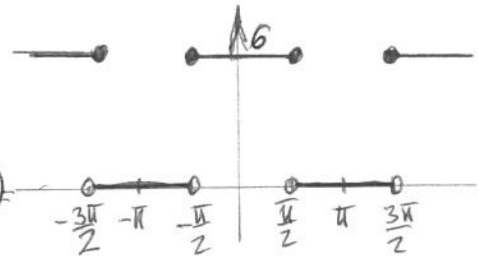
an2z2 110414/3.

**5. feladat (16 pont)**

Határozza meg az alábbi függvény Fourier együtthatóit!
Írja fel a Fourier sor első négy nem nulla tagját!

$$f(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{ha } x \in \left[-\pi\,,\,-\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}\,,\,\pi\right) \\ 6\,, & \text{ha } x \in \left[-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}\right] \end{cases} \qquad f(x) = f(x+2\pi)\,, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Legyen a sor összegfüggvénye $\phi$ ! $\quad \phi\left(\frac{\pi}{2}\right) = ?\,, \quad \phi(0) = ?$




$b_k = 0$, mert $f$ páros (2)

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} 6\,dx = \frac{1}{\pi}\,6\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 6 \quad (3)$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\underbrace{f(x)}_{ps}\,\underbrace{\cos kx}_{ps}}_{ps}\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} 6\cos kx\,dx =$$

$$= \frac{12}{\pi}\,\frac{\sin kx}{k}\Big|_0^{\pi/2} = \frac{12}{\pi}\,\frac{1}{k}\left(\sin k\frac{\pi}{2} - 0\right) = \begin{cases} 0, & \text{ha } k \text{ ps} \\ \frac{12}{\pi}\frac{1}{k}, & \text{ha } k = 4l+1 \\ -\frac{12}{\pi}\frac{1}{k}, & \text{ha } k = 4l+3 \end{cases} \quad (5) \quad (2)$$

$$\phi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx =$$

$$= 3 + \frac{12}{\pi}\left(\cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x - \ldots\right) \quad (2)$$

$$\phi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{f\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) + f\left(\frac{\pi}{2} + 0\right)}{2} = \frac{6+0}{2} = 3 \quad (1)$$

$\phi(0) = f(0) = 6$ ( $f$ folytonossága miatt ) (1)

an2 z2 110414/4.

**6. feladat (22 pont)**

$$f(x,y) = \frac{6x-3y}{4x+2y}, \qquad P_0 = (1,2)$$

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = ?$

b) $\operatorname{grad} f(P_0) = ?$ Miért létezik?

c) $\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{P_0} = ?$, ha $\underline{e} \parallel -7\,\underline{i}$

d) Adja meg $\max \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{P_0}$ értékét!

a.) $\boxed{5}$

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{6x-3y}{4x+2y} &= \lim_{x\to 0}\frac{6x}{4x} = \frac{3}{2}\\ \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{6x-3y}{4x+2y} &= \lim_{y\to 0}\frac{-3y}{2y} = -\frac{3}{2}\end{aligned}\right\}\neq \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \nexists$$

b.) $\boxed{9}$

$$f'_x = \frac{6(4x+2y)-(6x-3y)\cdot 4}{(4x+2y)^2} \quad 2 \qquad f'_y = \frac{-3(4x+2y)-(6x-3y)\cdot 2}{(4x+2y)^2} \quad 2$$

$$\operatorname{grad} f(P_0) = f'_x(P_0)\,\underline{i} + f'_y(P_0)\,\underline{j} = \frac{3}{4}\underline{i} - \frac{3}{8}\underline{j} \quad 1$$

2

$f'_x$ és $f'_y$ $\exists$ és folytonos $K_{P_0}$-ban $\Rightarrow \operatorname{grad} f(P_0)\ \exists$ 2

c.) $\boxed{5}$

$$\left.\frac{df}{d\underline{e}}\right|_{P_0} = \operatorname{grad} f(P_0)\,\underline{e} \quad 2 \qquad \text{és} \quad \underline{e} = -\underline{i} \quad 1$$

$$\left.\frac{df}{d\underline{e}}\right|_{P_0} = \left(\frac{3}{4}\underline{i} - \frac{3}{8}\underline{j}\right)\cdot(-\underline{i}) = -\frac{3}{4} \quad 2$$

d.) $\boxed{3}$

$$\max \left.\frac{df}{d\underline{e}}\right|_{P_0} = |\operatorname{grad} f(P_0)| = \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(-\frac{3}{8}\right)^2} \quad \left(= \frac{\sqrt{45}}{8}\right)$$

*Pótfeladatok (csak az elégséges eléréséhez javítjuk ki):*

**7. feladat (11 pont)**

Írja fel az alábbi függvény megadott $x_0$ pontra támaszkodó Taylor sorát és adja meg a sor konvergencia tartományát!

a) $f(x) = \dfrac{1}{3 - 9x^2}, \quad x_0 = 0$

b) $g(x) = \dfrac{1}{x - 4}, \quad x_0 = 2$

a.) $f(x) = \frac{1}{3} \frac{1}{1 - 3x^2} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (3x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 3^{n-1} x^{2n}$ 3

K.T: $|q| = |3x^2| = 3|x|^2 < 1 \Rightarrow |x| < \frac{1}{\sqrt{3}}$

K.T.: $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ 2

b.) $g(x) = \frac{1}{(x-2)-2} = -\frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{x-2}{2}} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x-2}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{2^{n+1}} (x-2)^n$ 4

K.T: $|q| = \left|\frac{x-2}{2}\right| = \frac{|x-2|}{2} < 1 \Rightarrow |x-2| < 2 \Rightarrow$ K.T.: $(0, 4)$ 2

**8. feladat (9 pont)**

$$f(x, y) = (x - 2y)^5 - 2x^2 - 5y + 3$$

a) $f'_x(x, y) = ?; \quad f'_y(x, y) = ?$

b) Írja fel a függvény $P_0(1, 1)$ pontjabeli érintősíkjának egyenletét!

a.) $f'_x = 5(x-2y)^4 - 4x$ 2 $\quad f'_y = 5(x-2y)^4(-2) - 5$ 2

b.) $f'_x(P_0)(x - x_0) + f'_y(P_0)(y - y_0) - (z - f(P_0)) = 0$ 2

$f'_x(1,1) = 1, \quad f'_y(1,1) = -15, \quad f(1,1) = -5$

$(x-1) - 15(y-1) - (z+5) = 0$ 3

an2 z2 11041416.