ANALÍZIS(2)
Mérnök Informatikus szak

II. ZÁRTHELYI

2010. november 10.
Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

1. feladat (15 pont)

Határozza meg az alábbi hatványsorok konvergenciasugarát és konvergencia tartományát:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2\, 3^{2n}}\, x^n$ *b)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2\, 3^{2n}}\, (x+3)^n$ *c)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2\, 3^{2n}}\, x^{2n}$

a.) $\boxed{8}$ $a_n = \frac{(-1)^n}{n^2 \cdot 9^n}$

$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2 \cdot 9} \longrightarrow \frac{1}{9} = \frac{1}{R} \Rightarrow R = 9$ 5

$-9 \quad 0 \quad 9$

Végpontok:

3 $x = -9$: $\sum^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 9^n} (-9)^n = \sum^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konv. $(\alpha = 2 > 1)$

$x = 9$: $\sum^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 9^n} 9^n = \sum^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ konv. (Leibniz sor)
vagy: mert absz.kon

K.T: $[-9, 9]$

b.) $\boxed{3}$ Most $x_0 = -3$

$-9 \le x+3 \le 9$ (a.) alapján)

$\Rightarrow -12 \le x \le 6$

Tehát K.T.: $[-12, 6]$

c.) $\boxed{4}$ $u := x^2$ helyettesítéssel az a.)-beli feladatot kapjuk:

$-9 \le u \le 9$

$\Rightarrow \underbrace{-9 \le}_{\forall x\text{-re igaz}} x^2 \le 9 \Rightarrow |x| \le 3$

Tehát K.T.: $[-3, 3]$

2. feladat (11 pont)

Határozza meg a

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\, x^{n+1}$$

sor összegfüggvényét és konvergencia sugarát!

$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} n\, x^{n+1} = x^2 + 2x^3 + 3x^4 + \dots$

$f(0) = 0$

an2z21011 10/11.

Ha $x \neq 0$:

$$f(x) = x^2 \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}}_{:=f_1(x)} \quad 2$$

$$f_1(x) = \frac{d}{dx} \int_0^x f_1(x)\,dx = \frac{d}{dx} \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}\,dx =$$

$[0,x] \subset (-R,R)$: szabad tagonként integrálni 1

$$= \frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} n \int_0^x x^{n-1}\,dx = \frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} n \left.\frac{x^n}{n}\right|_0^x =$$

$$= \frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{d}{dx} \frac{x}{1-x} = \frac{1\cdot(1-x) - x(-1)}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2} \quad 5$$

$|q| = |x| < 1 \Rightarrow R = 1$ 1

$$f(x) = x^2 \frac{1}{(1-x)^2} \quad 1$$ ($f(0)$-ra is jó!) és $R=1$ (változatlan) 1

3. feladat (11 pont)

Írja fel az alábbi függvény megadott pontra támaszkodó Taylor sorát és adja meg annak konvergencia tartományát!

a) $f(x) = e^{3x}$, $x_0 = 2$ b) $g(x) = \dfrac{1}{1+2x^2}$, $x_0 = 0$

a.) $\boxed{5}$

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!} \quad ; \quad u \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = e^{3x} = e^{3(x-2)+6} = e^6 e^{3(x-2)} = e^6 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n (x-2)^n}{n!} \quad \boxed{4}$$

K.T.: $(-\infty, \infty)$ 1

b.) $\boxed{6}$ geometriai sor: $q = -2x^2$

$$\frac{1}{1+2x^2} = \frac{1}{1-(-2x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-2x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n x^{2n} \quad 4$$

$$|q| = |-2x^2| = 2|x|^2 < 1 \Rightarrow |x| < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

K.T.: $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 2

4. feladat (19 pont)

$$f(x) = x^2 \sin(3x^2)$$

a) Írja fel az f függvény $x_0 = 0$ pontra támaszkodó Taylor sorát és adja meg annak konvergencia tartományát!

b) $f^{(11)}(0) = ?$, $f^{(12)}(0) = ?$ (A sorfejtésből adjon választ!)

c) Adja meg az

$$\int_0^{1/3} f(x)\, dx$$

integrál közelítő értékét, ha az integrálandó függvényt 12-edrendű Taylor polinomjával közelítjük!
Adjon becslést az elkövetett hibára!

a.) $\boxed{7}$

$\sin u = u - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} - \dots \quad u \in \mathbb{R}$

$\sin 3x^2 = 3x^2 - \frac{3^3}{3!}x^6 + \frac{3^5}{5!}x^{10} - \frac{3^7}{7!}x^{14} + \dots$

$f(x) = 3x^4 - \frac{3^3}{3!}x^8 + \frac{3^5}{5!}x^{12} - \frac{3^7}{7!}x^{16} + \dots$ 5

K.T.: $(-\infty, \infty)$ 2

b.) $\boxed{5}$

Ha $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$: $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$

$\Rightarrow f^{(n)}(0) = n!\, a_n$ 2

$f^{(11)}(0) = 11!\, \underbrace{a_{11}}_{x^{11} \text{ eh-ja} = 0} = 0$ 1

$f^{(12)}(0) = 12!\, \underbrace{a_{12}}_{x^{12} \text{ eh-ja}} = 12!\, \frac{3^5}{5!}$ 2

c.) $\boxed{7}$

$\int_0^{1/3} \left(3x^4 - \frac{3^3}{3!}x^8 + \frac{3^5}{5!}x^{12} - \frac{3^7}{7!}x^{16} + \dots\right) dx =$

$T_{12}(x)$

$= 3\frac{x^5}{5} - \frac{3^3}{3!}\frac{x^9}{9} + \frac{3^5}{5!}\frac{x^{13}}{13} - \frac{3^7}{7!}\frac{x^{17}}{17} + \dots \Big|_0^{1/3} =$

$= \underbrace{\frac{1}{5}\frac{1}{3^4} - \frac{1}{3!\,9}\frac{1}{3^6} + \frac{1}{5!\,13}\frac{1}{3^8}}_{:=a} - \underbrace{\frac{1}{7!\cdot 17}\frac{1}{3^{10}}}_{:=b} + \dots \approx a$ 5

$|H| < |b|$, mert Leibniz sor 2

an1z2101110/3.

5. feladat (10 pont)
Írja fel az

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{1 - 2x^3}}$$

függvény $x_0 = 0$ pontra támaszkodó Taylor sorát és adja meg annak konvergenciasugarát! Írja fel a sor első négy nem nulla tagját elemi műveletekkel!

$$(1+u)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} u^n \qquad R=1$$

$$f(x) = (1+(-2x^3))^{-\frac{1}{5}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/5}{n} (-2x^3)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/5}{n} (-2)^n x^{3n} = \quad 5$$

$$= 1 + \frac{-1/5}{1}(-2)x^3 + \frac{(-\frac{1}{5})(-\frac{6}{5})}{1\cdot 2}(-2)^2 x^6 + \frac{(-\frac{1}{5})(-\frac{6}{5})(-\frac{11}{5})}{1\cdot 2\cdot 3}(-2)^3 x^9 + \dots \quad 3$$

$$|u| = |-2x^3| = 2|x|^3 < 1 \Rightarrow |x| < \frac{1}{\sqrt[3]{2}} = R \quad 2$$

6. feladat (15 pont)

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(2y+5)\,x^2}{x^2+y^2} = ?$

b)

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{(2y+5)\,x^2}{x^2+y^2} + 5y, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0\,, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Adja meg $f'_y(x,y)$ -t, ahol az létezik!

a.) $\boxed{6}$

$$\lim_{\substack{\varrho_n \to 0 \\ \varphi_n \text{ tetsz.}}} \frac{(2\varrho_n \sin\varphi_n + 5)\,\varrho_n^2 \cos^2\varphi_n}{\varrho_n^2} = \lim_{\substack{\varrho_n \to 0 \\ \varphi_n \text{ tetsz.}}} (2\underbrace{\varrho_n \overbrace{\sin\varphi_n}^{\text{korl.}}}_{\to 0} + 5)\cos^2\varphi_n =$$

$= 5\cos^2\varphi_n$: függ φ_n-től $\Rightarrow \nexists$ a határérték

(Vagy $\lim\limits_{x\to 0} f(x, mx)$ ..... : függ m-től)

b.) Ha $(x,y) \neq (0,0)$:

$\boxed{9}$

$$f'_y(x,y) = \frac{2x^2(x^2+y^2) - (2y+5)x^2 \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} + 5 \quad 3$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,0+k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{\frac{0}{k^2} + 5k}{k} = \quad 3$$

$$= \lim_{k\to 0} \underbrace{\frac{k}{k}}_{=1} \cdot 5 = \mathbf{5} \quad 3$$

an2z2101110/4.

7. feladat (19 pont)

$$f(x,y) = (2x+3y)^3 + x^2 - 3y^2 \quad , \qquad P_0(-1\,,\,1)$$

a) $f'_x(x,y) = ?\,,\qquad f'_y(x,y) = ?$
Hol deriválható totálisan az f függvény? $\quad \operatorname{grad} f(P_0) = ?$

b) Számolja ki az f függvénynek a P_0 pontbeli $\underline{v} = (-5,-1)$ irányú iránymenti deriváltját!

c) Mennyi az f függvény P_0 pontbeli legnagyobb iránymenti deriváltja? Milyen irányban kapjuk? ($\underline{e} = ?$)

a.) $\boxed{10}$

$$\left.\begin{aligned} f'_x &= 3(2x+3y)^2 \cdot 2 + 2x \\ f'_y &= 3(2x+3y)^2 \cdot 3 - 6y \end{aligned}\right\}\ 5$$

f'_x, f'_y mindenütt létezik és folytonos $\Rightarrow f$ mindenütt deriválható 2

$\operatorname{grad} f(P_0) = f'_x(P_0)\,\underline{i} + f'_y(P_0)\,\underline{j} = 4\underline{i} + 3\underline{j}$ 3

b.) $\boxed{5}$

$\dfrac{df}{d\underline{e}} = \operatorname{grad} f(P_0) \cdot \underline{e}$ 2

$\underline{v} = -5\underline{i} - \underline{j}\ ;\ |\underline{v}| = \sqrt{25+1} = \sqrt{26}$

$\underline{e} = \dfrac{\underline{v}}{|\underline{v}|} = -\dfrac{5}{\sqrt{26}}\underline{i} - \dfrac{1}{\sqrt{26}}\underline{j}$ 1

$\dfrac{df}{d\underline{e}} = (4\underline{i} + 3\underline{j})\left(-\dfrac{5}{\sqrt{26}}\underline{i} - \dfrac{1}{\sqrt{26}}\underline{j}\right) = -\dfrac{20}{\sqrt{26}} - \dfrac{3}{\sqrt{26}} = -\dfrac{23}{\sqrt{26}}$ 2

c.) $\max \left.\dfrac{df}{d\underline{e}}\right|_{P_0} = |\operatorname{grad} f(P_0)| = \sqrt{16+9} = 5$ 2

$\underline{e} = \dfrac{\operatorname{grad} f(P_0)}{|\operatorname{grad} f(P_0)|} = \dfrac{4}{5}\underline{i} + \dfrac{3}{5}\underline{j}$ irányban kapjuk 2

Pótfeladatok (csak az elégséges eléréséhez javítjuk ki):

8. feladat (11 pont)

Írja fel az alábbi függvények megadott x_0 ponthoz tartozó Taylor sorait és adja meg azok konvergencia tartományát!

a) $f(x) = e^{2x+1}, \quad x_0 = 0$

b) $g(x) = \dfrac{1}{8+x}, \quad x_0 = 2$

a.) $\boxed{4}$

$$e^{2x+1} = e\, e^{2x} = e \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!} = e \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} x^n \quad 3$$

K.T.: $(-\infty, \infty)$ 1

b.) $\boxed{7}$

$$g(x) = \frac{1}{8+x} = \frac{1}{10+(x-2)} = \frac{1}{10} \frac{1}{1 - \frac{-(x-2)}{10}} =$$

$$= \frac{1}{10} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-(x-2)}{10} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{10^{n+1}} (x-2)^n \quad 5$$

$$|q| = \left| - \frac{(x-2)}{10} \right| = \frac{|x-2|}{10} < 1 \Rightarrow |x-2| < 10$$

K.T: $(-8, 12)$ 2

9. feladat (9 pont)

Határozza meg az

$$f(x, y) = 6 - x^2 - 3xy^2$$

függvény $(x_0, y_0) = (2, -1)$ pontjához tartozó érintősík egyenletét!

Az érintősík:

$$f_x'(2,-1)(x-2) + f_y'(2,-1)(y+1) - (z - f(2,-1)) = 0 \quad 3$$

$$f_x' = -2x - 3y^2 \qquad f_x'(2,-1) = -7 \quad 2$$

$$f_y' = -6xy \qquad f_y'(2,-1) = 12 \quad 2$$

$$f(2,-1) = -4$$

$$-7(x-2) + 12(y+1) - (z+4) = 0 \quad 2$$

an2z21011110/6.