AN(1) 06.01.19 V

1) Feladat (10 pont).

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+2}{n^2+3}\right)^{n^2} = ? \qquad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+2}{n^2+3}\right)^{n} = ?$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+2}{n^2+3}\right)^{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{2}{n^2}\right)^{n^2}}{\left(1+\frac{3}{n^2}\right)^{n^2}} \ (2) = \frac{e^2}{e^3} = \frac{1}{e} \ (2)$$

$$\underbrace{\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{n}}}_{\to 1 \ (1)} (1) \le \left(\frac{n^2+2}{n^2+3}\right)^{n} = \left(\left(\frac{n^2+2}{n^2+3}\right)^{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} (1) \le \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}}_{\to 1} (2)$$

$$\left(\frac{n^2+2}{n^2+3}\right)^{n} \to 1 \ (1)$$

AN(1) 06.01.19.V.

2) Feladat (10 pont).

a) Mikor mondjuk, hogy egy numerikus sor konvergens és összege s ?
b) Mondja ki és bizonyítsa be a sorokra vonatkozó majoráns kritériumot!

(D) A $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ (1) numerikus sor konvergens és összege s , ha létezik a

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) \ (1) = s \in \mathbb{R} \ (1)$$

(véges) határérték.

5.1. Majoráns kritérium

(T) $\boxed{\text{Ha } 0 < a_n \le c_n \ (1) \quad \forall\, n\text{-re és } \sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{ konvergens} \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergens} \ (1)}$

(B) A megfelelő részletösszegek sorozatára a feltétel miatt fennáll, hogy

$$s_n^a \le s_n^c. \ (1)$$

Továbbá $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergenciája miatt $s_n^c \le K$ (1) $\implies$ s_n^a korlátos és pozitív tagú a sor (1)

$\implies \sum_{1}^{\infty} a_n$ konv. (2) ∎

(T)
> (i) Egy pozitív tagú sor részletösszegei monoton növekedőek.
>
> (ii) Egy pozitív tagú sor akkor és csak akkor konvergens, ha részletösszegeinek sorozata korlátos.

3) Feladat (22 pont).

$$g(x)=\frac{x}{x^2+1}$$

a) Határozza meg azokat az intervallumokat ahol a g függvény szigorúan monoton!

b)

$$\lim_{x\to\infty} g(x) \;=?$$

c) Legyen

$$f(x)=\arcsin\left(\frac{x}{x^2+1}\right),\qquad x\in[1,\infty)$$

Indokolja meg, hogy f-nek létezik az f^{-1} inverze!

$$f^{-1}(x)=?\quad \mathcal{D}_{f^{-1}}=?\quad \mathcal{R}_{f^{-1}}=?$$

$\boxed{8}$ a) $g'(x)=\frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2}$ (1) $=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}=0$, ha $x=-1$, $x=1$

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,\infty)$	(2)
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	(2)
$g(x)$	↘		↗		↘	(3)

$(-\infty,-1)$-en és az $(1,\infty)$-en szig. mon. csökkenő, az $(-1,1)$-en szig. mon. növő.

$\boxed{2}$ b) $\lim_{x\to\infty} g(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x+\frac{1}{x}}=0$

$\boxed{12}$ c) Belső fv. szig. mon. csökk és a külső fv. szig mon nő ⟹ összetett fv. szig mon. csökk (2) ⟹ ∃ az f^{-1} inverz (1)

g értékkészlete, ha $x\in[1,\infty)$ $=(0,\frac{1}{2}]$ (1)

f —"—, ha $x\in[1,\infty)$ $=(0,\frac{\pi}{6}]$ (2) $=\mathcal{D}_{f^{-1}}$ (1)

$\mathcal{R}_{f^{-1}}=\mathcal{D}_f=[1,\infty)$ (1)

$x=\arcsin\frac{y}{1+y^2}$ (1) $\Longrightarrow (\sin x)(1+y^2)=y \Longrightarrow y^2-\frac{1}{\sin x}y+1=0$

$y=\frac{\frac{1}{\sin x}\pm\sqrt{\frac{1}{\sin^2 x}-4}}{2}$ (2) $\Longrightarrow f^{-1}(x)=\underbrace{\frac{1}{2\sin x}}_{\in[1,\infty)}+\underbrace{\sqrt{\left(\frac{1}{2\sin x}\right)^2-1}}_{\in[0,\infty)}$ (1)

AN(1) 06.01.19. V.

4) Feladat (10 pont).

$$\lim_{x\to 0}\,(\cosh x)^{\frac{1}{\sinh 7x}}\;=?$$

$(\cosh x)^{\frac{1}{\sinh 7x}}=e^{\frac{\ln\cosh x}{\sinh 7x}}$ (1) $=f(x)$

$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cosh x}{\sinh 7x}$, $\ln\cosh x\to 0$ (2), $\sinh 7x\to 0$ (1) $\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sinh x}{\cosh x}}{7\cosh 7x}$ (4) $=$

$=\frac{0}{7}=0$ (1) $\Longrightarrow \lim_{x\to 0} f(x)=e^0=1$ (1)

***5) Feladat (10 pont).**

Vezesse be az $t=\sqrt[4]{x}$ új változót az

$$\int_1^{16}\frac{2+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt[4]{x^3}}\,dx$$

integrálba majd határozza meg!

$t=\sqrt[4]{x}\Rightarrow x=t^4\Longrightarrow dx=4t^3\,dt$ (2)

$I=\int_1^{16}\frac{2+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt[4]{x^3}}\,dx=\int_1^{2}\frac{2+t}{t^4+t^3}4t^3\,dt$ (1) (1) $=$

$=4\int_1^2\frac{t+2}{t+1}\,dt$ (1) $=4\int_1^2 1+\frac{1}{t+1}\,dt$ (2) $=$

$4\Big[t+\ln|t+1|\Big]_1^2$ (2) $=4\left(2+\ln 3-1-\ln 2\right)$ (1) $=$

AN(1) 06.01.19. V.

***6) Feladat (15 pont).**

$$\int_2^\infty \frac{6x}{(x-1)(x+1)(x+2)}\,dx = ?$$

$$I = \int \frac{6x}{(x-1)(x+1)(x+2)}\,dx = \int \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2}\,dx \quad (1)$$

$$6x = A(x+1)(x+2) + B(x-1)(x+2) + C(x-1)(x+1) \quad (1)$$

$x=-1$ $\quad -6 = B(-2)1. \Rightarrow B = 3 \quad (1)$

$x=1$ $\quad 6 = A\cdot 2\cdot 3 \Rightarrow A = 1 \quad (1)$

$x=-2$ $\quad -12 = C(-3)(-1) \Rightarrow C = -4 \quad (1)$

$$I = \ln|x-1| + 3\ln|x+1| - 4\ln|x+2| + C \quad (2)$$

$$\int_2^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_2^b f(x)\,dx \,(1) = \lim_{b\to\infty} \Big[\ln|x-1| + 3\ln|x+1| - 4\ln|x+2|\Big]_2^b \quad (1)$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left[\ln \frac{(x-1)(x+1)^3}{(x+2)^4}\right]_2^b \,(2) = \lim_{b\to\infty} \ln \frac{(b-1)(b+1)^3}{(b+2)^4} - \ln\frac{3^3}{4^4} \quad (1)$$

$$= \lim_{b\to\infty} \ln \frac{(1-\frac{1}{b})(1+\frac{1}{b})^3}{(1+\frac{2}{b})^4} \,(2) + \ln\frac{4^4}{3^3} = \ln 1 + \ln\frac{4^4}{3^3} =$$

$$= \ln\frac{4^4}{3^3} \quad (1)$$

AN(1) 06.01.19. V

***7) Feladat (08 pont).**

Legyen

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \text{ racionális szám} \\ 0, & \text{ha } x \text{ irracionális szám} \end{cases}, \qquad x \in [2,5]$$

Határozza meg az f függvény alsó és felső közelítő összegét egyenletes felosztás esetén!

Integrálható-e az f függvény?

$$s_{F_n} = \sum_{k=0}^{n-1} m_k (x_{k+1} - x_k) \,(1) = \sum_{k=0}^{n-1} 0 \cdot \frac{3}{n} = 0 \quad (1)$$

$$S_{F_n} = \sum_{k=0}^{n-1} M_k (x_{k+1} - x_k) \,(1) = \sum_{k=0}^{n-1} 1 \cdot \frac{3}{n} \,(1) = 3 \quad (1)$$

$h = 0$ (1) $\qquad H = 3$ (1) $\qquad h \neq H \Rightarrow f$ nem integrálható. (1)

AN(1) 06.01.19. V.

***8) Feladat (15 pont).**

a) Mondja ki és bizonyítsa be az integrál függvény differenciálhatóságára vonatkozó tételt

b) Legyen $x > 1$.

$$\frac{d}{dx}\left(\int_1^x \frac{\sin t^5}{t^{100}+\pi}\,dt\right) = ? \qquad \frac{d}{dx}\left(\int_1^{\sqrt[5]{x}} \frac{\sin t^5}{t^{100}+\pi}\,dt\right) = ?$$

a) $\boxed{10}$

(D) $f \in R_{[a,b]}$. Az

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x\,, \quad x \in [a,b]$$

függvényt f integrálfüggvényének nevezzük.

(T) $f \in R_{[a,b]}$; (1) $\quad F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t, \quad x \in [a,b]$

1. Az integrálfüggvény folytonos $[a,b]$-ben.
2. Ha még f folytonos is $x_0 \in (a,b)$-ben, akkor F differenciálható x_0-ban és

$$F'(x_0) = f(x_0). \text{ (2)}$$

(B)

2. $F'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = f(x_0)$. ha $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists \delta(\varepsilon) > 0$:

$$\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - f(x_0)\right| < \varepsilon, \quad \text{ha } 0 < |x-x_0| < \delta(\varepsilon) \text{ (2)}$$

$$\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - f(x_0)\right| = \left|\frac{F(x)-F(x_0)-f(x_0)(x-x_0)}{x-x_0}\right| = \left|\frac{\int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_{x_0}^x f(x_0)\,\mathrm{d}t}{x-x_0}\right| = \text{ (2)}$$

$$= \left|\frac{\int_{x_0}^x (f(t)-f(x_0))\,\mathrm{d}t}{x-x_0}\right| \le \frac{\left|\int_{x_0}^x |f(t)-f(x_0)|\,\mathrm{d}t\right|}{|x-x_0|} := \circledast \text{ (1)}$$

Mivel f folytonos x_0-ban, $\exists \delta(\varepsilon) > 0$: $|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$, ha $|x-x_0| < \delta(\varepsilon)$.

(Legyen x ilyen!) Most $|t-x_0| \le |x-x_0| < \delta(\varepsilon)$, így ezzel a $\delta(\varepsilon)$-nal

$$\circledast < \frac{\left|\int_{x_0}^x \varepsilon\,\mathrm{d}t\right|}{|x-x_0|} \underset{(1)}{=} \frac{|\varepsilon(x-x_0)|}{|x-x_0|} = \varepsilon \text{ (1)}$$

AN(1) 06.01.19. V.

*8) b) $\boxed{5}$

$$\frac{d}{dx}\left(\int_1^x \frac{\sin t^5}{t^{100}+\pi}\,dt\right) = \frac{\sin x^5}{x^{100}+\pi}, \text{ mert az integrandus folytonos. (2)}$$

$$\frac{d}{dx}\int_1^{\sqrt[5]{x}} \frac{\sin t^5}{t^{100}+\pi}\,dx = \left.\frac{\sin t^5}{t^{100}+\pi}\right|_{t=\sqrt[5]{x}} \cdot \left(\sqrt[5]{x}\right)' = \text{ (2)}$$

$$= \frac{\sin x}{x^{20}+\pi} \cdot \frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}} \text{ (1)}$$

mert a felső határ differenciálható.

Pótfeladat.

Csak a kettes és a hármas vizsgajegy eléréséhez javítjuk ki.

9) Feladat (10 pont).

Legyen

$$f(x) = \begin{cases} x\ln x^2\,, & \text{ha } x > 0 \\ 0\,, & \text{ha } x = 0\,, \\ \arctan(1-x) + e^{\frac{1}{x}}\,, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

Milyen szakadása van f-nek a 0-ban?

Differenciálható-e f a 0-ban?

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \operatorname{arctg} 1 + e^{-\infty} \text{ (1)} = \frac{\pi}{4} + 0 \text{ (2)}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x^2}{\frac{1}{x}} \text{ (2)} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{2}{x}}{-\frac{1}{x^2}} \text{ (2)} = \lim_{x\to 0^+} -2x = 0$$

f-nek ugrása van (1)

f nem folyt $\Rightarrow$ f nem diffható a 0-ban. (1)