Villamosmérnök A3X (2014 tavasz) — 2. vizsgazh ZH

Minden feladat 12 pontos, tehát összesen 60 pontot lehet összegyűjteni. Minden feladat esetében szükséges a világos indoklás, nem elég a végeredmény és/vagy a válasz.

1. Oldja meg az $y'' - 4y' + 4y = \sin t$ differenciálegyenletet!

Megoldás. A karakterisztikus egyenletnek 2 kétszeres gyöke, így $y_{ha} = c_1e^{2t} + c_2te^{2t}$. $\sin t = e^{0t}(0\cos 1t + 1\sin 1t)$ és $0 + i$ nem gyöke a karakterisztikus egyenletnek, ezért y_{ip}-t $t^0e^{0t}(P\cos t + Q\sin t) = P\cos t + Q\sin t$ alakban keressük, ahol $P, Q \in \mathbb{R}$.
Ekkor $y'_{ip} = -P\sin t + Q\cos t$, $y''_{ip} = -P\cos t - Q\sin t$; visszahelyettesítve $\sin t = (3P - 4Q)\cos t + (4P + 3Q)\sin t$, amiből $P = 4/25$ és $Q = 3/25$ azaz $y_{ip} = 1/25(4\cos t + 3\sin t)$.
Végül $y_{ia} = y_{ha} + y_{ip} = c_1e^{2t} + c_2te^{2x} + 1/25(4\cos t + 3\sin t)$.

2. Legyen $v(x, y) = (xy^2, \operatorname{arctg}(\ln(y+3)) - x)$ és K az origó középpontú, R sugarú pozitívan irányított körvonal. $\int_K v\ dr =?$

Megoldás. A Stokes-tétel szerint $\int_K v\ dr = \iint_F \operatorname{rot} v\ dV$ ahol F az origó középpontú, R sugarú körlap. Tehát $\int_K v\ dr = \iint_F -1 - 2xy\ dxdy = -\int_0^R\int_0^{2\pi}(2r^2\cos\varphi\sin\varphi + 1)r\ d\varphi dr = -\int_0^R\int_0^{2\pi} 2r^3\cos\varphi\sin\varphi + r\ d\varphi dr = -\int_0^R\left[2r^3\sin^2\varphi + r\varphi\right]_0^{2\pi} dr = -\int_0^R 2\pi r = -2\pi\frac{R^2}{2} = -R^2\pi$.

3. (a) $\operatorname{Res}_0 \sin\frac{1}{z} =?$ (b) Adja meg $1/z$ összes 1 körüli Laurent-sorát!

Megoldás. (a) $\sin\frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(1/z)^{2n+1}}{(2n+1)!} \rightsquigarrow \operatorname{Res}_0 = c_{-1} = 1$.
(b) $|z-1| < 1$: $\frac{1}{z} = \frac{1}{1+(z-1)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n$
$|z-1| > 1$:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z-1}\frac{1}{\frac{z}{z-1}} = \frac{1}{z-1}\frac{1}{\frac{z-1+1}{z-1}} = \frac{1}{z-1}\frac{1}{1+\frac{1}{z-1}}$$
$$= \frac{1}{z-1}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^{-n-1} = \sum_{n=-\infty}^{-1}(-1)^{n+1}(z-1)^n$$

4. $\int_K \frac{z+1}{z^3+2iz^2}\ dz =?$, ha K az origó középpontú, 1 sugarú pozitívan irányított körvonal.

Megoldás. Legyen $f(z) = \frac{z+1}{z+2i}$. Akkor f holomorf egy K-t tartalmazó egyszeresen összefüggő tartományon, ezért $\int_K \frac{z+1}{z^3+2iz^2}\ dz = \int_K \frac{f(z)}{z^2}\ dz = 2\pi i f'(0)$ a differenciálhányadosokra vonatkozó Cauchy-féle integrálformula miatt. $f'(z) = \frac{2i-1}{(z+2i)^2}$, így $f'(0) = \frac{2i-1}{-4}$, tehát $\int_K \frac{z+1}{z^3+2iz^2}\ dz = 2\pi i\frac{1-2i}{4} = \pi(1+\frac{i}{2})$.

5. (a) $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ szimmetrikus lineáris operátor, akkor $\operatorname{rot} v =?$
(b) $\mathbb{R}^2$-ben $\operatorname{rot}\operatorname{CROSS} r =?$
(c) Milyen izolált szingularitása van $\sin\frac{1}{z}$-nek 0-ban?
(d) Igaz-e: ha f reguláris egy, a G egyszerű zárt görbét tartalmazó tartományon, akkor $\int_G f(z)\ dz = 0$?

Megoldás. (a) 0, mert v derivált-operátora saját maga, tehát szimmetrikus, ezért antiszimmetrikus része 0.
(b) $\operatorname{rot}\operatorname{CROSS} r = \operatorname{div} r = 2$.
(c) Lényeges szingularitása van, mert a Laurent-sorában végtelen sok negatív kitevőjű tag van.
(d) Nem: pl. $\int_G 1/z\ dz = 2\pi i$ minden origó középpontú pozitívan irányított körvonalon.