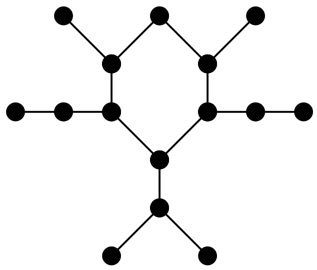
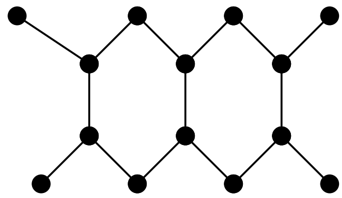
Bevezetés a számításelméletbe II.
3. (emelt) gyakorlat 2002. március 07.

1. Határozzuk meg a független élek maximális számát az ábra gráfjain! Bizonyítsuk be, hogy nem lehet többet találni!

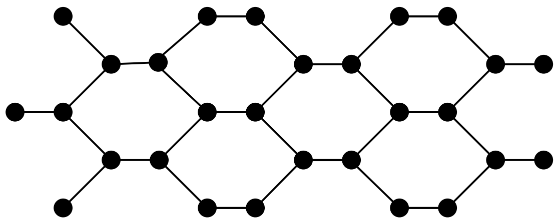
a)



b)



c)



Az a) és b) esetben $\upsilon(G) = 6$, és nem lehet több, mert $\tau(G) = 6$.
A c) esetben $\upsilon(G)=13$, és nem lehet több mert $\tau(G) = 13$.

2. Legyen $\Delta(G)$ egy gráfban a maximális fokszám, $\tau(G)$ pedig a lefogó pontok minimális száma. Bizonyítsuk be, hogy $\Delta(G)\tau(G) \geq |E(G)|$.

A minimális lefogó pontok fokszámait ha összeadjuk, akkor ezek összege nem kisebb $|E(G)|$-nél (vagyis $d_1 + d_2 + \ldots + d_\tau \geq |E(G)|$). Mivel $\Delta(G) \geq d_1, d_2, \ldots, d_\tau$ ➔ $\Delta(G)\tau(G) \geq |E(G)|$. (mivel minden d_i helyén annál nagyobb szám áll)

3. Legyen $V(G) = \{v_1, \ldots, v_{106}\}$. v_i és v_j között akkor van él, ha $|i - j| \leq 7$. Mennyi G kromatikus száma, $\chi(G)$?

Periodikusan ki lehet színezni 8 színnel, de kevesebbel semmiképp sem, mert a klikkszáma 8 (pl. az első 8 pont egy teljes gráfot alkot).

4. Bizonyítsuk be, hogy minden gráfban $\chi(G) \geq \frac{|V(G)|}{\alpha(G)}$! Adjunk olyan gráfot, amelyre $\chi(G) = \frac{|V(G)|}{\alpha(G)}$!

Vagyis azt kell belátnunk, hogy $\chi(G)\alpha(G) \geq |V(G)|$, ami adódik abból, hogy véve egy maximális elemszámú független ponthalmazt, annak pontjai $\leq \chi(G)$ ponttal szomszédosak. Egyenlőség áll fenn pl. egy teljes 2-es vagy 3-as esetén.

5. Hagyjuk el egy $2n$ pontú teljes gráfból egy Hamilton-körének éleit! Mennyi a keletkező gráf kromatikus száma? És ha egy $2n + 1$ pontú gráfból indulunk ki?

A $2n$ pontú teljes gráf kromatikus száma $2n$. Ha elhagyjuk egy Hamilton-körének éleit, akkor a (volt) kör mentén kettesével egyforma színűek lehetnek a pontok, vagyis a kromatikus szám n-re változik. A kör mentén 3 pont azonban már nem lehet egyforma színű, ezért $2n + 1$ pont esetében $n + 1$ szín kell.

6. Bizonyítsuk be, hogy minden n pontú gráfra $\chi(G)\chi(\overline{G}) \geq n$!

$\chi(G)\alpha(G) \geq n$, valamint $\chi(\overline{G}) \geq \omega(\overline{G}) = \alpha(G)$.

7. Legyen egy összefüggő gráfban a maximális fokszám k. Bizonyítsuk be a Brooks tétel használata nélkül, hogy ha létezik k-nál kisebb fokú csúcs, akkor a gráf színezhető k színnel.

8. Legyenek a G gráf fokszámai rendre $d_1 \geq d_2 \geq d_3 \geq \ldots d_n$. Bizonyítsuk be, hogy

$$\chi(G)^2 \leq 1 + d_1 + d_1 + 3d_2 + 4d_5 + 5d_9 + 6d_{14} + 7d_{20} + \ldots$$

$$\chi(G)^2 \leq 1 + d_1 + d_1 + 3d_2 + 4d_5 + 5d_9 + 6d_{14} + 7d_{20} + \ldots$$

$$\Downarrow\leq$$

$$\chi(G)^2 \leq 1 + \Delta + d_1 + d_2 + d_5 + d_9 + d_{14} + d_{20} + \ldots$$

$$\Downarrow=$$

$$\left.\begin{array}{l} \chi(G)^2 \leq 1 + \Delta + 2e \\ \text{Továbbá: } \chi \leq 1 + \Delta \end{array}\right\} \quad \chi^2 - \chi \leq 2e$$