1. feladat (4+10=14 pont)
a) Ismertesse az algebra alaptételét!
b) Adja meg az $z^4 + 3z^2 + 2 = 0$ egyenlet összes megoldását!

Mo. *a*) Minden komplex együtthatós polinom felírható elsőfokú polinomok szorzataként, vagy minden komplex polinomnak van gyöke. **(4p)**
b) $z_{1,2}^2 = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2}$ **(3p)** , tehát $z_1^2 = -2$, $z_2^2 = -1$, **(3p)** így az egyenlet gyökei $\pm\sqrt{2}i$, $\pm i$ **(4p)** .

---

2. feladat (6+10=16 pont)
a) Milyen kapcsolat van egy sorozat konvergenciája, korlátossága, illetve monotonitása között? (Mondjon ki két tanult tételt!)
b) Konvergens-e az $a_1 = 5$, $a_{n+1} = \sqrt{2a_n + 3}$ sorozat, és ha igen, mi a határértéke?

Mo. *a*) Ha egy sorozat konvergens, akkor korlátos **(2p)** . Ha egy sorozat monoton növő és felülről korlátos, akkor konvergens **(4p)** . (Ha egy sorozat monoton fogyó és alulról korlátos, akkor konvergens.)
b) $a_1 = 5 > \sqrt{13} = a_2$ **(1p)** , és ha $a_n > a_{n+1}$, akkor $2a_n + 3 > 2a_{n+1} + 3$, és $a_{n+1} = \sqrt{2a_n + 3} > \sqrt{2a_{n+1} + 3} = a_{n+2}$, így (a_n) monoton csökkenő **(3p)** , és $a_n \geq 0$ **(2p)** , tehát a sorozat korlátos. Az A határértékre teljesül, hogy $A = \sqrt{2A + 3}$, vagyis $A = -1$ vagy $A = 3$ **(3p)** , de $a_n \geq 0$, így $A = 3$ **(1p)** .

---

3. feladat (8+8=16 pont)
a) Mondja ki és igazolja a szorzatfüggvény deriválási szabályát!
b) Számolja ki a $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\,\mathrm{sh}(2x)}{\cos(4x) - 1}$ határértéket!

Mo. *a*) **Tétel:** Ha f ás g az x_0 pontban deriválható függvények, akkor fg is deriválható x_0-ban, és $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$. **(2p)**

Bizonyítás: Ha az f és g függvény differenciálható az x_0 pontban, akkor folytonosak is itt **(1p)** , tehát

$$(fg)'(x_0) \overset{\textbf{(1p)}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0)}{h} \overset{\textbf{(2p)}}{=}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0+h)g(x_0)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)}{h} \overset{\textbf{(2p)}}{=}$$
$$= \lim_{h\to 0} f(x_0+h) \lim_{h\to 0} \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} + g(x_0) \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} =$$
$$= f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0).$$

b) $\frac{0}{0}$ típusú határérték **(1p)** , tehát

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\,\mathrm{sh}(2x)}{\cos(4x)-1}\overset{(\mathbf{3p})}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{sh}(2x)+2x\,\mathrm{ch}(2x)}{-4\sin(4x)}\overset{(\mathbf{3p})}{=}\lim_{x\to 0}\frac{4\,\mathrm{ch}(2x)+4x\,\mathrm{sh}(2x)}{-16\cos(4x)}\overset{(\mathbf{1p})}{=}-\frac{1}{4}$$

---

4. feladat (4+14=18 pont)
a) Adjon elégséges feltételt arra, hogy az f függvény egy (a,b) intervallumon konvex! (Mondjon ki egy tanult tételt!)
b) Határozza meg a legbővebb intervallumokat, ahol az $f(x)=(4x+5)\ln(3x+1)$ függvény konvex, illetve konkáv! Hol van inflexiós pontja a függvénynek?

Mo. *a*) Ha f kétszer differenciálható, és $f''(x)\geq 0$ minden $x\in(a,b)$ esetén, akkor f konvex az (a,b) intervallumon **(4p)** . (Vagy: Ha f differenciálható (a,b)-n, és itt f' monoton nő, akkor f konvex az (a,b) intervallumon.)
b) $D_f=\left(-\frac{1}{3},\infty\right)$ **(2p)**

$$f''(x)\overset{(\mathbf{3p})}{=}\left(4\ln(3x+1)+\frac{3(4x+5)}{3x+1}\right)'\overset{(\mathbf{3p})}{=}$$
$$=\frac{12(3x+1)+12(3x+1)-9(4x+5)}{(3x+1)^2}=\frac{36x-21}{(4x+5)^2}=0,$$

ha $x=\frac{7}{12}$ **(1p)** , vagyis f konkáv a $\left(-\frac{1}{3},\frac{7}{12}\right)$ intervallumon **(2p)** , konvex a $\left(\frac{7}{12},\infty\right)$ intervallumon **(2p)** , az $x=\frac{7}{12}$ pontban pedig inflexiós pontja van **(1p)** .

---

5. feladat (4+9=13 pont)*
a) Ismertesse a helyettesítéses integrálás módszerét határozatlan integrálra!
b) Határozza meg $f(x)=\dfrac{x+3}{\sqrt{x-2}+1}$ primitív függvényét a $t=\sqrt{x-2}$ helyettesítéssel!

Mo. *a*) $\displaystyle\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\Big|_{t=\varphi^{-1}(x)}$ **(4p)** (φ egy intervallumon deriválható és invertálható függvény.)
b) Ha $t=\sqrt{x-2}$, akkor $x=t^2+2=\varphi(t)$, $\varphi'(t)=2t$ **(2p)** , így

$$\int\frac{x+3}{\sqrt{x-2}+1}dx\overset{(\mathbf{1p})}{=}\int\frac{t^2+5}{t+1}\cdot 2tdt\overset{(\mathbf{1p})}{=}2\int\frac{t^3+5t}{t+1}dt\overset{(\mathbf{2p})}{=}$$
$$=2\int t^2-t+6-\frac{6}{t+1}dt\overset{(\mathbf{2p})}{=}\frac{2t^3}{3}-t^2+12t-12\ln|t+1|+c\overset{(\mathbf{1p})}{=}$$
$$=\frac{2(\sqrt{x-2})^3}{3}-(x-2)+12\sqrt{x-2}-12\ln(\sqrt{x-2}+1)+c$$

A ∗-os feladatokból legalább 12 pontot el kell érni.

6. feladat (4+9=13 pont)*
a) Ismertesse a Newton–Leibniz-formulát!
b) Számolja ki az alábbi integrált

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/3} \frac{3\sin x + 2}{\cos^2 x} dx.$$

Mo. a) Ha $f \in R[a,b]$, és $\exists F$, melyre $F' = f$ az $[a,b]$ intervallumon, akkor $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ **(4p)**
b) $\displaystyle\int \frac{3\sin x + 2}{\cos^2 x} dx \overset{(\mathbf{3p})}{=} -3\int (\cos x)'(\cos x)^{-2} dx + 2\int \frac{1}{\cos^2 x} dx \overset{(\mathbf{3p})}{=} \frac{3}{\cos x} + 2\,\mathrm{tg}\, x + c$,
vagyis

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/3} \frac{3\sin x + 2}{\cos^2 x} dx \overset{(\mathbf{2p})}{=} \frac{3}{\cos \pi/3} + 2\,\mathrm{tg}\,\pi/3 - \frac{3}{\cos(-\pi/4)} - 2\,\mathrm{tg}(-\pi/4) \overset{(\mathbf{1p})}{=} 6 + 2\sqrt{3} - 3\sqrt{2} + 2.$$

7. feladat (10 pont)*
Konvergens-e az alábbi improprius integrál? Ha igen, adja meg az értékét!

$$\int_0^\infty (x+2)e^{-3x+4} dx$$

Mo. Parciális integrálással

$$\int (x+2)e^{-3x+4} dx = -\frac{(x+2)e^{-3x+4}}{3} + \frac{1}{3}\int e^{-3x+4} dx = -\frac{(3x+7)e^{-3x+4}}{9} + c \qquad (\mathbf{4p}),$$

$$\int_0^\infty (x+2)e^{-3x+4} dx = -\lim_{\omega\to\infty} \frac{(3\omega+7)e^{-3\omega+4}}{9} + \frac{7e^4}{9} = \frac{7e^4}{9}, \qquad (\mathbf{4p}),$$

mert

$$\lim_{\omega\to\infty} \frac{(3\omega+7)e^{-3\omega+4}}{9} = \lim_{\omega\to\infty} \frac{(3\omega+7)}{9e^{3\omega+4}} = 0, \qquad (\mathbf{2p})$$

IMSC feladat (14 IMSC pont)
Határozza meg a $g(x) = x^2$ parabola $(1,1)$ és $(2,4)$ közé eső ívének y-tengely körüli megforgatásával adódó forgáspalást felszínét!

Útmutatás: Először fogalmazza át a feladatot egy másik, f függvény x-tengely körüli forgatására! Ezután oldja meg a problémát a tanult képlettel!

Mo. A g függvény az első síknegyedben invertálható, itt inverze $f(x) = \sqrt{x}$. Az invertáláskor az x és y tengely szerepe felcserélődik, ezért az f függvény grafikonjának $x \in [1,4]$ szakaszának x-tengely körüli megforgatásával kapott alakzat egybevágó a g függvény y-tengely körüli megforgatásával adódó alakzattal. **(4p)**

Így a keresett felszín:

$$A = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + f'^2(x)} \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \qquad \textbf{(3p)}$$

$$= 2\pi \int_1^4 \sqrt{1 + \frac{1}{4x}} \cdot \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \qquad \textbf{(3p)}$$

$$= \pi \int_1^4 \sqrt{4x+1}\,\mathrm{d}x = \qquad \textbf{(1p)}$$

$$= \pi \left[\frac{2}{3 \cdot 4}(4x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_1^4 = \qquad \textbf{(2p)}$$

$$= \frac{\pi}{6}\left(17^{\frac{3}{2}} - 5^{\frac{3}{2}}\right) \qquad \textbf{(1p)}$$
