# RENDSZEROPTIMALIZÁLÁS

Szeszlér Dávid 1-8 = Lineáris, egész értékű prog.

Kombinatorikus optimalizálás

Recski – Matroid

Vizer – közelítő, ütemező algo.

4 műszaki esettanulmány

http://cs.bme.hu/rendszeropt

12h ápr. 16 hétfő $18^{00} - 20^{00}$ 6 feladat

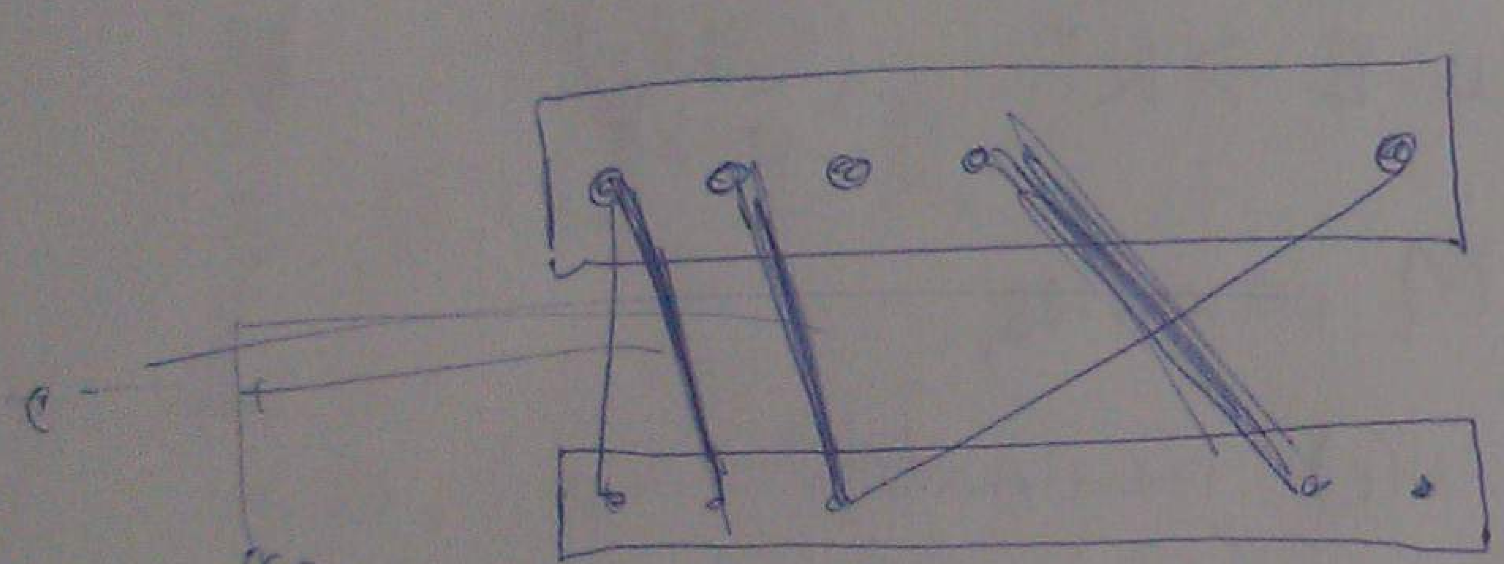
- BSZ-féle
- algel

épít rájuk

+ gráfelmélet – párosítás, folyam, színezés, síkgráfok
+ linalg – mátrixok, rang, illeszkedési mátrix
+ algel – min. súlyú feszítő, mohó alg, bonyolultságelm.
  P, NP ...

---

## Lineáris- és egész értékű programozás

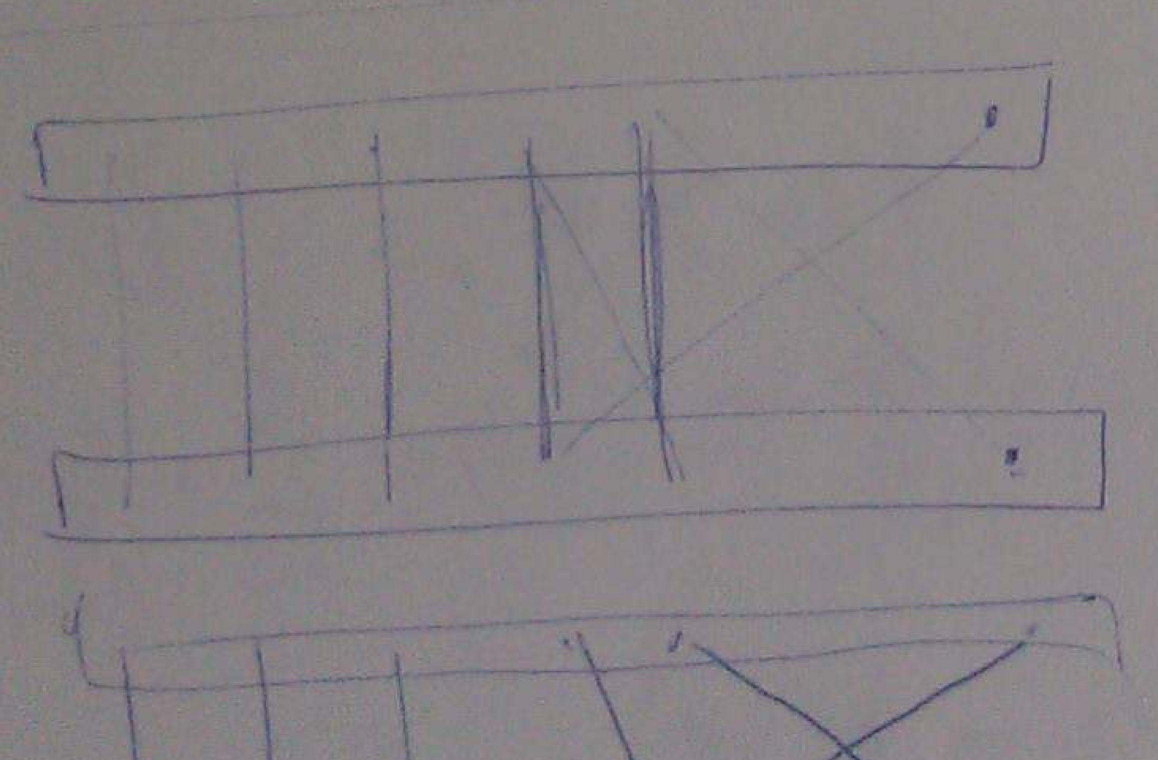


egy párosítás

páros gráfban max. méretű párosítás kell

javító utas algo

L

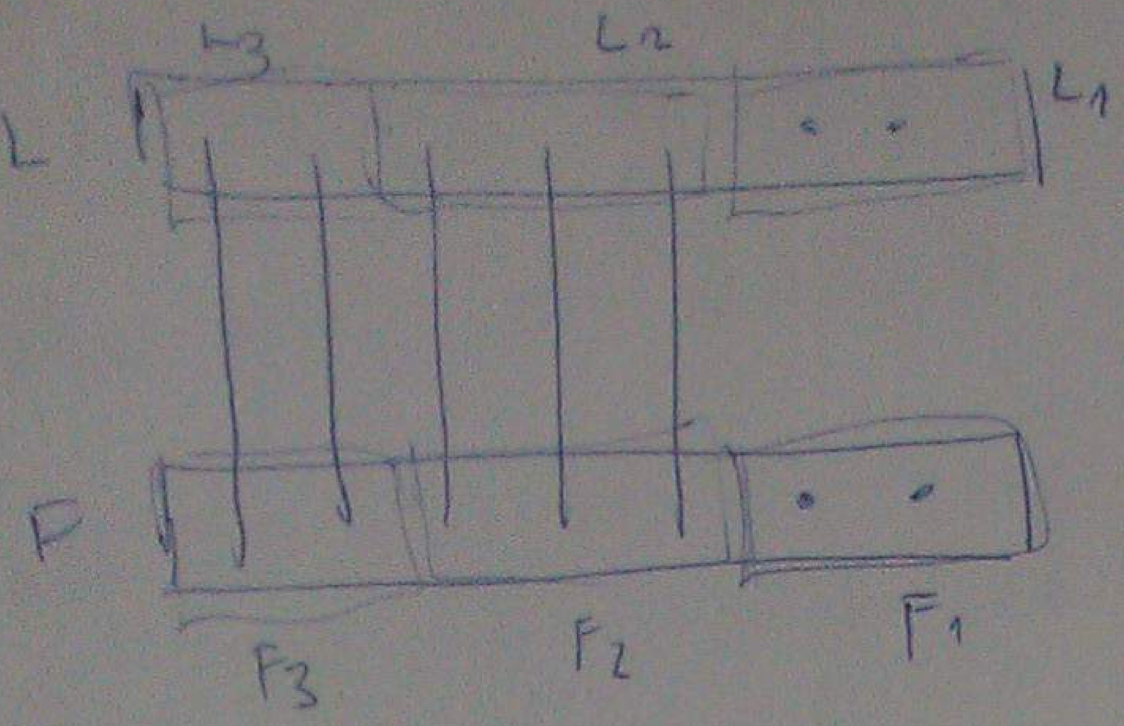


F

5

6

párosítatlan F-ből párosítatlan L-be




alg. leállt, nincs több javító út

$F_1$ / $L_1$ párosítatlan pontok

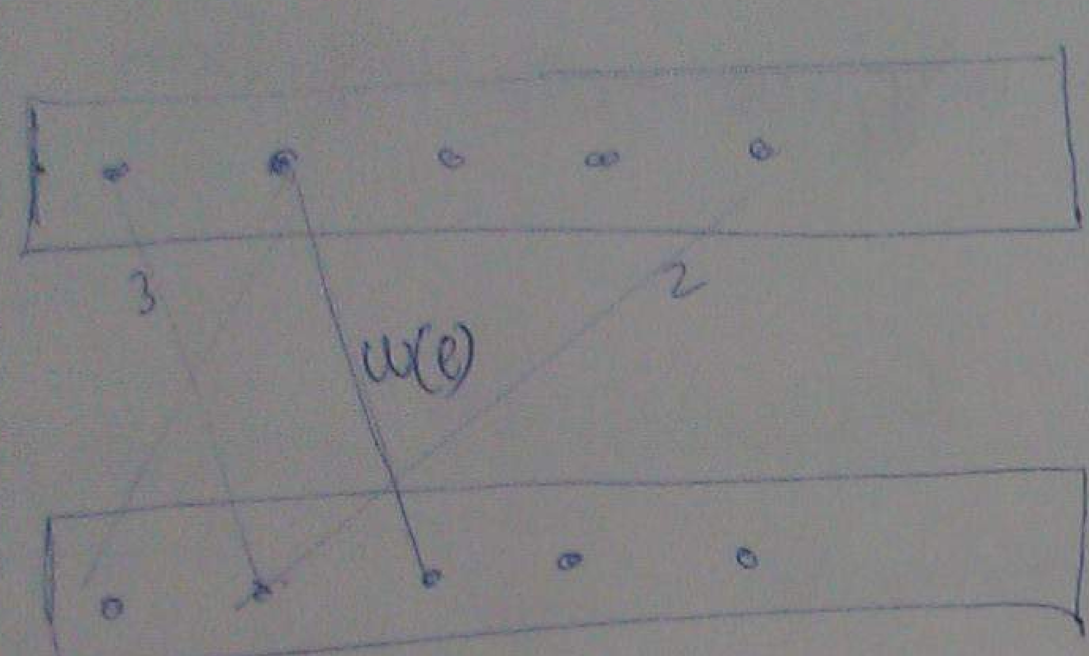
alternáló út - párosítatlan F-ből e
minden 2. benne van (∘

$L_2$: $F_1$-ből alternáló úton elérhető ⟺ L-beliek

$L_3$: maradék

$L_2$ / $L_3$ párjai: $F_2$ / $F_3$

! $(F_1 \cup F_2)$-ből $(L_1 \cup L_3)$-ba nincs él G-ben




fordító iroda, élek súlya w(e) költsége

és profitja maximalizálni

max. összsúlyú párosítás

Input: $G(F, L; E)$ páros gráf
$w: E \to \mathbb{R}^+$ (költség) profit

Output: M párosítás,
$\sum_{e \in M} w(e)$ maximális

(max méretű párosítás általánosítása)

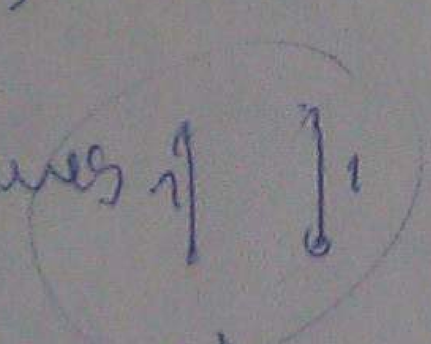
max összsúlyú teljes párosítás

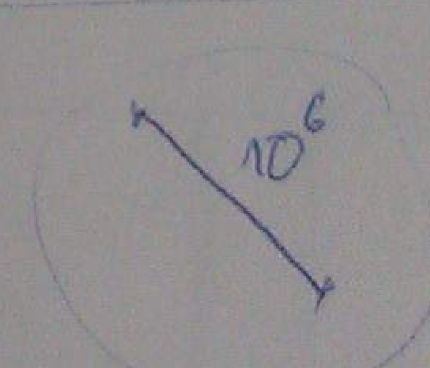
Input: $G(F, L; E)$ páros gráf,
amiben van TP

$w: E \to \mathbb{R}$

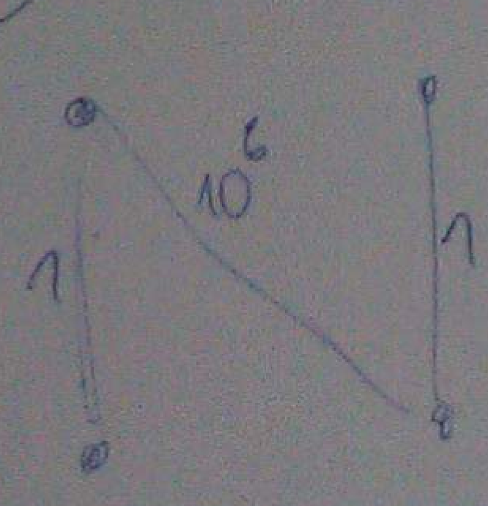
Output: M TP, amire
$\sum_{e \in M} w(e)$ maximális

A-t oldjuk meg



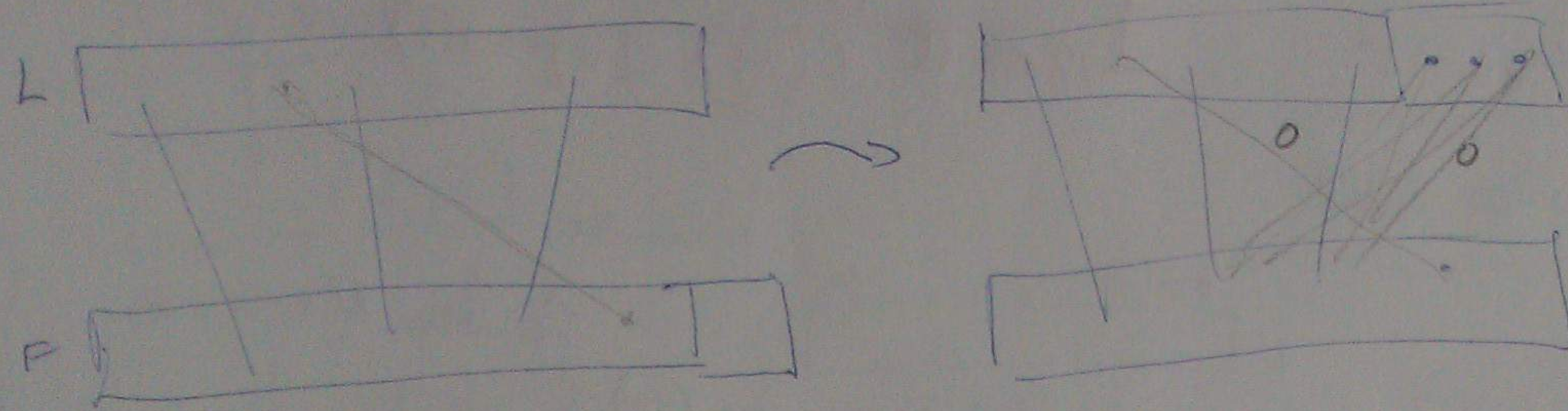

Kettő között különbség:



Max összsúlyú ~~TP~~ párosítást → max összsúlyú TP

visszavezetni — negatív éleket kivenni

nem létező élek 0 súllyal




1) $w(e) \leq 0 \Rightarrow$ e-t elhagy

2) $|F|, |L|$ egyenlő legyen (extra pontok ...)

3) ha $a \in F$, $b \in L$, $\{a,b\} \notin E(G) \Rightarrow \{a,b\} = e'$, $w(e') = 0$

Max. ös. TP-t csináljunk

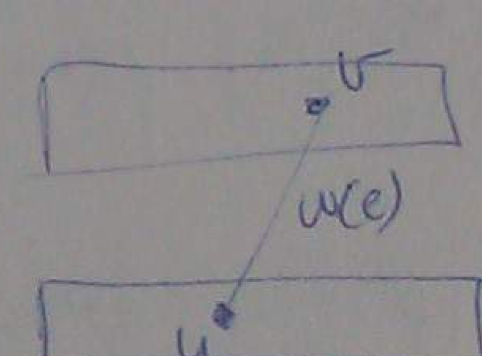
Egerváry Jenő algoritmusa

**Def:** címkézés

$c: (F \cup L) \to \mathbb{R}$

$\forall e = \{u, v\}$ élre

$c(u) + c(v) \geq w(e)$




csúcsok összes $\geq w(e)$

M TP:

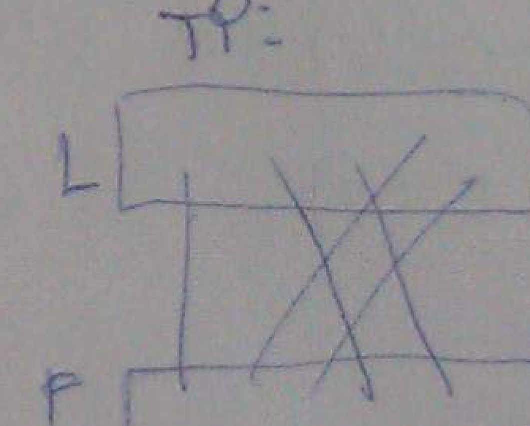
$e_1 = \{u_1, v_1\} \dots e_n = \{u_n, v_n\}$

$$\sum_{e \in M} w(e) = \sum_{i=1}^{n} w(e_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \big(c(u_i) + c(v_i)\big) =$$

$$\overset{*}{=} \sum_{v \in F \cup L} c(v)$$

* ha mindkettő egyenlő akkor optimális

TP:




végpontok címkéje összeadva

Lemma: Tfh adott $M$ TP és $c$ címkézés, úgy, hogy

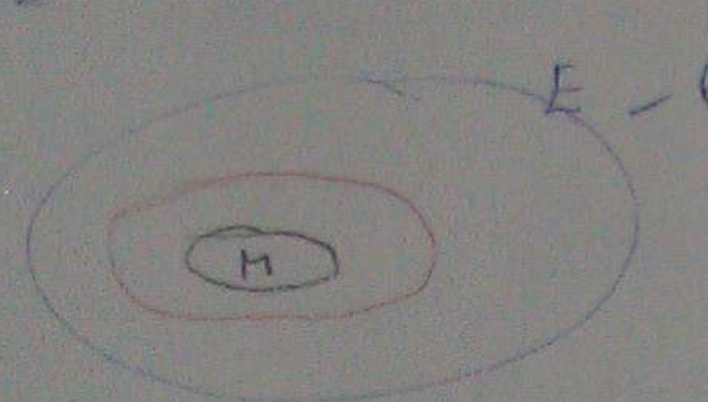
$\forall e = \{u, v\} \in M$, $c(u) + c(v) = w(e) \Rightarrow$

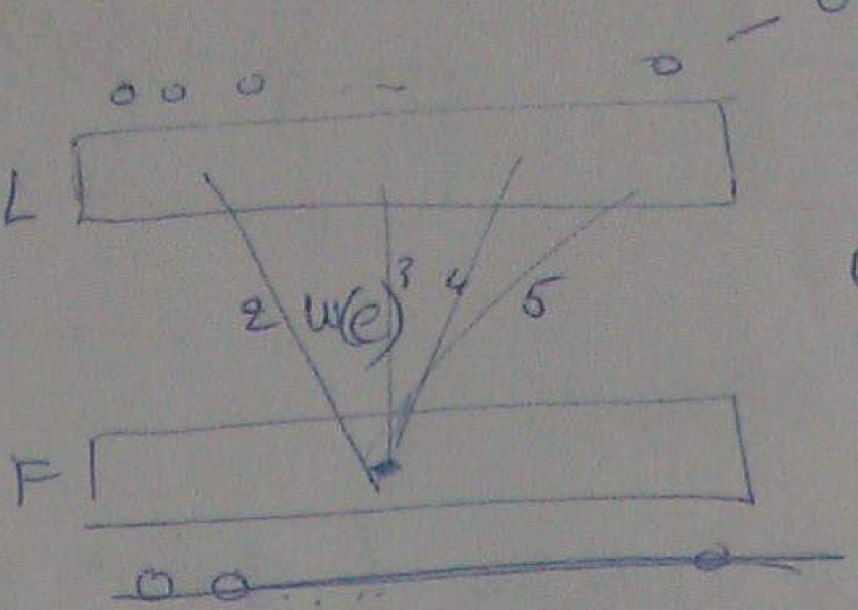
$\Rightarrow M$ max összsúlyú TP

↳ piros él: élre írva $c(u) + c(v) = w(e)$

az algo végén lesz teljes, azért kell

0. lépés: $M = \emptyset$



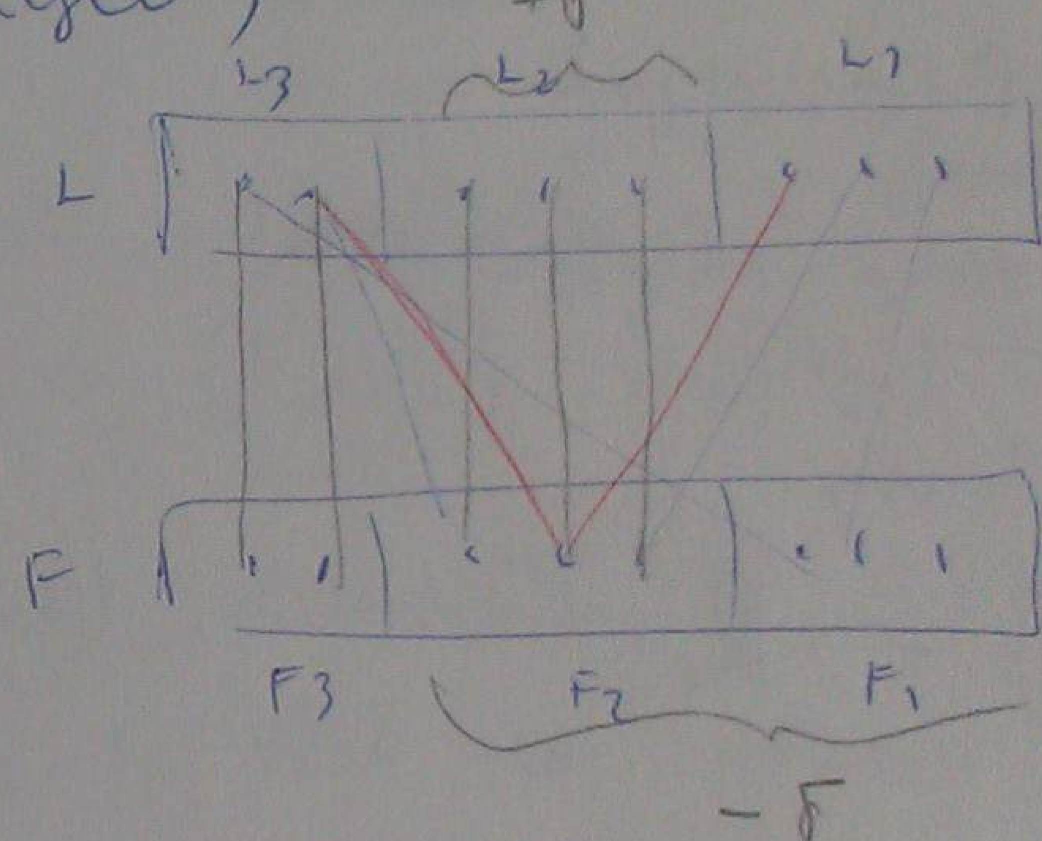

$$c(v) = \begin{cases} 0, & \text{ha } v \in L \\ \max\{w(\{v, x\})\}, & \text{ha } v \in F \\ \{x, v\} \in E(v) & \end{cases}$$

1. lépés: (minden párosításbeli él piros él)

$M$-ből indulva piros élek gráfjában a javító utas algo-val max méretű párosítást keresünk: $M'$

Ha $M'$ TP $\Rightarrow$ stop

2. lépés: (még nem TP) (címkézést javítjuk)




!. $(F_1 \cup F_2)$-ből $(L_1 \cup L_3)$-ba nincs piros él!

! nem piros megy! → van TP G-ben

$$\delta := \min\{c(u) + c(v) - w(e) : e = \{u, v\}, u \in F_1 \cup F_2, v \in L_1 \cup L_3\}$$

(tudjuk: $\delta > 0$) → címke

$$c'(v) = \begin{cases} c(v) + \delta, & \text{ha } v \in L_2 \\ c(v) - \delta, & \text{ha } v \in F_1 \cup F_2 \\ c(v), & \text{egyébként} \end{cases}$$

Folytatás 1. lépéssel ($M'$-vel és $c'$-vel)

**Állítás:** $c'$ címkézés

**biz:** $c(u)+c(v)$ változása

| | $F_1 \cup F_2$ | $F_3$ |
|---|---|---|
| $L_2$ | $0$ $(-\delta+\delta)$ | $+\delta$ |
| $L_1 \cup L_2$ | $-\delta$ | $0$ |

$\downarrow$

$c'(u)+c'(v) \geq w(e)$

(2. lépés elején OK $\delta$ def-je miatt)

M-beli éleknek pirosnak kell maradniuk

**Állítás:** M-beli élek pirosak $c'$-re nézve is

**biz:**

e piros részgráfból kikerül $\Leftrightarrow$ $L_2 - F_3$ típusú (és piros) (ez nem baj)

ezek között nincs $M'$-beli

új piros él létrejön ($c \to c'$): azok, amikkel a $\delta$-t def. min felvételik $\Rightarrow$ van új piros $(F_1 \cup F_2) - (L_1 \cup L_3)$

! $L_2$-beliek továbbra is ($c'$-re nézve) elérhetők $F_1$-ből alternáló úton (p-s-p-s..), mert $L_2 - F_3$ élek nem voltak benne alternáló útban

ha az új piros él(ek) egyike $L_1$-ben ér véget $\Rightarrow$ köv ciklusban M nő

ha nem $\Rightarrow$ $L_3$-ban ér véget $\Rightarrow$ köv ciklusban $|L_3|$ csökken

$|F| = |L| = n$ $\Rightarrow$ $\leq n$ ciklusonként M nő $\Rightarrow$ $\leq n^2$ ciklus után leáll $\Rightarrow$ OK

$\Downarrow$

$O(n^2 e)$

# ROP1

(a)

erdeti címkézés

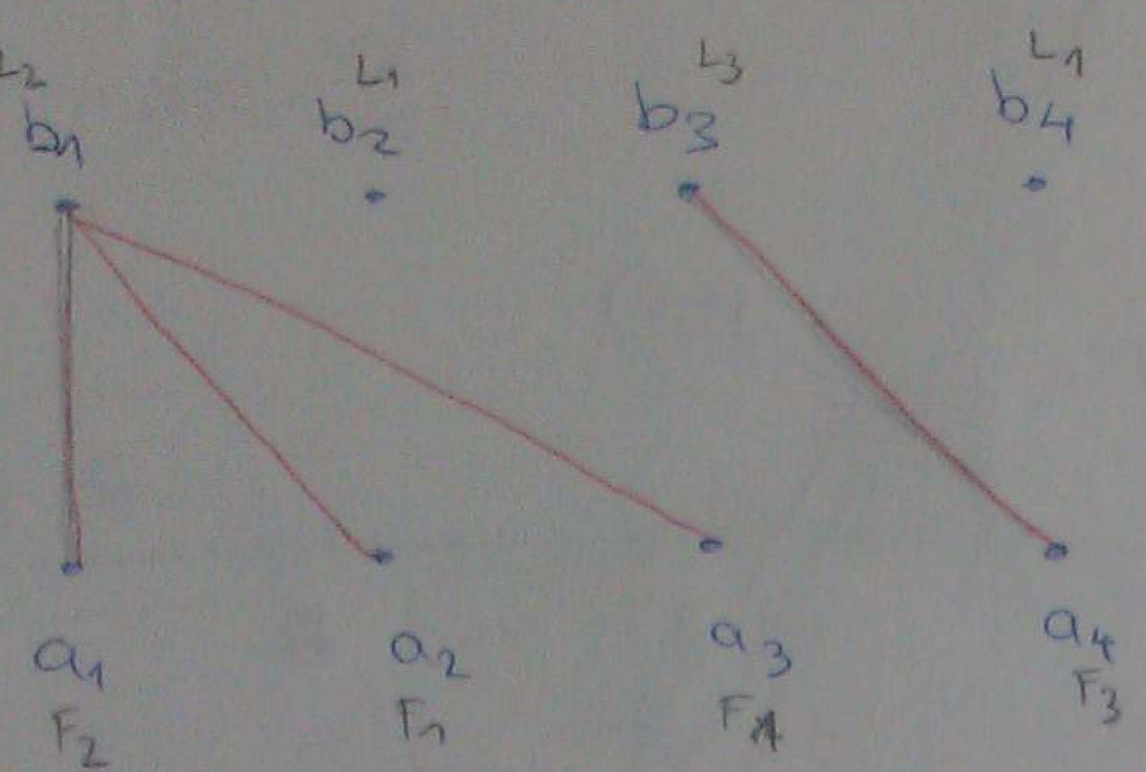
| | $b_1$ | $b_2$ | $b_3$ | $b_4$ | ↓ |
|---|---|---|---|---|---|
| $a_1$ | 8 | $\boxed{3}$ | 5 | 4 | 8 |
| $a_2$ | 7 | 1 | $\boxed{6}$ | 2 | 7 |
| $a_3$ | $\boxed{9}$ | 3 | 4 | 1 | 9 |
| $a_4$ | 4 | 2 | 7 | $\boxed{5}$ | 7 |
| címke → | 0 | 0 | 0 | 0 | |

max 23 összegű TP

Egerváry-algo

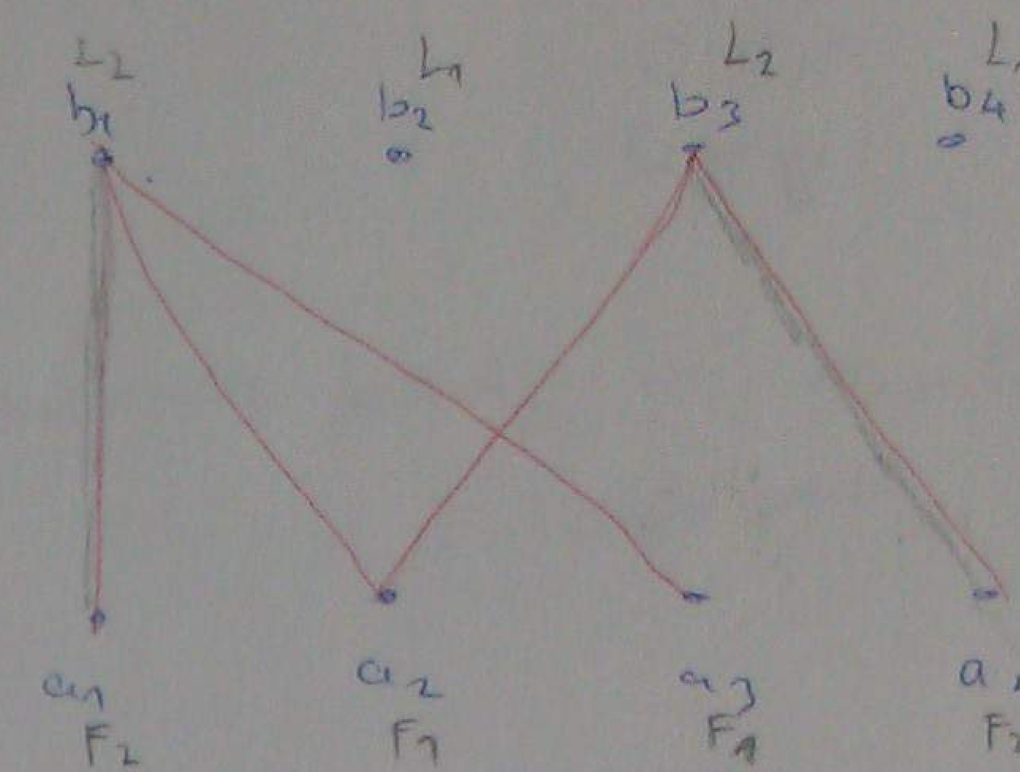
| | $b_1$ | $b_2$ | $b_3$ | $b_4$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_1$ | 8 | 3 | 5 | 4 | 8 | 7 | 5 | 4 | 3 |
| $a_2$ | 7 | 1 | 6 | 2 | 7 | 6 | 4 | 4 | 3 |
| $a_3$ | 9 | 3 | 4 | 1 | 9 | 8 | 6 | 5 | 4 |
| $a_4$ | 4 | 2 | 7 | 5 | 7 | 7 | 5 | 5 | 4 |
| | 0 | 0 | 0 | 0 | | | | | |
| | 1 | 0 | 0 | 0 | | | | | |
| | 3 | 0 | 2 | 0 | | | | | |
| | 4 | 0 | 2 | 0 | | | | | |
| | 5 | 0 | 3 | 1 | | | | | |

23




$a_1 a_2 a_3$
|
$b_2 b_3 b_4$
$\delta = 1$

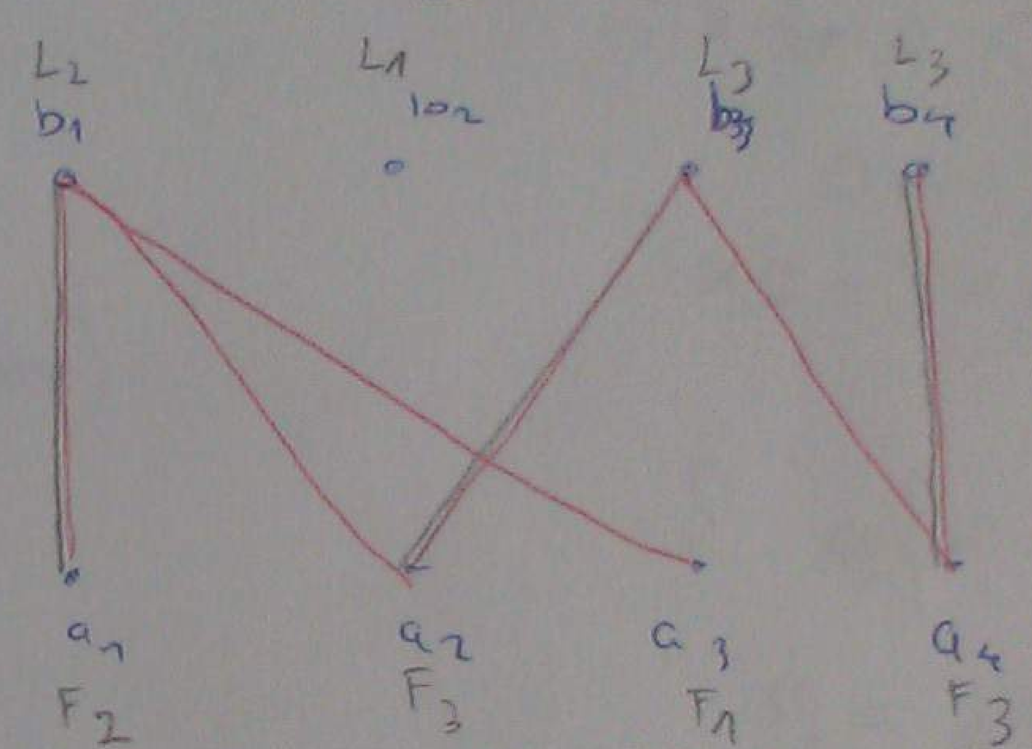
2. cikl.

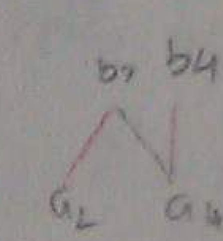



$\delta = 2$

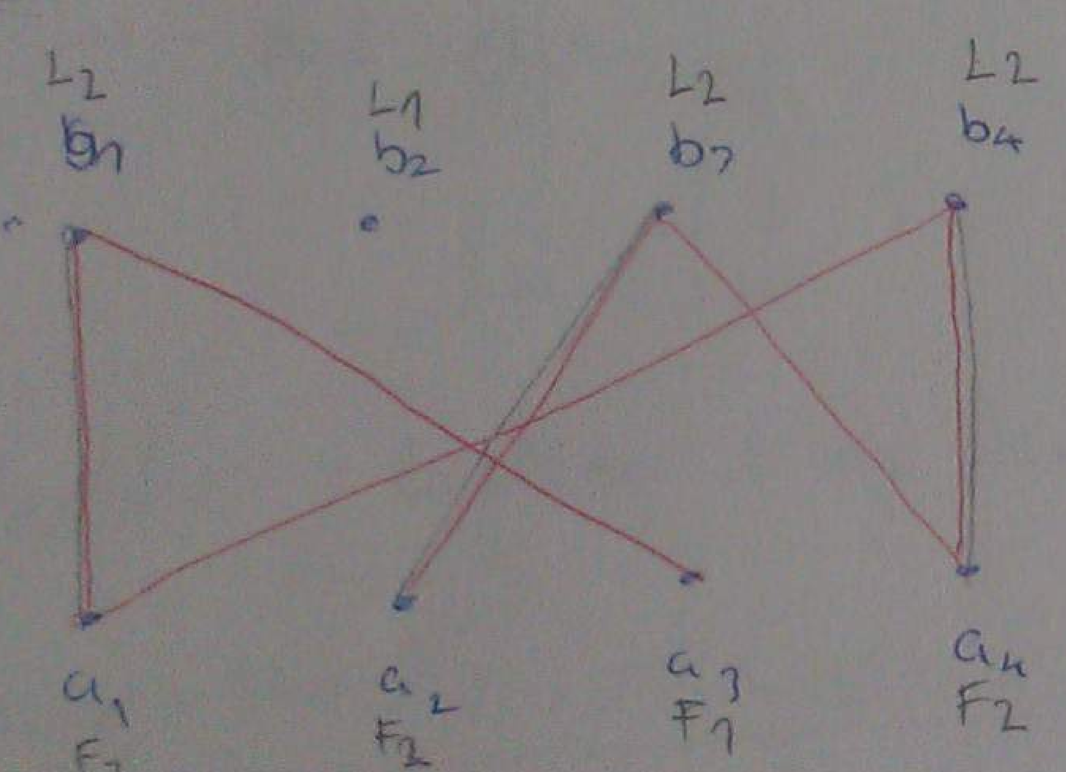
$a_1 a_2 a_3 a_4$
↓
$b_2 b_4$

3. cikl.

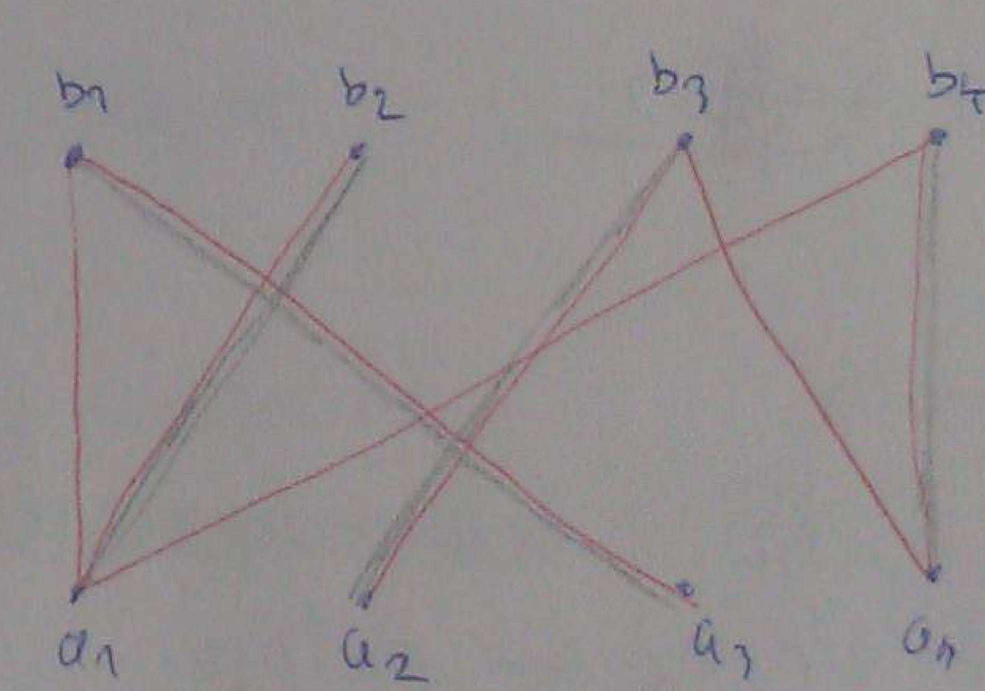


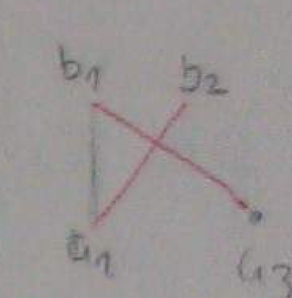




$a_1 a_3 \to b_2 b_3 b_4$
$\delta = 1$




$\delta = 1$
$a_1 a_2 a_3 a_4 \to b_2$



# Lineáris programozás: példa

Drakula művek

| | $x$ | $y$ | |
|---|---|---|---|
| | 1. szörny | 2. szörny | raktár |
| | 4 fej | 1 fej | 16 fej |
| | 2 láb | 3 láb | 18 láb |
| | \$10 | \$5 | |

Hány 1., és 2.-szörny profit max.

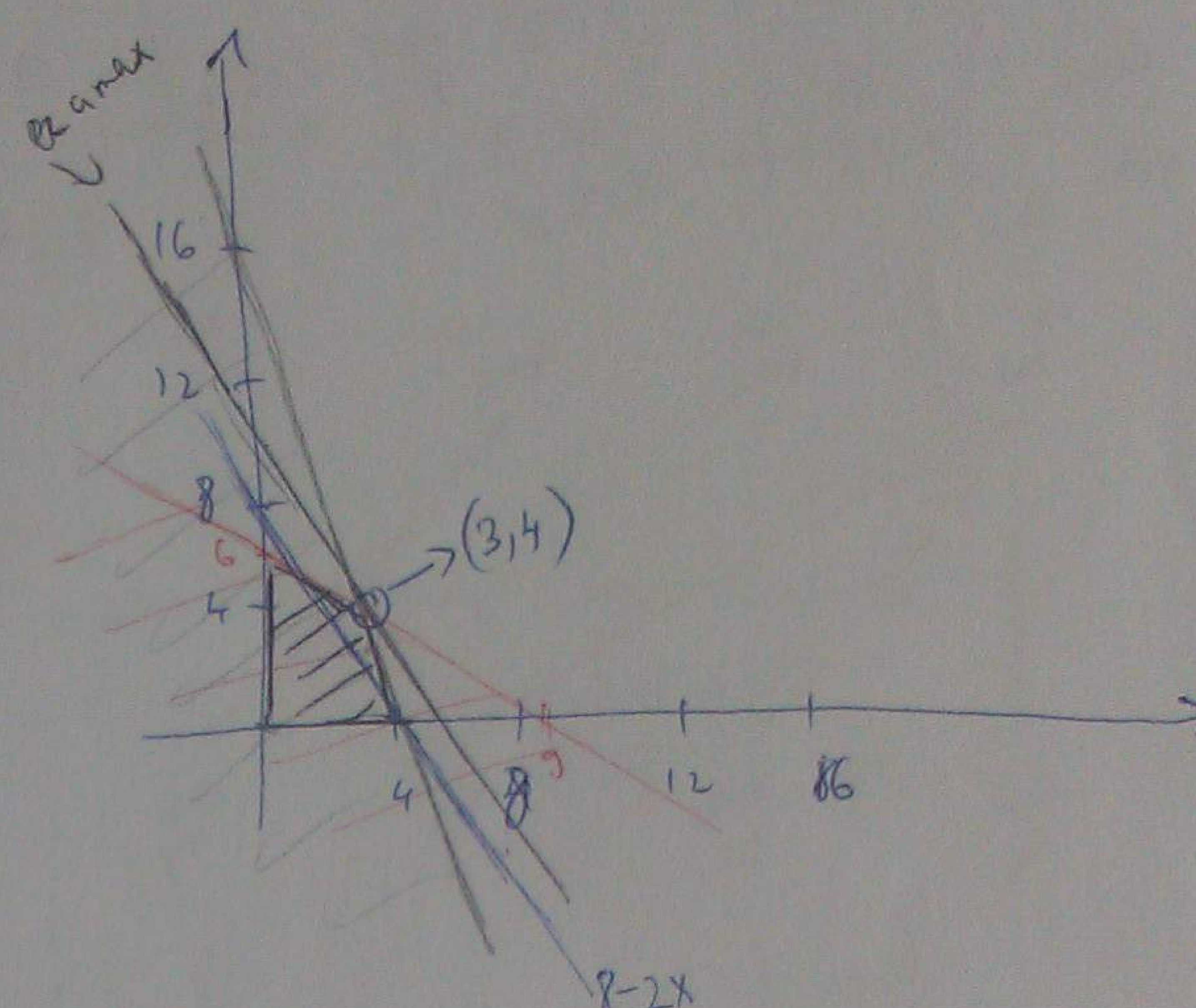
max: $10x+5y$

fej $4x + y \leq 16 \rightarrow y \leq 16-4x$

láb $2x+3y \leq 18 \rightarrow y \leq 6-\frac{2}{3}x$

$x \geq 0$

$y \geq 0$




profit \$40 lehet-e?

$10x+5y=40$

$y=8-2x$

$$\left.\begin{array}{l}4x+y=16\\2x+3y=18\end{array}\right\}\begin{array}{l}x=3\\y=4\end{array}$$

3db 1.es szörny

4db 2.es -||-

profit = \$p ?

$10x+5y=p$

$y=\frac{p}{5}-2x$ meredekség marad

$p=10\cdot3+5\cdot4=\underline{\$50}$

---

## Lineáris programozás

$x_1, x_2 \dots x_n$ változók

lineáris egyenlőtlenségek – megoldások találása, lehető legnagyobb értékkel

$\max: c_1x_1+c_2x_2+\dots+c_nx_n \leftarrow$ célfgv.

$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n \leq b_1$

$\vdots$

$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n \leq b_m$

Célfgv-et maximalizálni

$a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n \ge b_i \rightsquigarrow -a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \dots \le -b_i$

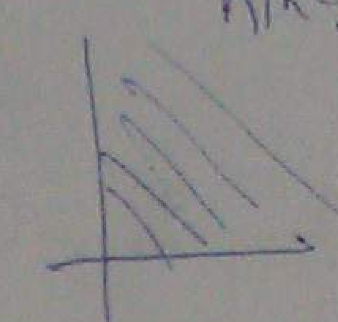
$$a_{i1}x_1 + \dots = b_i \quad \begin{matrix} \overset{\le}{\Rightarrow} a_{i1}x_1 + \dots \le b_i \\ \overset{\ge}{\Rightarrow} -a_{i1}x_1 - \dots \le -b_i \end{matrix} \Bigg\}$$

szigorú egyenlőtlenség tilos

milyen kérdésekkel foglalkozni ilyenkor:

1) egyenlőtlenség rendszer megoldható-e?

2) ha igen, célfüggvény felülről korlátos-e a megoldáshalmazon $\Rightarrow$ max: $x_1 + x_2$, $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$

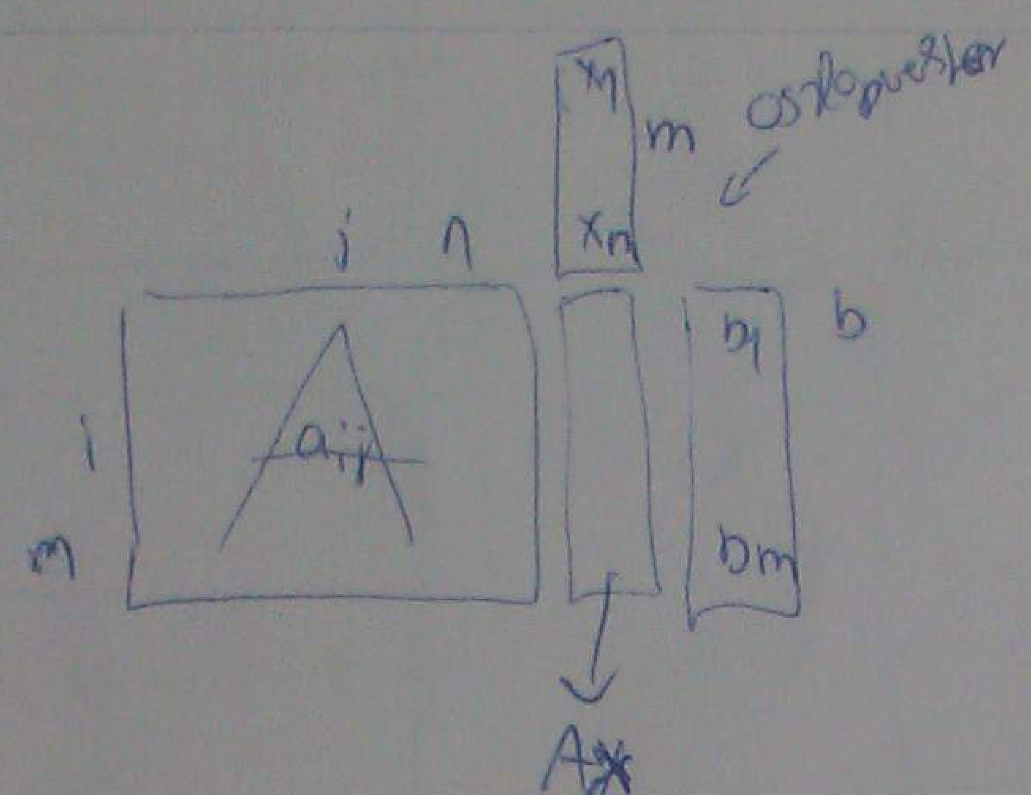


nincs értelme

3) max = ?

---

$\boxed{Ax \le b}$




mátrixos formája az egyenlőtlenség-rendszernek

Def $u, v \in \mathbb{R}^n$ (n magasságú oszlopvektor)

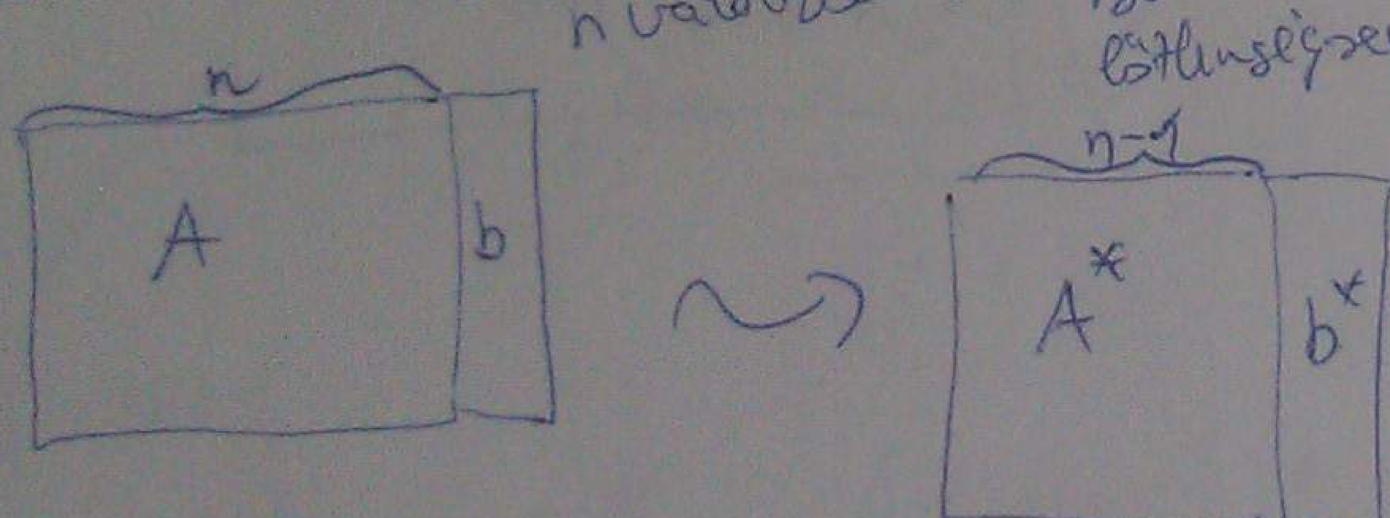
$u \le v$

$\forall i \quad u_i \le v_i$

$u \not\le v$ = legalább 1 tag van ami nem nagyobb

Fourier-Motzkin elimináció:

n változós lin. egyenlőtlenségrendszert visszavezetni n-1 változósra, változókat kidobálni, de megoldhatóság ne változzon




m.oható $\Leftrightarrow$ m.oható

konkrét példa:

1. $x+y+z \le 1$
2. $2x-y+z \ge 1$
3. $x+4y-z \ge 2$

$x, \boxed{y, z \ge 0}$ ← ezekben nincs x

1. ~~$x \le 1-y-z$~~

x-re rendezem:

$$\frac{1+y-z}{2},\ 2-4y+z,\ 0 \le x \le 1-y-z$$

$y=0$

$z=0$

általag behelyettesítni tartozik-e hozzá megfelelő x

$$\frac{1}{2},\ 2,\ 0 \le x \le 1 \quad ↯$$

y, z-t találni

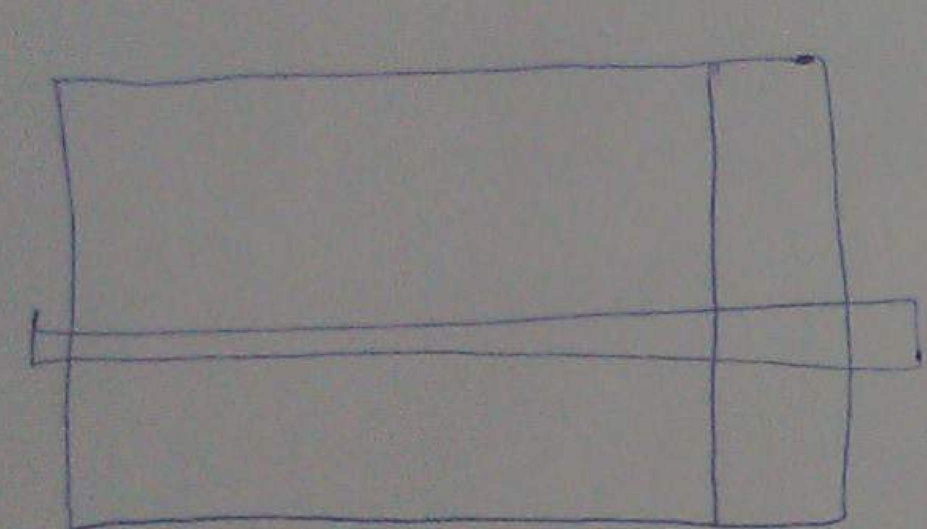
3 változósból 2 változósra visszavezettük

$y \ge 0,\ z \ge 0$

$1-y-z \ge 0$

$1-y-z \ge 2-4y+z$

$1-y-z \ge \frac{1+y-z}{2}$



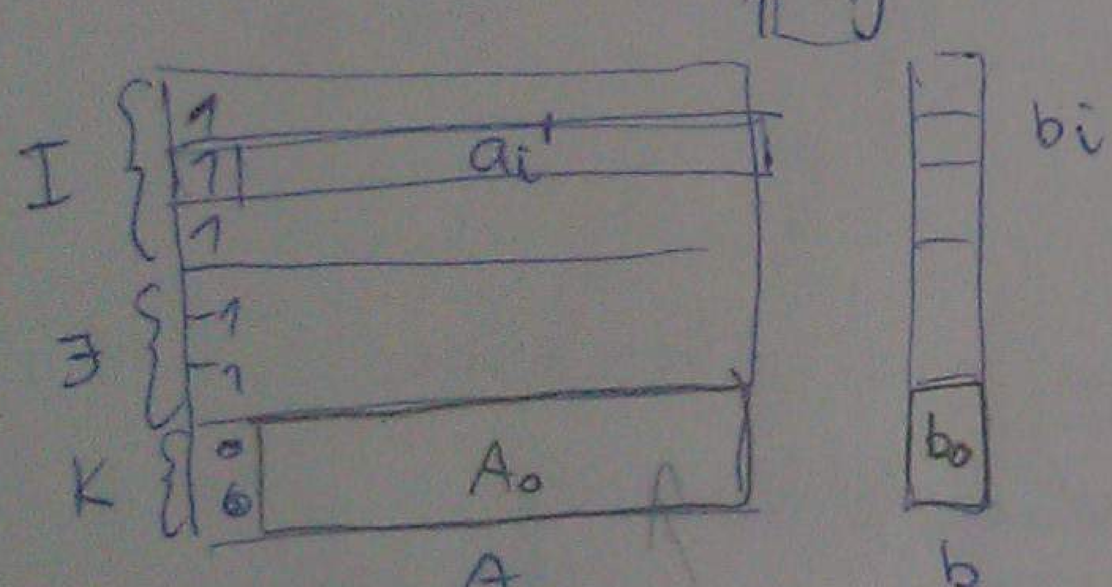
$\bullet\ x>0$

↑ szorzás poz. számmal egy sort lehet

kivonni/ sorokat összeadni nem lehet egyenlőtlenségrendszerben

⇓

első oszlop: 1, 1, ... 1, −1 ... 0, 0, 0 (x, x′)



$a_i'$ : i. sor

x-t nem tartalmazza

$Ax \le b$ mo.ható ⇒ ⇐ $A_0 x' \le b_0$ mo.ható

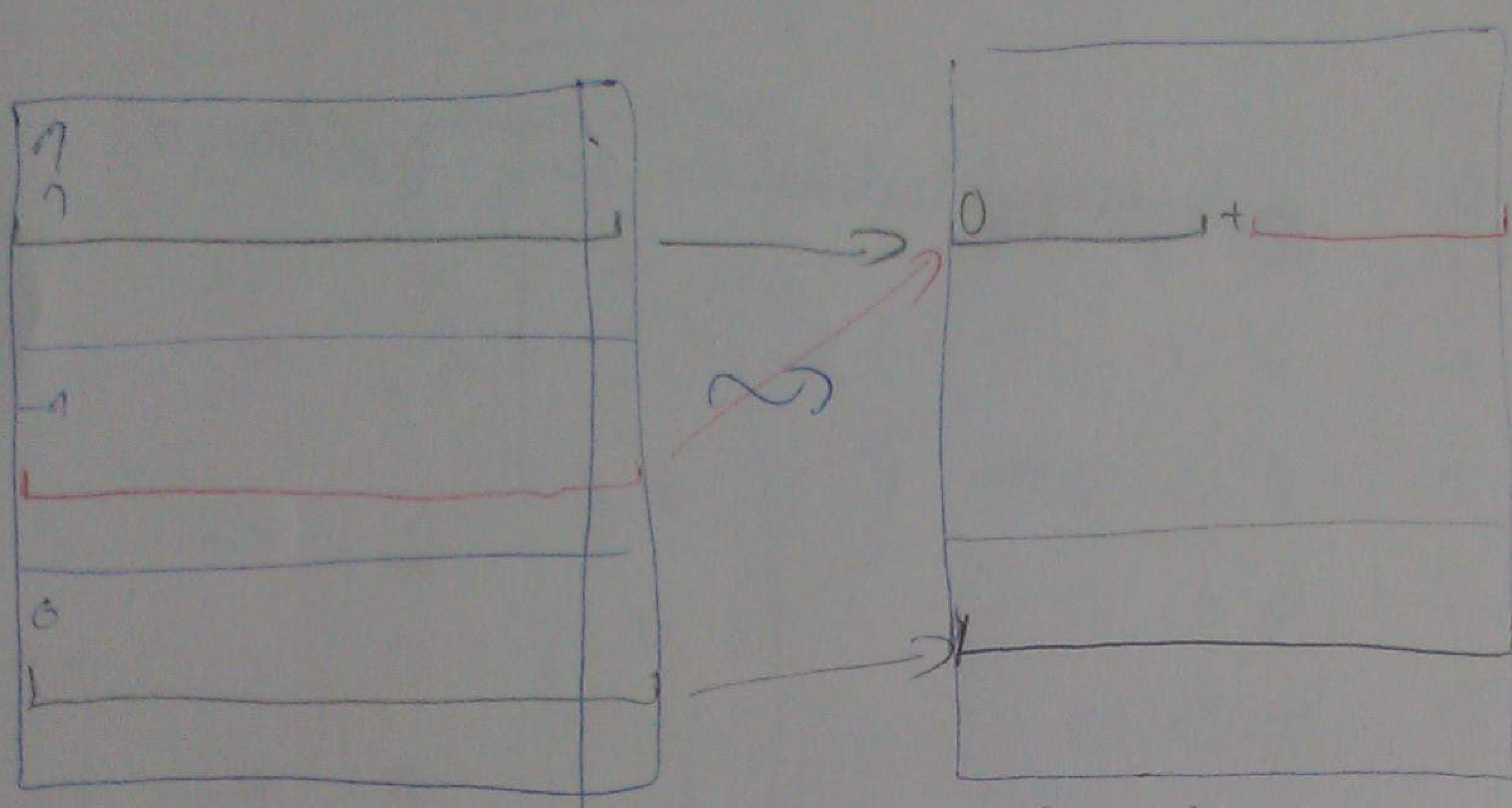
extra feltételek: $(A_0 b_0)$ olyan megoldásait kapjuk ami x-val kiegészíthető

**I. eset** $I \neq \emptyset,\ J \neq \emptyset$

$$\left.\begin{array}{lll} \forall i \in I & \lambda + a_i' x' \le b_i & \rightsquigarrow \lambda \le b_i - a_i' x' \\ \forall j \in J & -\lambda + a_j' x' \le b_j & \rightsquigarrow \lambda \ge a_j' x' - b_j \end{array}\right\} \forall i \in I, j \in J \quad \cancel{b_i - a_i' x'}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} a_j' x' - b_j \le b_i - a_i' x' \\ (a_i' + a_j') x' \le b_i + b_j \\ \forall i \in I, j \in J \end{array}}$$

$(A^*|b^*)$ megoldható



$(A|b)$ $(A^*|b^*)$

**II. eset** $J = \emptyset,\ I \neq \emptyset$

$\forall i \in I:\ \lambda + a_i' x' \le b_i \rightsquigarrow \lambda \le b_i - a_i' \cdot x'$ a felső becslések

ilyen $\lambda$ $\forall x'$-höz választható

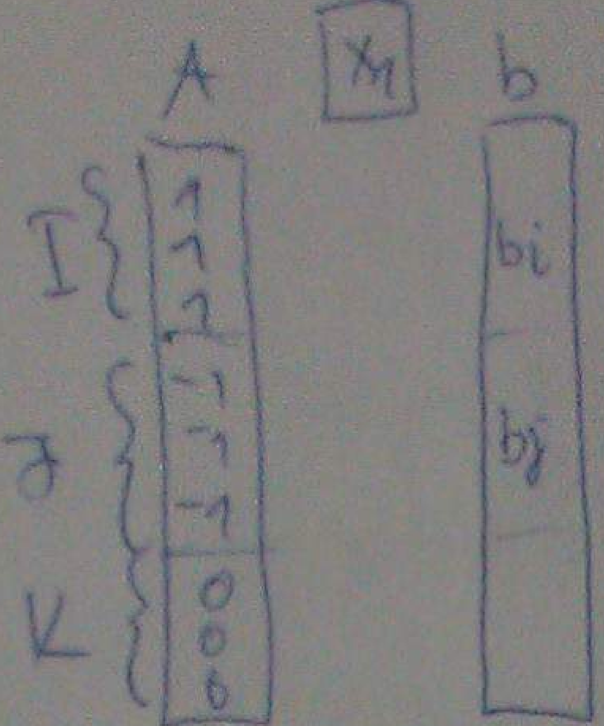
$\boxed{A_0 \mid b_0} \to x'$

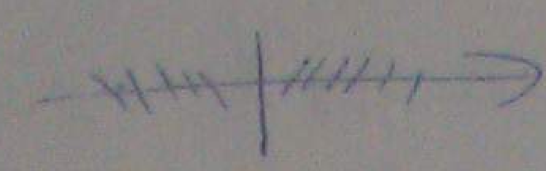
(elfelejtjük az 1-es sorokat)

$(A^*|b^*) = \boxed{A_0 \mid b_0}$

**III. eset**

$J \neq \emptyset,\ I = \emptyset$ (elfelejtjük a $-1$-es sorokat) egyváltozós lin. egyenlőtlenség rendszer



1 változós rendszer nem mo. ható:

1) $\exists k \in K$, $b_k < 0$ $\quad (0 \mid \underbrace{b_k}_{<0})$

VAGY

2) $\exists i \in I, j \in J \quad -b_j > b_i$

! nem polinomiális algo.! gyakorlati feladatokra nem igazán jó

$x + y + z \le 1$

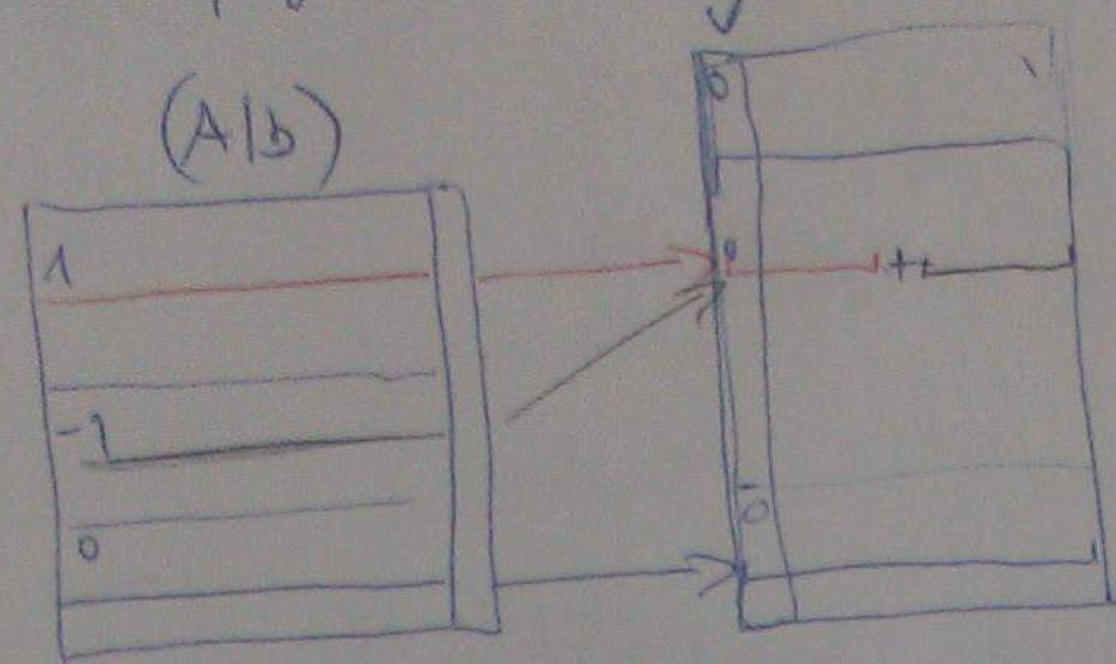
$2x - y + z \ge 1$

$x + 4y - z \ge 2$

$x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0$ csupa 0 → elhagyhatjuk

jóval magasabb

(A|b)



egyenletek mátrixos alakban

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -4 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

felső becslés

alsó becslés

$0,\ \frac{1}{3} \le y \le \frac{1}{3},\ 1$

$y = \frac{1}{3}$

$0,\ \frac{2}{3} \le x \le \frac{2}{3},\ x = \frac{2}{3}$

$$\begin{array}{c} 1+3 \\ 1+4 \\ 2+3 \\ 2+4 \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} /\cdot 3 \\ \sim /\cdot\frac{3}{5} \end{array} \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & \frac{2}{5} \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{array}\right)$$

felső becslés

alsó becslés

$0 \le z \le 0,\ 1,\ 2/5,\ 1$

$z = 0$ miért a z? ok!

egyetlen megoldása van

$x + 2y \le 2 \quad / \cdot 3$

$-x + 2y \le 1 \quad / \cdot 1$

$-x - 4y \le -5 \quad / \cdot 2$

nem megoldható egyenlőtlenségrendszer

módszer, hogy nem megoldható:

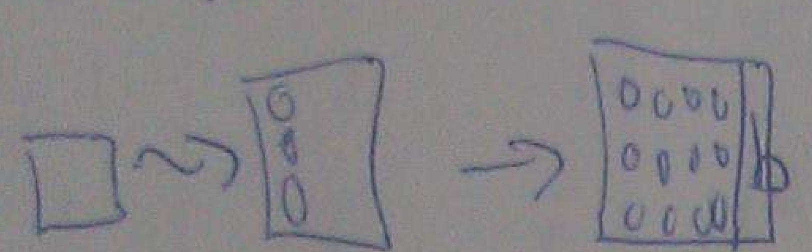
---

$$
\begin{aligned}
3x + 6y &\le 6 \\
-x + 2y &\le 1 \\
+ \quad -2x - 8y &\le -10 \\
\hline
0x + 0y &\le -3
\end{aligned}
$$

↯ ezért az eredeti sem megoldható

Fourier-Motzkin elimináció segít, 0-kat is viszzük, nem töröljük

oszlopszám nem változik



<u>Tétel:</u> „Farkas-lemma"

Az alábbi két rendszer közül pontosan egy megoldható

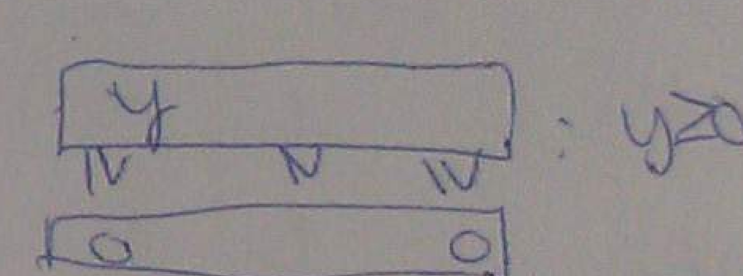
(1) $Ax \le b$

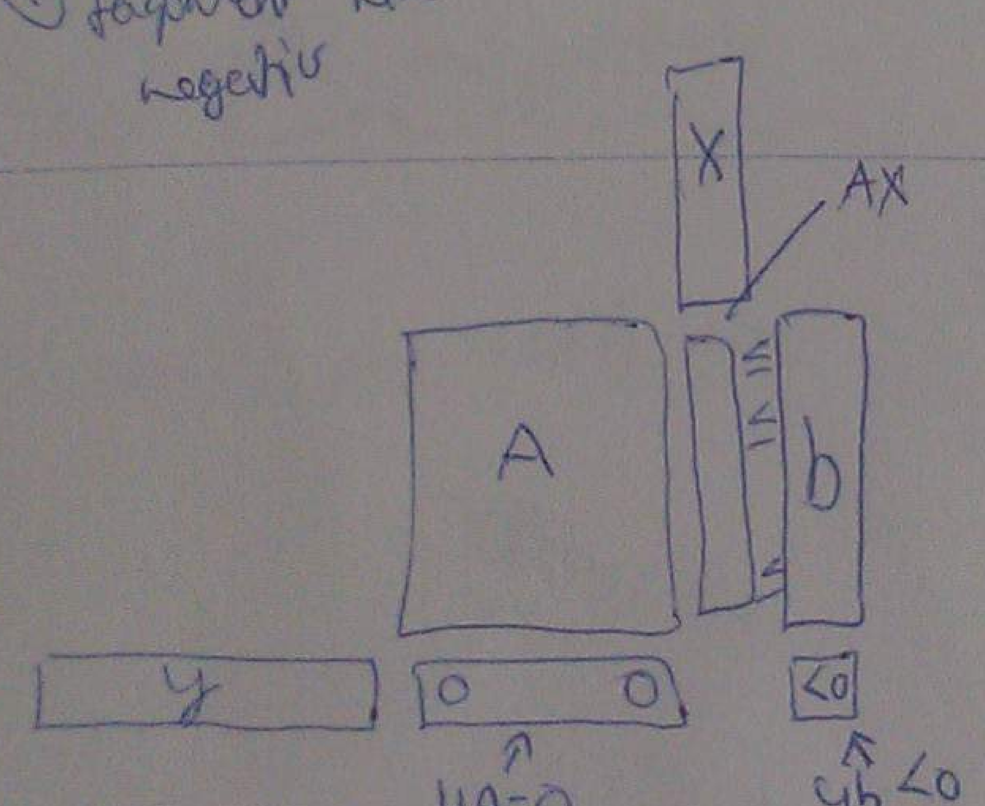
(Adott: $A, b$)

(2) $yA = 0$, $y \ge 0$, $yb < 0$

sorvektor

tagonként nem negatív







$Ax \le b$ tagonként

---

$$
\begin{array}{cccc}
 & A & b \\
 & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \\
y = & \underbrace{(3 \;\; 1 \;\; 2)}_{y \ge 0} & \underbrace{(0 \quad 0)}_{yA} & \underbrace{(-3)}_{yb}
\end{array}
$$

Biz: 2 dolog: nem lehet mind 2 megoldható

1) Legfeljebb 1 megoldható

Tfh.: $x, y$ egy-egy megoldás

$$0 = 0 \cdot x = (yA)x = y(Ax) \le yb < 0$$

asszociativitás

két vektor skaláris szorzata

$yA = 0$

$0 < 0$ ↯

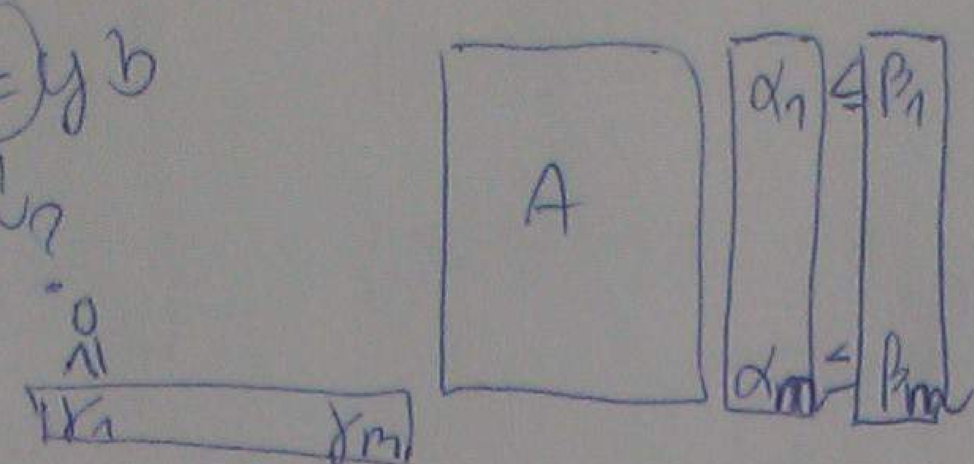
$y$ sorvektor

$b$ oszlopvek

$y(Ax) \le y b$

?

$\overset{?}{\geq} 0$




$$\gamma_1\alpha_1 \le \gamma_1\beta_1$$
$$\gamma_2\alpha_2 \le \gamma_2\beta_2$$
$$\vdots$$
$$\oplus \quad \gamma_m\alpha_m \le \gamma_m\beta_m$$

skaláris szorzat definíciója

$$\gamma_1\alpha_2 + \ldots + \gamma_m\alpha_m \le \gamma_1\beta_1 + \ldots + \gamma_m\beta_m$$

2) Legalább az egyik megoldható

azaz

ha (1)-es nem m.o.ható $\Rightarrow$ (2)-es igen

$$(\quad y \quad)\begin{pmatrix} A & | & b \end{pmatrix} \quad (0\,0\,0 \mid <0)$$

azaz $\exists y$: $\quad y \cdot (A|b) = (0\,0 \ldots 0 \mid <0)$

$y \ge 0$

halmaz

$C = \{ z \in \mathbb{R}^{n+1} : z = y \cdot (A|b),\ y \ge 0 \}$ cél: $(0 0 \dots 0 | <0) \in C$

sorvektorok halmaza

van ilyen sorvektor

<u>Lemma:</u> (C tulajdonságai)

$z_1, z_2 \in C$, $\lambda > 0$

(1) $z_1 + z_2 \in C$

(2) $\lambda z_1 \in C$

<u>biz:</u> (1) $z_1 = y_1(A|b)$ $y_1 \ge 0$ mátrixszorzás disztributív

$z_2 = y_2(A|b)$ $y_2 \ge 0$

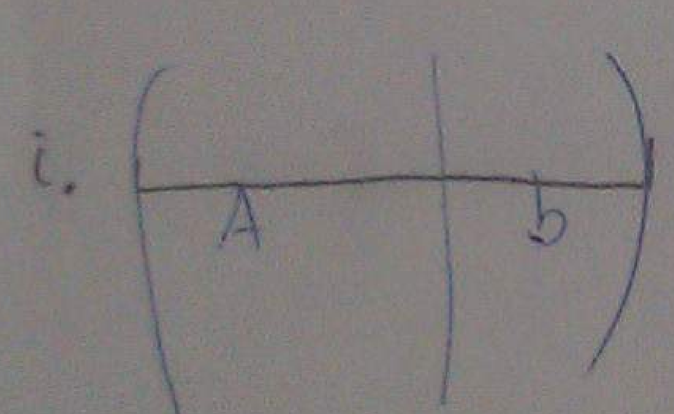
$C \ni z_1 + z_2 = \underbrace{(y_1 + y_2)}_{\ge 0}(A|b)$ $y_1 + y_2 \ge 0$

(2) $z_1 = y_1(A|b)$ $y_1 \ge 0$

$C \ni \lambda z_1 = \underbrace{\lambda y_1}_{\ge 0}(A|b)$ $\lambda y_1 \ge 0$

<u>Lemma:</u> $(A|b)$ sorai $\in C$

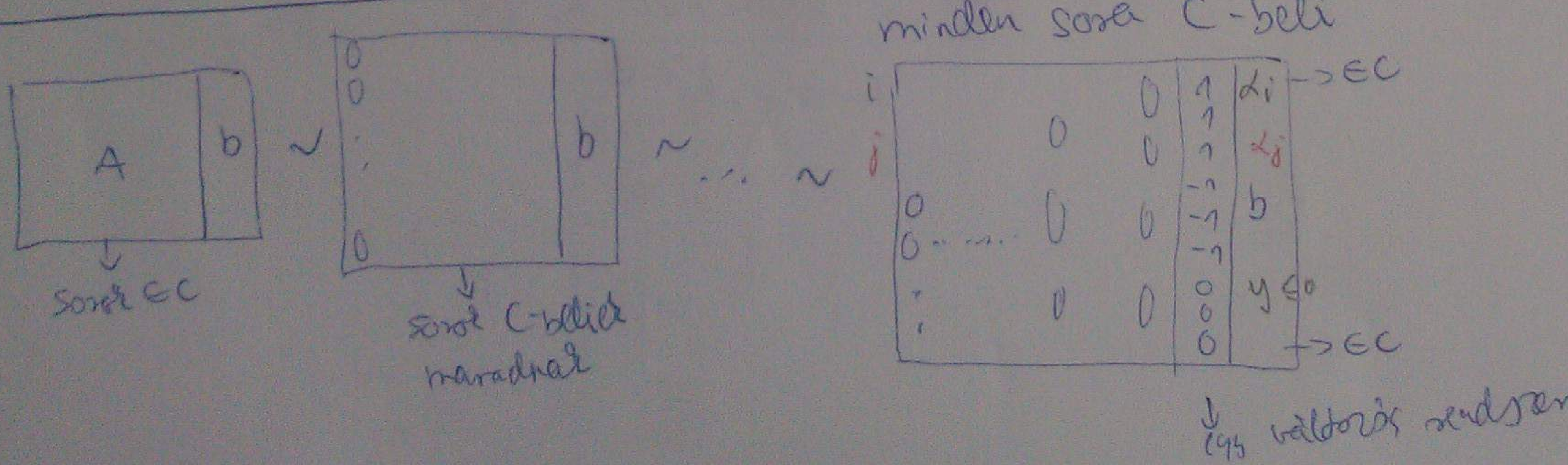
<u>biz:</u>




$y = (0 \dots 0\, \overset{i}{1}\, 0 \dots 0)$ $(\underbrace{\quad\quad}_{i.\text{ sor}}) \in C$

<u>F-M: $(A|b)$-ra:</u>

elimináció során kapott mátrixok minden sora C-beli



egy változós rendszer nem megoldható

1. eset: "$0 x_n \le$ neg" $\Rightarrow (0 0 \ldots 0 \mid <0) \in C$

2. eset: $\left.\begin{array}{l} 1 x_n \le \alpha_i \\ -1 x_n \le +\alpha_j \end{array}\right\} \alpha_i < -\alpha_j$

$\left.\begin{array}{l} i\ (0 \ldots 0 1 \mid \alpha_i) \in C \\ j\ (0 \ldots 0 -1 \mid \alpha_j) \in C \end{array}\right\} \oplus \quad (0 \ldots 0 0 \mid \underbrace{\alpha_i + \alpha_j}_{<0}) \in C$

---

$\left.\begin{array}{l} x + 2y \le 2 \\ -x + 2y \le 1 \\ -x - 4y \le -5 \end{array}\right\}$ F-M $\begin{array}{c} (100) \\ (010) \\ (001) \end{array} \underbrace{\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & -4 & -5 \end{array}\right)}_{(A \mid b)} \sim \begin{array}{c} (110) \\ 1+2 \\ 1+3 \\ (101) \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 4 & 3 \\ 0 & -2 & -3 \end{array}\right) \sim$

$\begin{array}{c} (\frac{1}{4}\ \frac{1}{4}\ 0) \\ \sim \\ (\frac{1}{2}\ 0\ \frac{1}{2}) \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & \frac{3}{4} \\ 0 & -1 & -\frac{3}{2} \end{array}\right) \oplus$

$\oplus$ $y = (\frac{3}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{2})\ (0 \quad 0 \mid -\frac{3}{4})$

$\cancel{y \le \frac{3}{4} \le \frac{3}{4}}$

$\frac{3}{2} \le y \le \frac{3}{4}$

$C = \{ z : z = y(A \mid b),\ y \ge 0 \}$

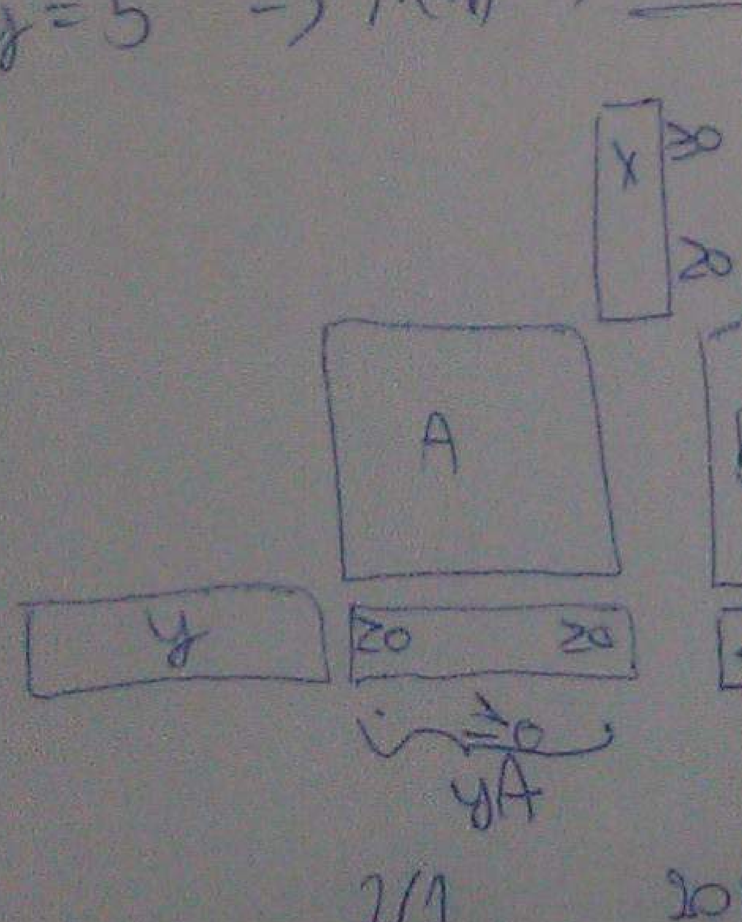
---

(1) $Ax = b, \quad x \ge 0$ (tagonként nem negatív számokból álló oszlopvektor

$x + 2y = 2 \to \cdot 2 \Rightarrow 2x + 4y = 4$

$x + 3y = 5 \to \cdot(-1) \to -x - 3y = -5 \quad \oplus$

$x + y \ge -1$



(2) $yA \geq 0$ , $yb < 0$

Tétel: (Farkas-lemma II. alak)

(1) és (2) közül pontosan 1 m.o. ható $(\forall A, b\text{-re})$

(1) $Ax = b$, $x \geq 0$

(2) $yA \geq 0$ , $yb < 0$

Biz: egyszerre nem m.o. ható

Indirekt

Tfh. x, y egy-egy megoldás

$$0 \leq (yA)x = y(Ax) = yb < 0 \quad \text{↯}$$

sorvektor

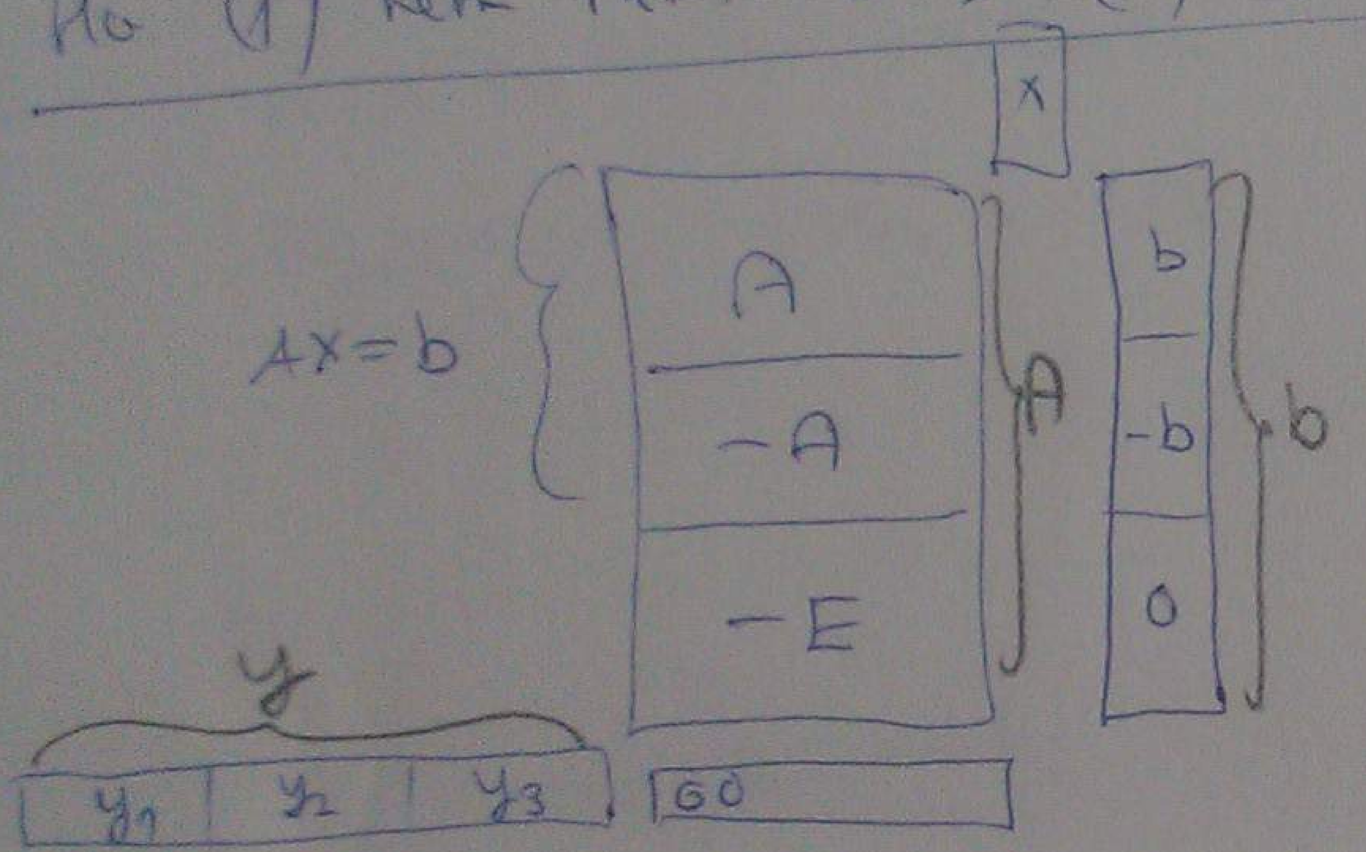
oszlopvektor

zárójelezni

$\boxed{\begin{array}{l} (1)\ Ax \leq b \\ (2)\ yA = 0 \\ \quad\ y \geq 0,\ yb < 0 \end{array}}$

Ha (1) nem m.o. ható $\Rightarrow$ (2) igen.

$(\cancel{\text{egyes}}\ Ax = b \Rightarrow \begin{array}{l} Ax \leq b \\ -Ax \geq -b \end{array})$




Farkas I.

$$\Rightarrow \exists\, \underset{0}{\overset{}{y_1}},\ \underset{0}{y_2},\ \underset{0}{y_3} \geq 0$$

$$y_1A + y_2(-A) + y_3(-E) = 0$$

$$\hookrightarrow \underbrace{(y_1 - y_2)A = y_3}$$

$$y_1b + y_2(-b) < 0$$

$$\hookrightarrow \underbrace{(y_1 - y_2)b < 0}$$

$$y := y_1 - y_2$$

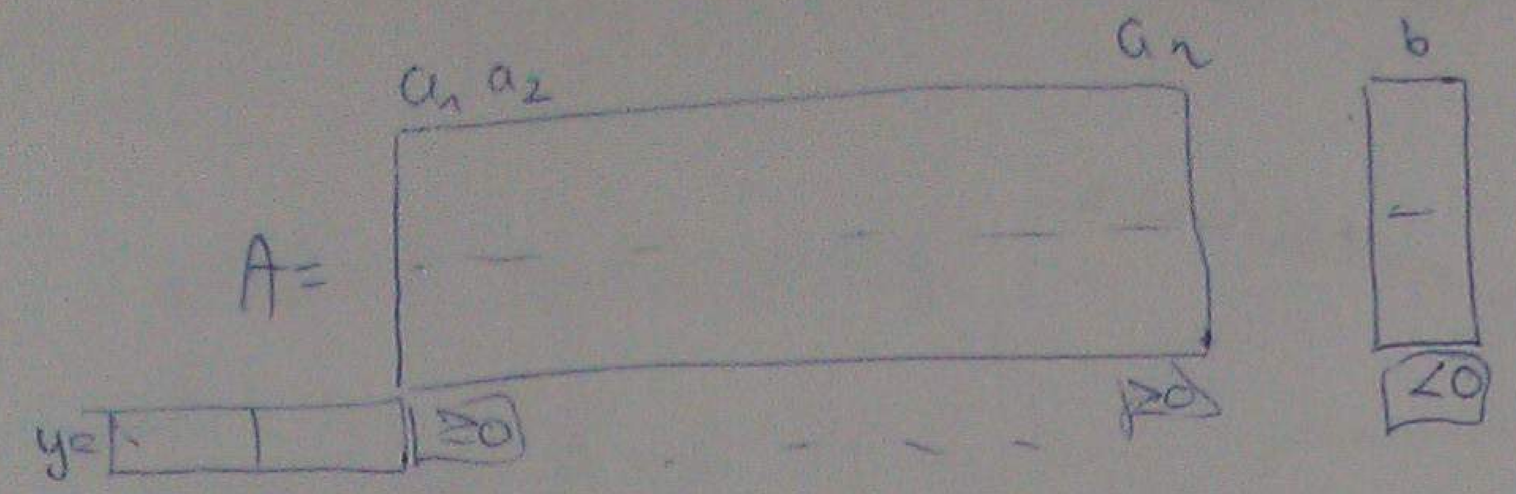
$$yA = y_3 \geq 0$$

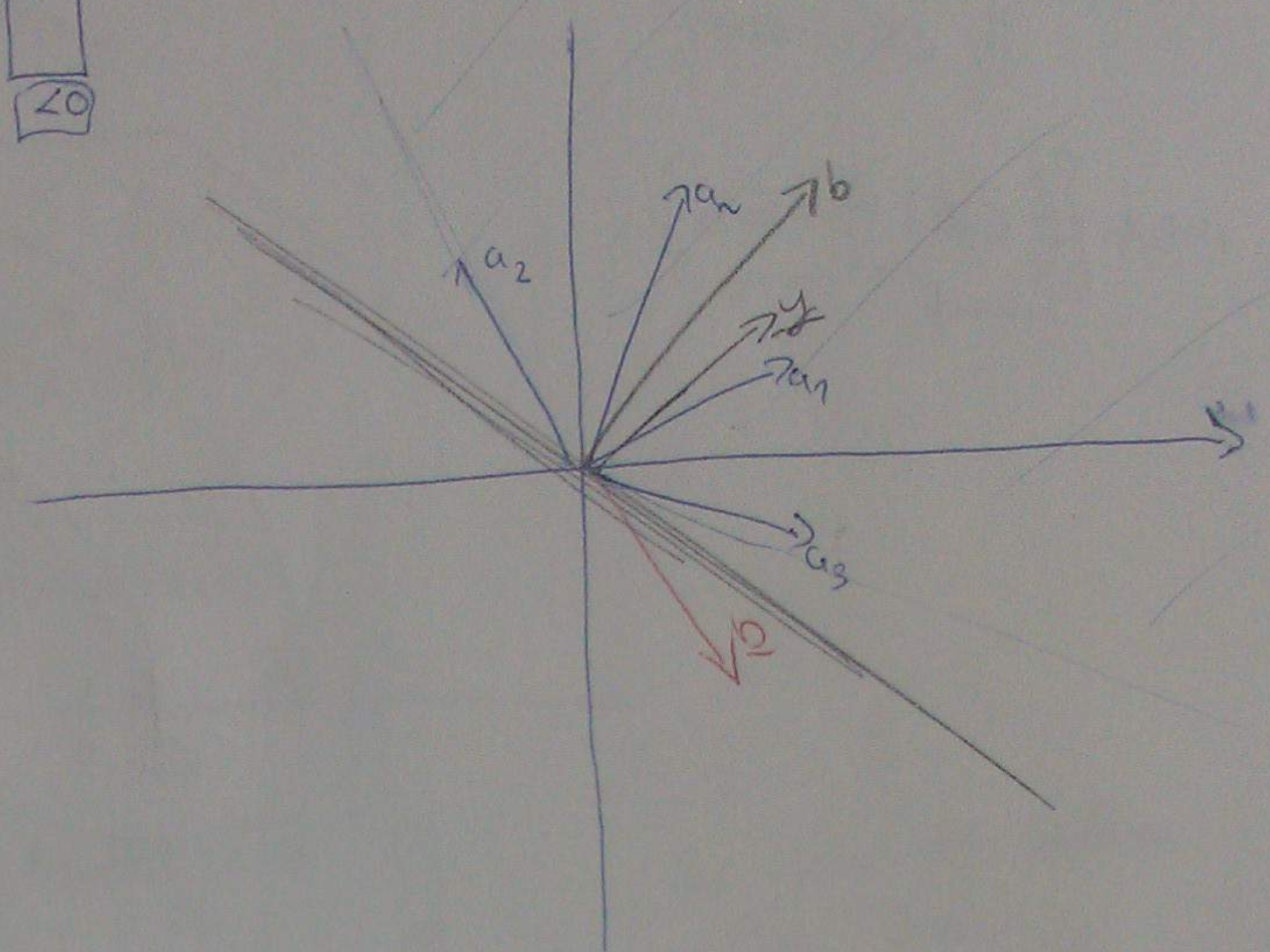
$$yb < 0$$

✓

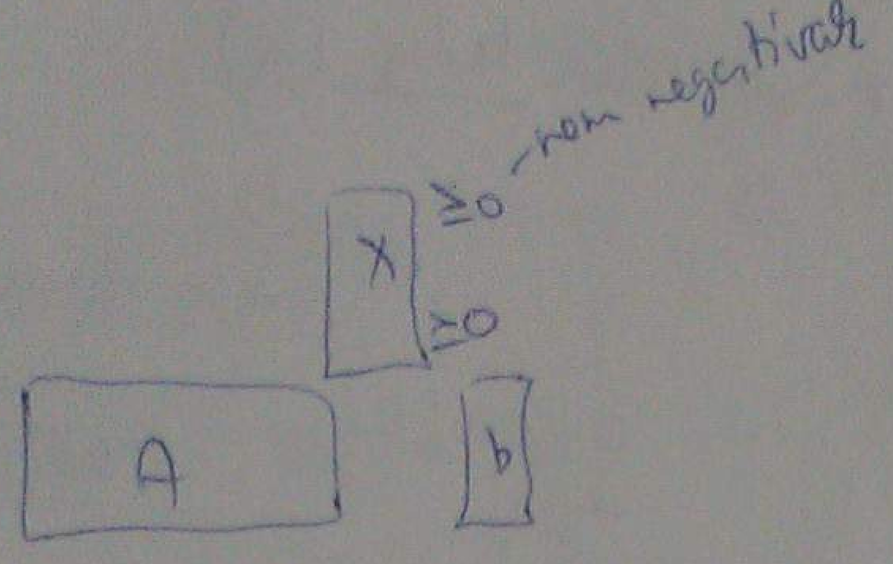
2 magasságú szívektorok: $a_1 \dots a_n, b$

2 kn:




(1)




lin. kombináció

b (1) ✓

b (1) nem mo. ható


skaláris szorzat

$yb > 0$ hegyesszög

$yb = 0$ derék

$yb < 0$ tompa

1.

$\max: c_1 x_1 + \dots + c_n x_n$ → célfgv. felülről korlátos legyen, így lehet maximalizálni

$a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n \le b_1$

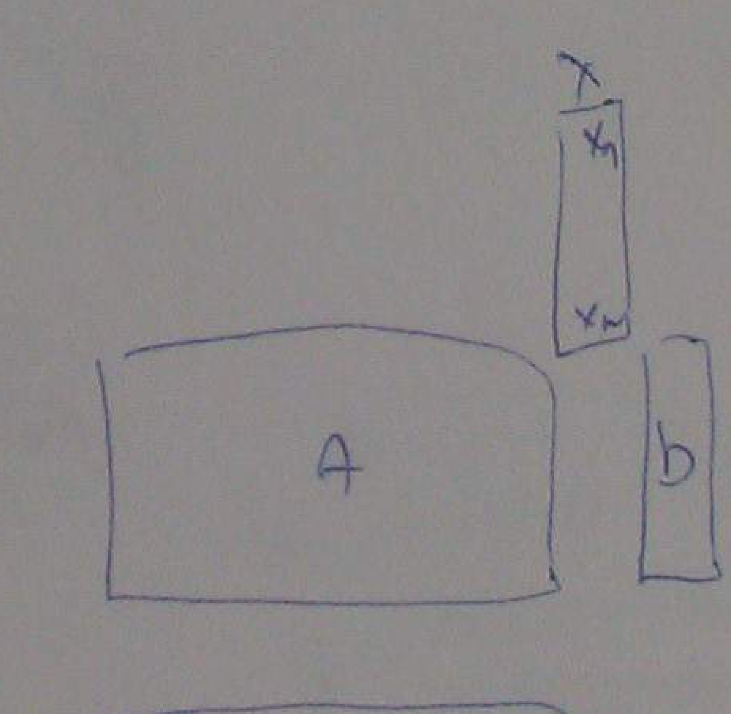
⋮

$\underline{c}$ és $\underline{x}$ skaláris szorzata a célfgv.

7.

(1) $Ax \le b$ mo. ható

(2)




Input: A, b, c

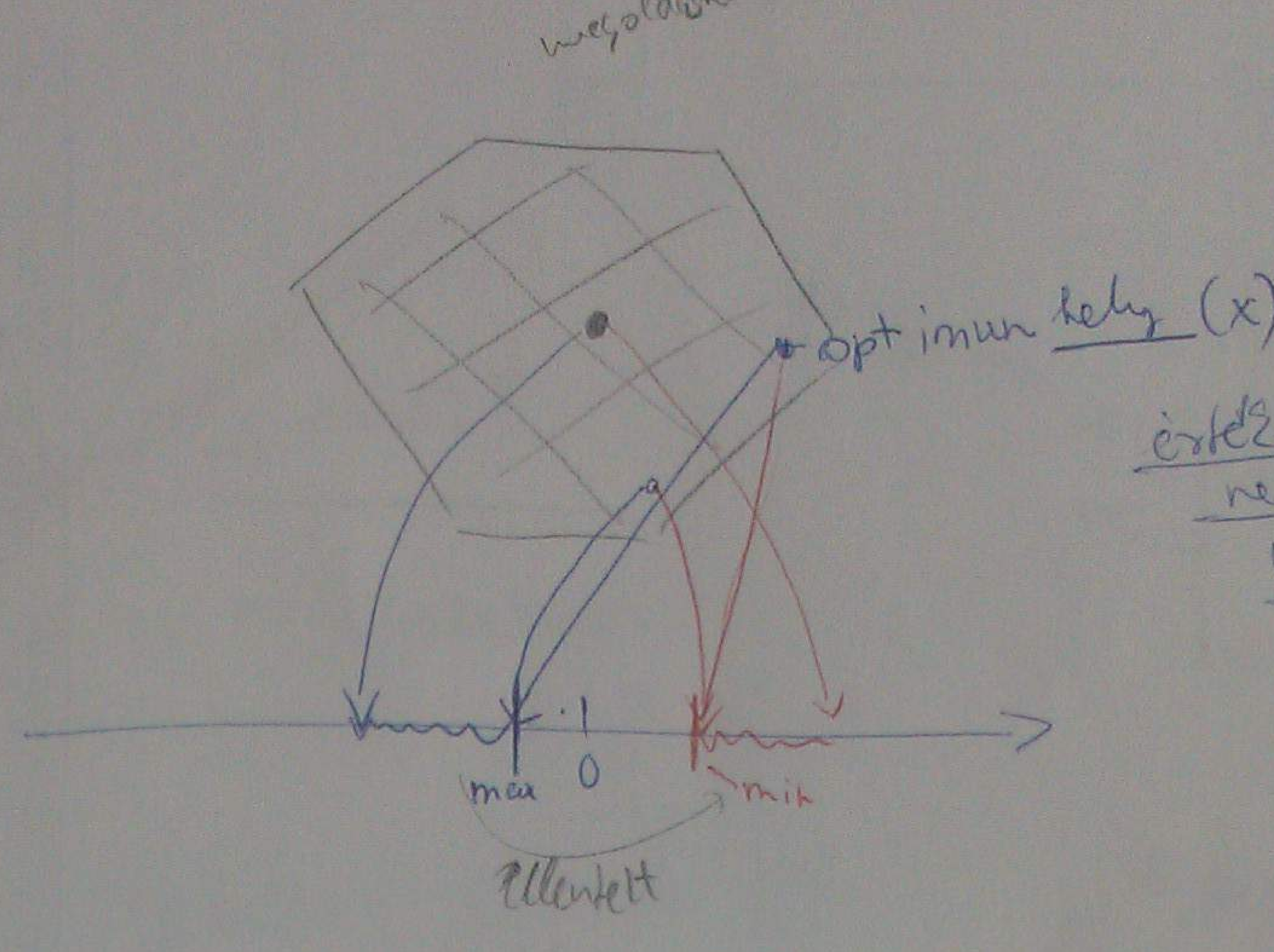
LP.
$\max\{cx : Ax \le b\}$

Helyettesíthető a max-szal

$$\min\{\underbrace{cx}:\underbrace{Ax \le b}\} = (-1)$$

$\Downarrow$ ekvivalens

$$\max\{\underbrace{(-c)}x:\underbrace{Ax \le b}\}$$




értéke nem egyező, hanem ellentett

felülről korlátosság

Tétel:
$\max\{cx : Ax \le b\}$

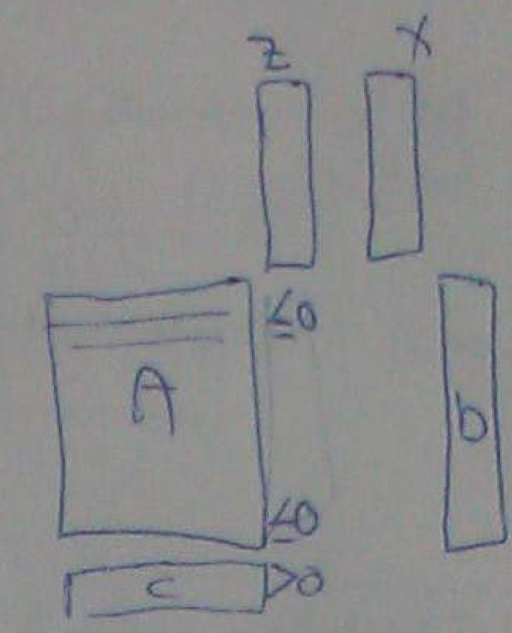
Tfh. $Ax \le b$ m.o.-ható

$\boxed{\{cx : Ax \le b\} \text{ felülről korlátos-e}}$ ez a részhalmaz

ekvivalensek *

~~megegyőzés nemme:~~

ha igen: $\Rightarrow \nexists z$ $\quad Az \le 0$, $\quad cz > 0$

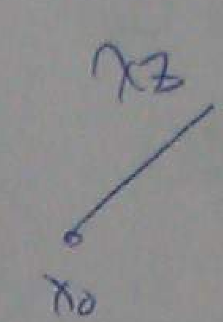



ha felülről korlátos akkor $\nexists z$.

biz: indirekt: tfh $z$ mégis létezik

$x_0$: $Ax \le b$ egy tetsz. m.o.-a

$x_\lambda = x_0 + \lambda z \qquad \lambda \ge 0$




áll: $x_\lambda$ megoldása $Ax \le b$-nek $\forall \lambda \ge 0$-ra

$$Ax_\lambda = A(x_0 + \lambda z) = \underbrace{Ax_0}_{\le b} + \underbrace{\lambda \underbrace{Az}_{\le 0}}_{\le 0} \le b \ \checkmark$$

$$cx_\lambda = c(x_0 + \lambda z) = \underbrace{cx_0}_{\in \mathbb{R}} + \lambda \underbrace{(cz)}_{>0}$$

pl: ha $> 1000$

$$\lambda > \frac{1000 - cx_0}{cz}$$

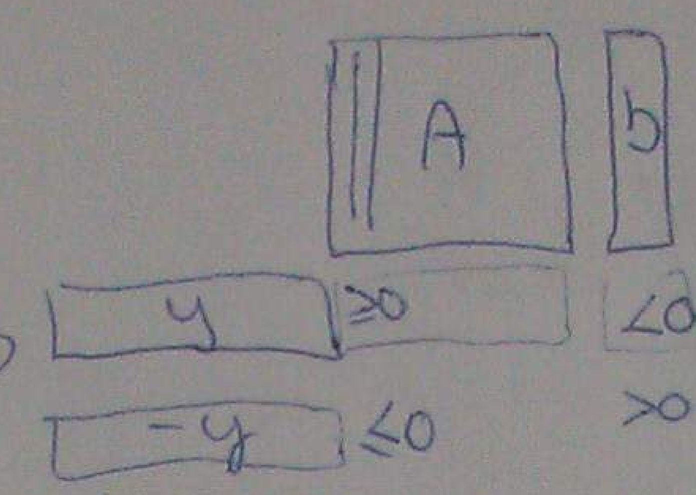
↯

$cx_\lambda$ tetsz. nagy lehet

Farkas-lemma

(1) $Ax = b$, $x \geq 0$

(2) $yA \geq 0$, $yb < 0$




$Az \leq 0 \sim yA \geq 0$

hasonlóan

(2') $yA \leq 0$, $yb > 0$

(2) vagy (2') megoldhatóságát vizsg. → ugyanaz

$y \longleftrightarrow -y$ csere után megoldhatóság ugyanaz

így az $Az \leq 0$ más hasonló

* ekvivalensek

2.

$\boxed{\nexists z: \; Az \leq 0, \; cz > 0}$

Farkas II. $\Longleftrightarrow$ ($A^T c^T$ -re)

3.

$\boxed{\exists y: \; yA = c, \; y \geq 0}$

3→1.

Biz:

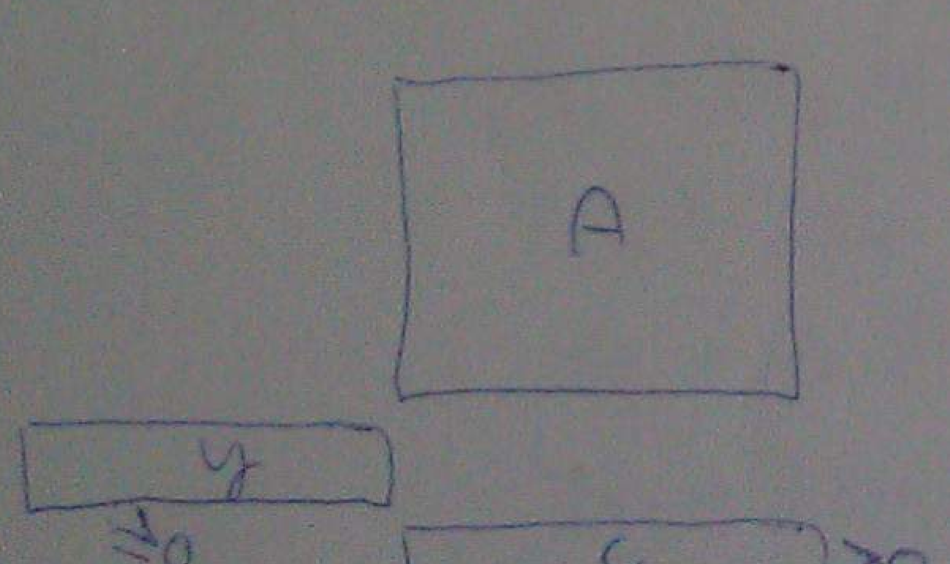
$y$: $yA = c$, $y \geq 0$

$x$: $Ax \leq b$ ktsz m.o.-a

bizonyításra szánt oszlopvektor

$$cx = (yA)x = y(Ax) \leq yb$$

ez lesz a felső korlát, ha $x$ megoldása a rendszernek



PRIMÁL program:

LP: $\max:\{cx : Ax \le b\}$

két személyem is van, melyik a jobb?

$y_1, y_2$ ~~$yA = cy$~~ $yA = c$, $y \ge 0$

$y_1 b = 15$

$y_2 b = 13$

yb a lehető legkisebb legyen

DLP: $\underbrace{\min\{yb : yA = c,\ y \ge 0\}}_{\text{ez is LP feladat}}$

DUÁLIS program

Lin. prog. dualitás tétele:

Th.: $\max\{cx : Ax \le b\}$ olyan hogy $Ax \le b$ mo. ható $\{cx : Ax \le b\}$ felülről korlátos

Ekkor

(1) duális rendszere ($yA = c$, $y \ge 0$) is megoldható ($\exists y$)

és $\{yb : yA = c,\ y \ge 0\}$ alulról korlátos

(2) $[cx \le \dots \le yb]$

$\max\{cx : Ax \le b\} \le \min\{yb : yA = c,\ y \ge 0\}$

$=$ ez a jó

(1,5) $\boxed{*}$

felülről korlátos-e

$\max\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4$

$x_1 + 2x_2 + x_3 \le 5$

$x_2 + 2x_4 \le 6$

$x_1 + x_3 + x_4 \le 7$

$2x_2 + 3x_4 \le 8$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} = b$$

$y = (y_1\, y_2\, y_3\, y_4)$

$c = (2\ 3\ 4\ 5)$

duálisnak annyi változója van ahány a primál egyenlőtlensége duális:

min: $5y_1+6y_2+7y_3+8y_4$ — ez is egy LP feladat

$y_1 + y_3 = 2$

$2y_1 + y_2 + 2y_4 = 3$

$1y_1 + y_3 = 4$

$2y_2 + y_3 + 3y_4 = 5$

$y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ y_3 \geq 0,\ y_4 \geq 0$

→ ellentmondás: nem megoldható a duális ⇒ nem felülről korlátos a primál

akkor felülről korlátos a primál célfgv.-e ha a duális megoldható

(primál megoldható $x_i = 0$) + az is kell

Lin. prog. dualitás tétele

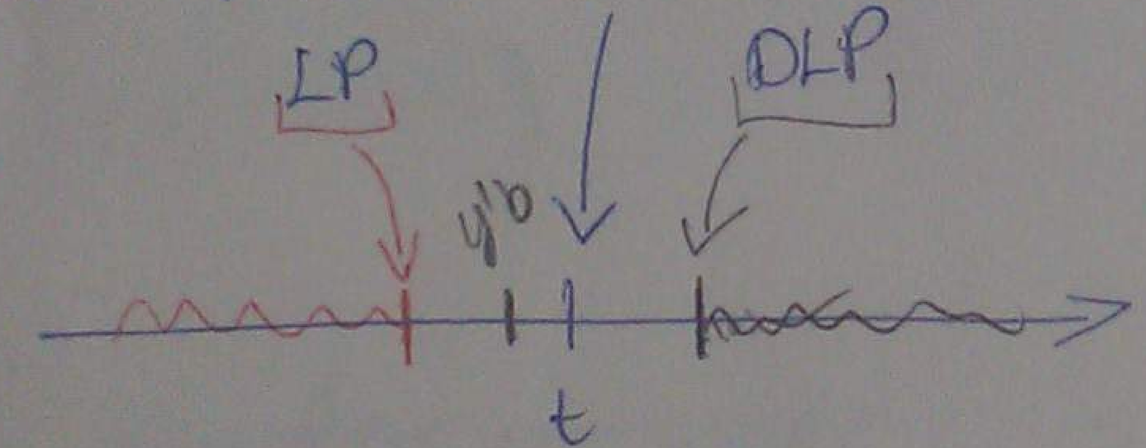
Biz.:

(1) ✓

(2) $\leq$ -ből → $=$

indirekt:

tfh. primál max < t < min



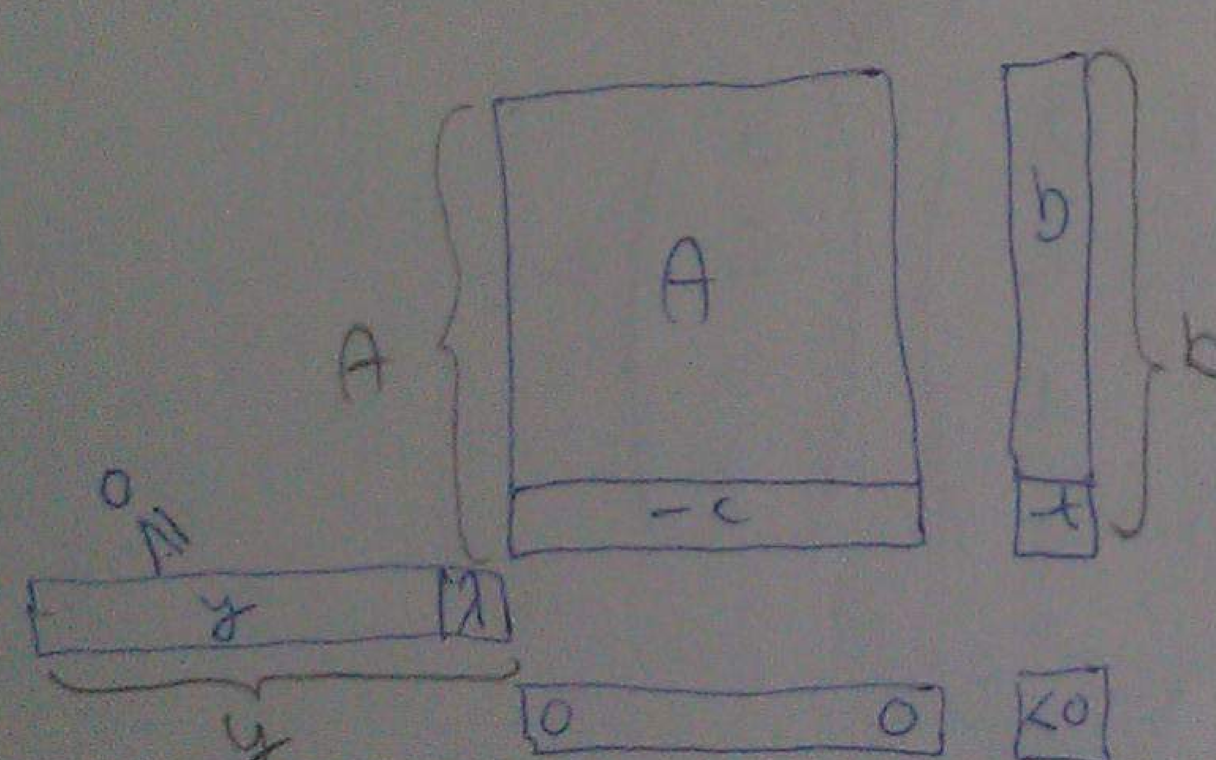
$t > \max_{LP} \Rightarrow \nexists x$: $Ax \leq b$, $cx \geq t$ } ← lin. egyenlőtlenségrendszer

$\sim -cx \leq -t$

Farkas lemma

(1) $Ax \leq b$

(2) $yA = 0,\ y \geq 0$, $yb < 0$



Farkas I.

$\Rightarrow \exists y \geq 0,\ \lambda \geq 0$

$yA - \lambda c = 0$ → sorvektor

$yb - \lambda t < 0$ → szám

$\Rightarrow \exists y \geq 0,\ \lambda \geq 0$

$yA = \lambda c$

$yb < \lambda t$

Ha $\lambda=0$: (nem lehet leosztani)

$$\left.\begin{array}{l}\exists y \geq 0\\ yA=0\\ yb<0\end{array}\right\} \lightning \text{ mert akkor } Ax\leq b \text{ nem volna megoldható}$$

(Farkas I. miatt)

$\lightning$

$\Downarrow$

$\lambda>0$ (így le lehet osztani)

$y' := \frac{1}{\lambda} y$

$$\boxed{\begin{array}{l}\exists y' \geq 0\\ y'A=c\\ y'b<t\end{array}}$$

$\lightning$: volna olyan $y'$ duál m.o., amire $y'b<t$

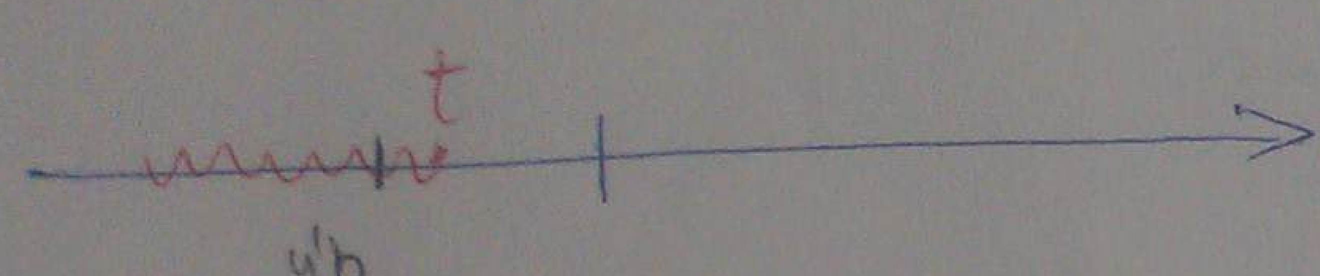
$$\boxed{\begin{array}{cc}\max & = \min\\ LP & DLP\end{array}}$$

(1,5) ⊠

$\exists \max\{cx : Ax\leq b\}$, $\exists \min\{yb : yA=c,\ y\geq 0\}$

<u>biz:</u> indirekt

Tfh. $\nexists \max\{cx : Ax\leq b\}$




($cx \leq .. \leq y'b$)

$t := \sup\{cx : Ax\leq b\}$

$t$ nem max $\Rightarrow \nexists x:\ Ax\leq b,\ cx\geq t \Rightarrow \exists y' :\ y'A=c,\ y'\geq 0$

$\underline{y'b}<t \rightarrow \lightning$ $y'b$ a legkisebbnél kisebb felső korlátja $\{cx : Ax\leq b\}$-nek

Drakula művek

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x$

LP:

$\max \quad 10x_1 + 5x_2$

$4x_1 + x_2 \leq 16$

$2x_1 + 3x_2 \leq 18$

$\boxed{x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0}$

$$\begin{array}{cc} & A \quad\quad\quad b \\ \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{matrix} & A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 16 \\ 18 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$c = (10 \quad 5)$

mért lehet törölni az $y_3$-at $y_4$-et

DLP:

$\min \quad 16y_1 + 18y_2$

$4y_1 + 2y_2 - y_3 = 10$

$y_1 + 3y_2 - y_4 = 5$

$y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ y_3 \geq 0,\ y_4 \geq 0$

$y_3$-mal csinálunk vmit

$y_3$

---

$\min 16y_1 + 18y_2$

$4y_1 + 2y_2 \geq 10$

$y_1 + 3y_2 \geq 5$ ← duális ekvivalens alakja

$y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0$

a két feladat megoldása van.

PRIMÁL:

$\max \{ cx : Ax \leq b, x \geq 0 \}$

DUÁLIS ekv. alakja:

$\min \{ yb : yA \geq c, y \geq 0 \}$

$y$ ← [illegible] változós

Példa

max $nx_1 + (n-1)x_2 + \dots + 2x_{n-1} + x_n$

$x_1 \le 1$

$x_1 + x_2 \le 2$

$x_1 + x_2 + x_3 \le 3$

$\vdots$

$x_1 \dots x_n \le n$

$x_1 \ge 0 \dots x_n \ge 0$

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 \dots & 0 \\ \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{bmatrix} = b$

$y(y_1 \dots y_n)$

$c = [n, n-1 \dots 2\ 1]$

$\max\{cx : Ax \le b,\ x \ge 0\}$

$\min\{yb : yA \ge c,\ y \ge 0\}$

$y_1 + y_2 + y_3 \dots + y_n \ge n$

$y_2 + y_3 \dots y_n \ge n-1$

$y_3 \dots + y_n \ge n-2$

$\vdots$

$y_n \ge 1$

$y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0, \dots y_n \ge 0$

b) $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 1$ opt?

$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$ $cx = n + (n-1) + \dots + 1$

akkor optimális, ha a duális max.-ja is az.

Legyen

$y = (1\ 1\ 1 \dots 1)$, $y_1 = y_2 = \dots = y_n = 1$ → megoldás (egyenlőség) a duálisban.

$x$ tehát optimális.

Menetrend a max-ra
1. megoldható?
2. célfv. felülről korl.
3. célfv. maximuma?

Milyen nehéz egy lin. prog. feladat?

$\max\{cx : Ax \le b\}$

„t számon teljesül a max? És $t+1$-re? És $t+2$-re? …"

LP: inputs $A, b, c,\ t \in \mathbb{R}$

kérdés: van-e olyan $x$: $Ax \le b$, hogy $cx \ge t$.

NP-beli?

igen, tanú egy konkrét $x$ (tanú)

Kell a polinom méretű, polinom időben ellenőrizhető tanú.

co-NP-beli?

• igen tanú $y$, $yA = c$, $y \ge 0$

$yb < t$

Ellenőrizni kell, hogy az $x$, és $y$ olyan e.

Régen:

szimplex módszer

- Dantzig adta, aki az LP „atyja"
- csúcsról csúcsra ugrál a megoldáshalmazban, úgy hogy a célfv. növekedjen.
- egyszerre dolgozik a duális feladattal is.
- optimális megoldást a duálissal együtt prezentálva bizonyítja.
- 4 alaplépéssel működik, emberek is végezték régen, papíron, táblázatokkal, sokan.
- hátránya: nem polinomiális algoritmus

1979, Hacsijan:

ellipszoid módszer

- $LP \in P$
- polinomiális módszer
- a szimplex módszer a gyakorlatban mégis gyorsabban futott.
- a polinomiális futás elméleti eredmény.

1984, Karmakar,

belső pontos módszerek

- $LP \in P$
- gyorsabb mint az ellipszoid
- még mindig nem elég gyors: a valós életbeli problémákon a szimplex így is gyorsabb.

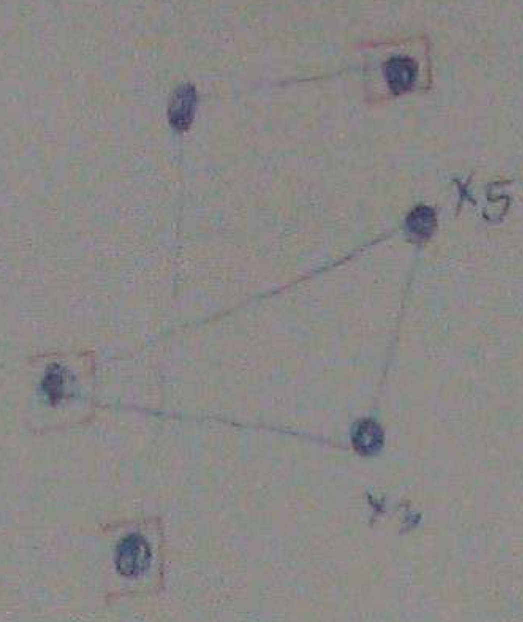
Egészértékű programozás (IP = integer prog.)

- drága mánk eredménye lehetett volna (3,14; 4,62) is. Nem jó így ezért kell IP.

$$IP: \max\{cx \; Ax \leq b, \; x \text{ egész vektor}\}$$

- gyakorlati szempontból több 10e $ nagyságú feladatoknál az egészérték miatti pár dollár veszteség nem lényeges

Példa




G: v a feladatok

E: azok a feladatpárok amiket egyszerre nem tudunk megoldani

független ponthalmaz $\alpha(G)$

Kell ebből egy IP feladat:

$V(G) = \{v_1, v_2, v_3 \dots v_n\}$ csúcsokhoz számértékek rendelése,

$x_1 \quad x_2 \quad x_3$

IP
$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{ha } v_i \in \text{ftlen csúcshalmaz} \\ 0, & \text{ha nem} \end{cases} \equiv \forall i: 0 \leq x_i \leq 1, \; x_i \text{ egész.}$$

$\forall e = \{v_i, v_j\}: x_i + x_j \leq 1$

Pl: $x_3 + x_5 \leq 1 \Rightarrow$ vagy $x_3$ vagy $x_5$ van ftlen csúcshalmazban, vagy egyik sem.

$\max: x_1 + x_2 + \dots x_n$

MAXFTLEN $\to$ IP visszavezetés

Tétel: IP NP-teljes

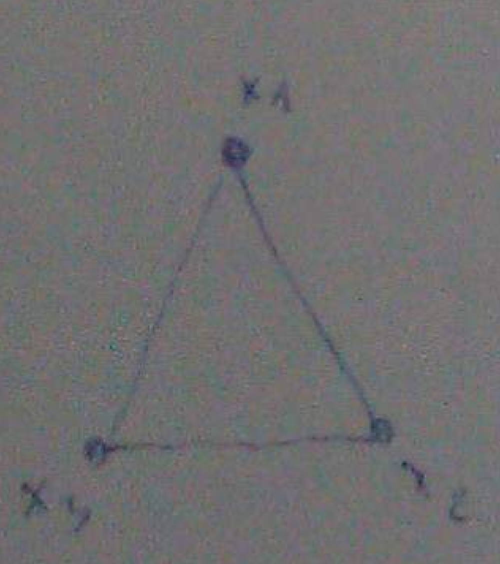
IP input: $A, b, c, t$

IP output: van-e $x$: $Ax \leq b$, $cx \geq t$, $x$ egész.

biz:
NP-beli: tanúval belátható
MAXFTLEN $\twoheadrightarrow$ IP

$\square$

Pl




$x_i + x_j \leq 1$

$\max\{x_1 + x_2 + x_3\}$

$0 \leq x_i \leq 1$

| IP | LP |
|---|---|
| $x_1 = 1$ | $x_1 = \frac{1}{2}$ |
| $x_2 = 0$ | $x_2 = \frac{1}{2}$ |
| $x_3 = 0$ | $x_3 = \frac{1}{2}$ |
| max: 1 | max: $\frac{3}{2}$ |

$\Rightarrow$ LP nem jelent semmiféle megoldási javaslatot az ILP feladathoz. Nem derül ki belőle, hogy melyik csúcs lesz 1, melyik 0.

Igaz-e a dualitás tétel ILP esetén?

elhagyjuk a feltételt: LP-relaxáció

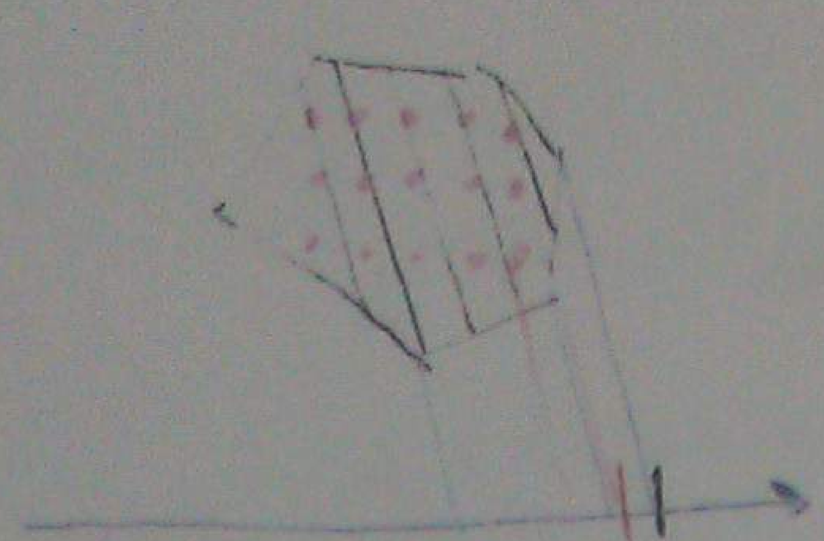
IP $\max\{cx : Ax \le b,\ x \text{ egész}\}$

DIP $\min\{yb : yA = c,\ y \ge 0,\ y \text{ egész}\}$

$cx \le \ ? \ \le yb$

$\max \boxed{IP} \le \max \boxed{LP}$

Szűkítettük a megoldáshalmazt IP esetén: az IP maximuma $\le$ LP max-tól.



$$\boxed{\max_{IP} \le \max_{LP} = \min_{DLP} \le \min_{DIP}}$$

Branch & Bound algoritmus:

IP $\max\{cx : Ax \le b,\ f \le x \le g,\ x \text{ egész}\}$

$$\underset{f}{\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_j \\ \vdots \end{pmatrix}} \le \underset{x}{\begin{pmatrix} \vdots \\ x_j \\ \vdots \end{pmatrix}} \le \underset{g}{\begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_j \\ \vdots \end{pmatrix}}$$

$\xrightarrow{\text{relaxálás}}$ LP $\to$ opt: $x^*$, $cx^* = z^*$ $\to$ ha szerencsések vagyunk és minden $x^*$ egész, akkor készen vagyunk, ILP mo. is megvan

$x_j$ - elágazási változó

$f_j \le t \le g_j - 1$

$\boxed{IP'}$ $\max\{cx : Ax \le b,\ f' \le x \le g',\ x \text{ egész}\}$

$f' = f$, $\quad g'_i = \begin{cases} t, & \text{ha } i = j \\ g_i, & \text{ha } i \ne j \end{cases}$

$\boxed{IP''}$ $g'' = g$

$f''_i = \begin{cases} t+1, & \text{ha } i = j \\ f_i & \text{ha } i \ne j \end{cases}$

$$\left.\begin{matrix} \max IP' \\ \max IP'' \end{matrix}\right\} \le \max IP \le \overset{z^*}{\overset{\shortparallel}{\max}}\ LP$$

Bound: ennél rosszabb korlátozó részfeladatokkal nem kell foglalkozni

## Branch & Bound
## Algoritmikusan

nyilvántartott: $\mathcal{L} = \{(IP)^i = (f_i, g_i, \overset{z^R}{w_i})\}$ [illegible] korlát.

$x^*$: eddigi (egész) megoldás.

$z^* := cx^*$

0. lépés: $\mathcal{L} = \{(IP)\}$ $x^*$ nem def.
$z^* = -\infty$

Ha $\mathcal{L} = \emptyset \Rightarrow$ STOP, különben:
1. lépés: $\mathcal{L}$-ből $(IP)^i$ választása, törlése

$(LP)^i$ - LP relaxált.

2. lépés Ha $w_i \leq z^* \to$ 1. lépés.

3. lépés: $(LP)^i$ megoldása. (szimplexel v. mással)

Ha nincs m.o. $\to$ 1 lépés

Ha van: Opt hely: $x_i$, $\max = cx_i = z_i$

4. lépés:
a) eset: $z_i \leq z^* \to$ kár volt vele foglalkozni $\to$ 1. lépés
b) eset: $z_i \geq z^*$ és $x_i$ egész

$z_i$ az új $z^*$, $x_i$ az új $x^*$, folytatjuk $\to$ 1 lépés

c eset: $z_i \geq z^*$ de $x_i$ NEM egész

$x_{i,t}$ választása, elágazás $IP'$ és $IP''$ $\mathcal{L}$-hez adása.

hozzájuk: $w_i' = z_i$ $w_i'' = z_i$

$\to$ 1. lépés

### További infók

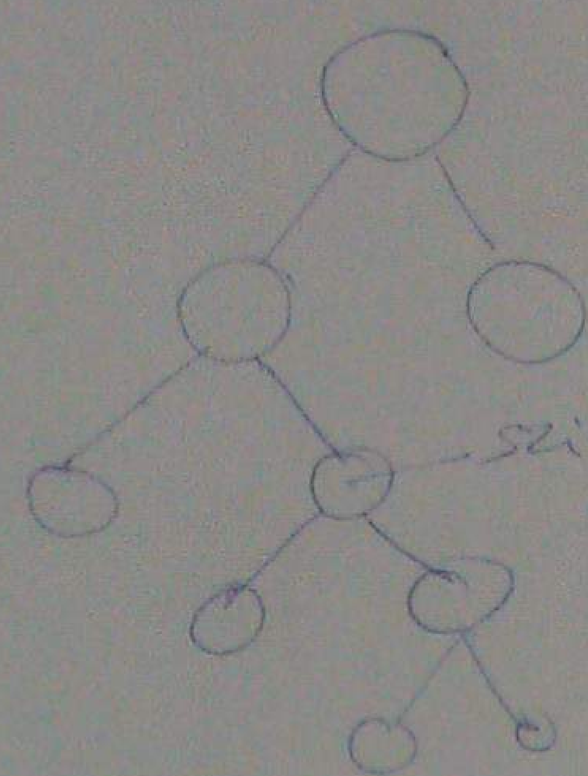
B&B nem az egyetlen IP-solver, rengeteg spec., védett, sokba-kerülő algo van a piacon.
pl. CPLEX ip solver mai piacvezető szoftver.

### Kérdések

1 lépés $IP_i$ választása?

4c lépés: $x_{j,t}$ választása?

B&B fa:



szimplex módszer [illegible] – gyakorlatban ez gyorsabb

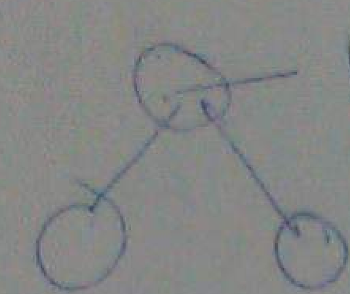
Melyik legyen a következő feladat?

$IP_i$ választása: LIFO (ha a fában legjobb van)

$IP_i=(f_i, w_i)$

ha nem: $w_i$ max

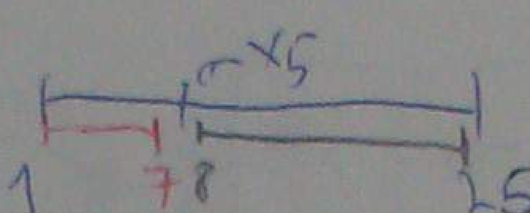
elágazásnál bal v. jobb?



LP → opt.

$x_j, t$ választása: $LP_i$ opt. megoldása: $x^{(i)}$

$x_1$
⋮
$x_j = 7{,}44$
⋮
$x_n$

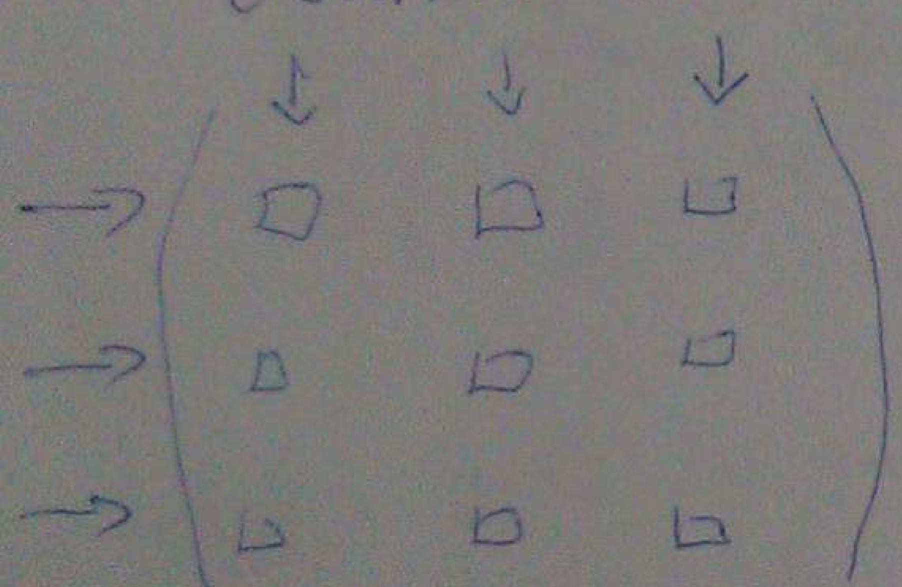


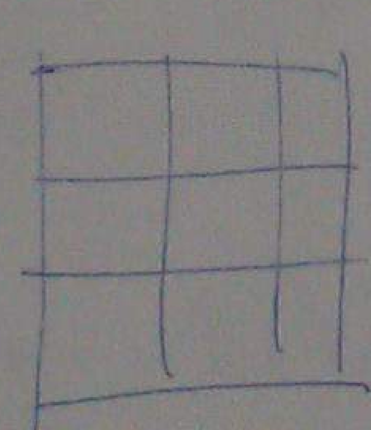
$x_j$: $x^{(i)}$ azon koordinátája aminek törtrésze 0,5-höz legközelebb ~~es~~ esik

$t: \lfloor x_j^{(i)} \rfloor$

IP hatékonyan...

**Def:** M mátrix *teljesen unimoduláris* (TU), ha ∀ négyzetes részmátrixának determinánsa 1 v. 0 v. −1.





$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{TU}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \checkmark$$

$1\times 1$ ✓

$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 2$ nem TU

oszlopok, sorok kiválasztva. k darab

**Tétel:** „TU alaptétel"

IP: $\max\{cx : Ax \le b, x \text{ egész}\}$

LP: $\max\{cx : Ax \le b\}$

Tfh. $Ax \le b$ mo. ható és $\{cx : Ax \le b\}$ felülről korlátos

Tfh. A TU mx, b egész vektor

Ekkor $\max_{LP} cx = \max_{IP} cx$, azaz LP feladat max helyei között van egész vektor is.

$$\max_{IP} \le \max_{LP} = \min_{DLP} \le \min_{DIP}$$

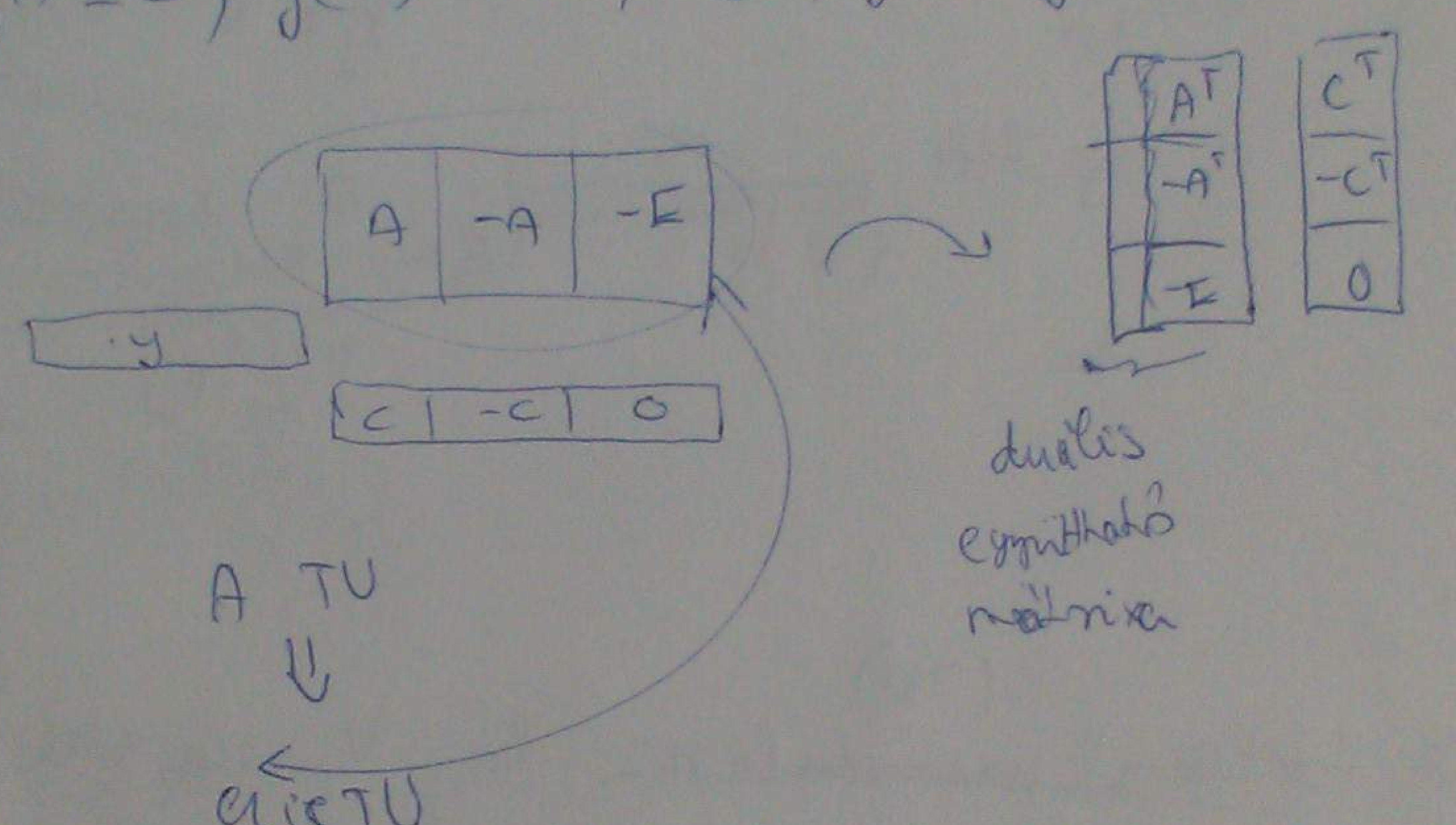
$=$ ha b egész, A TU

? mikor lesz egyenlő? ⇐ c egész

DLP: $\min\{yb : yA = c,\ y \ge 0\}$

$$\parallel$$

$\max\{y(-b) : yA \le c,\ y(-A) \le -c,\ (-E)y \le 0\}$

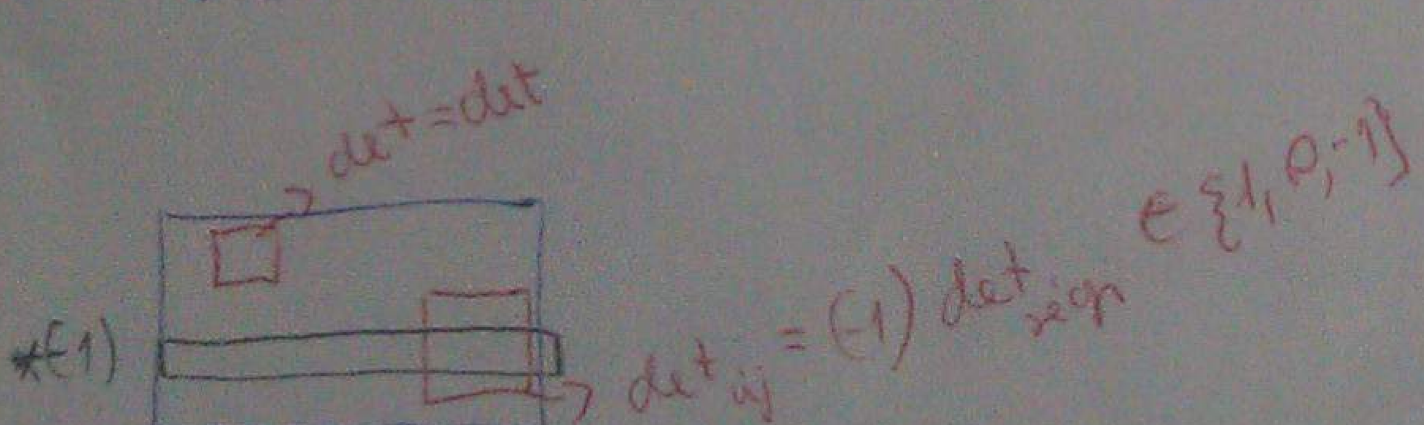



célfgv. e. hatók egészek-e?
akkor használhatjuk a duálist

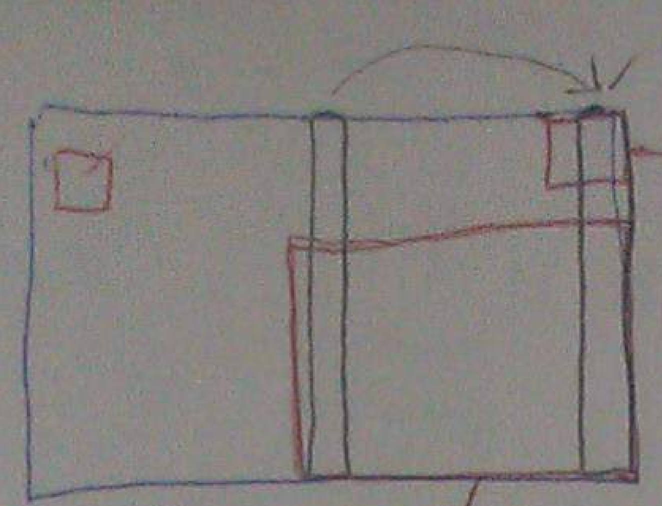
Lemma: A TU marad, ha

(i) egy sort/oszlopot (-1)-gyel szorzunk
(ii) egy —||— új példányban A-hoz veszünk
(iii) egy (00…010…0) vektort A-hoz veszünk új sorként/oszlopként
(iv) transzponálni lehet

Biz.: (i)



(ii)

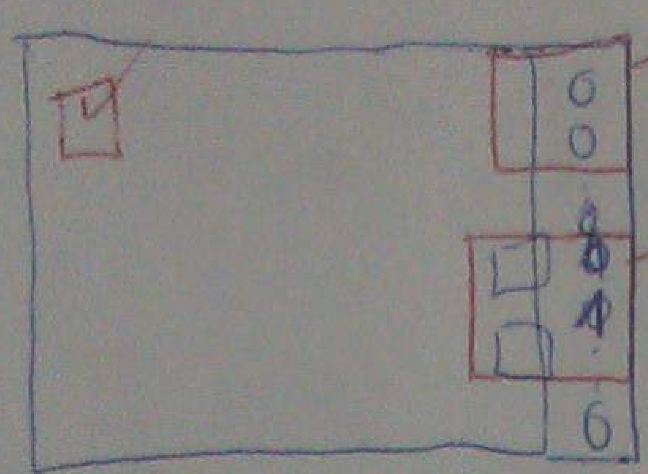



→ u.a. oszlopok sorrendjétől eltekintve

$\det_{ii} = (\pm 1) \det_r \in \{1, 0, -1\}$

det = 0

(iii)

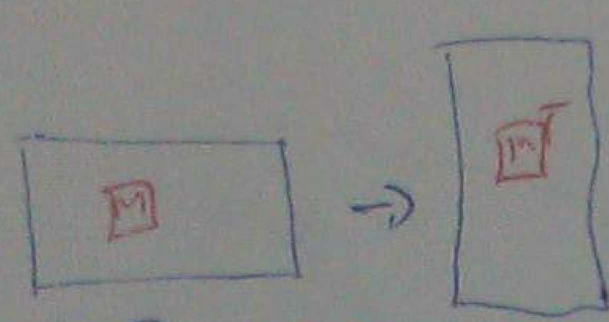


→ det = 0

→ kifejtve az utolsó ~~sor~~ ~~oszlop~~ szerint oszlop

$\det = (\pm 1) \det \square$

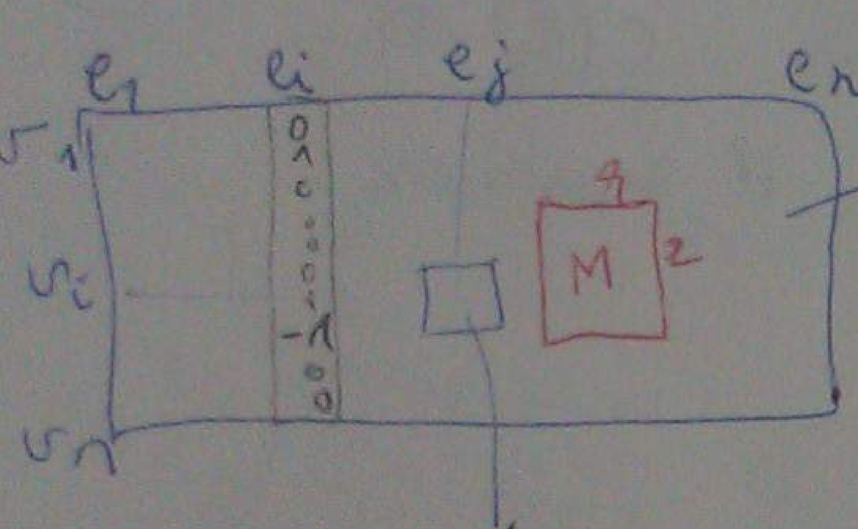
(iv)



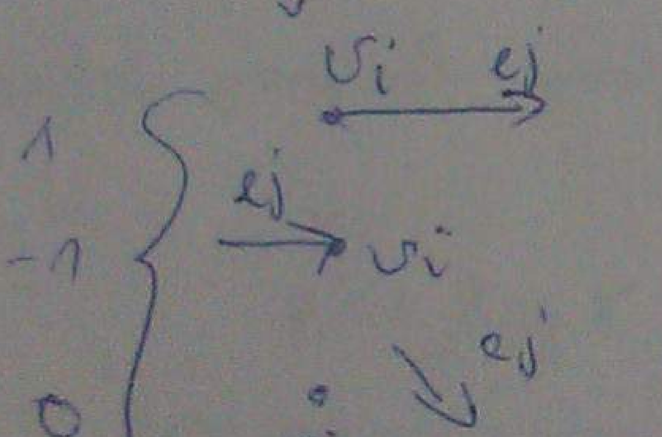
A $\qquad$ $A^T$

$\det_{ii} = \det_r$

## illeszkedési mátrix irányított $G$ gráf




→ $B(G)$




**Tétel:** $\forall G$ ir. gráfra $B(G)$ TU.

**Biz:** cél: $\det_q \square = \pm 1, 0$

$q$-ra teljes indukció

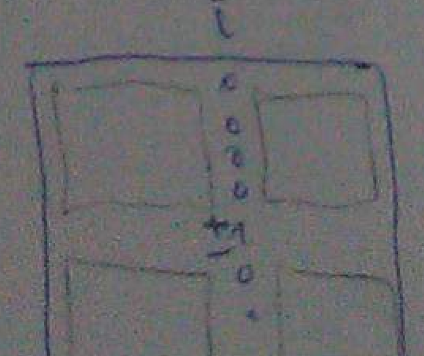
$q = 1$. ✓ Tfh. $(q-1) \times (q-1)$-re működik

↓

$q \times q$-ra lássuk be:

I. eset: Ha M-ben van legfeljebb 1 db nem nulla elemet tartalmazó oszlop

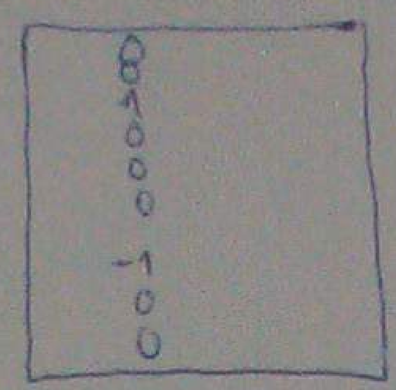
ha nincs nem nulla → det = 0 (csupa 0 oszlop)



→ kifejtési tétel szerint ⇒ $q-1$

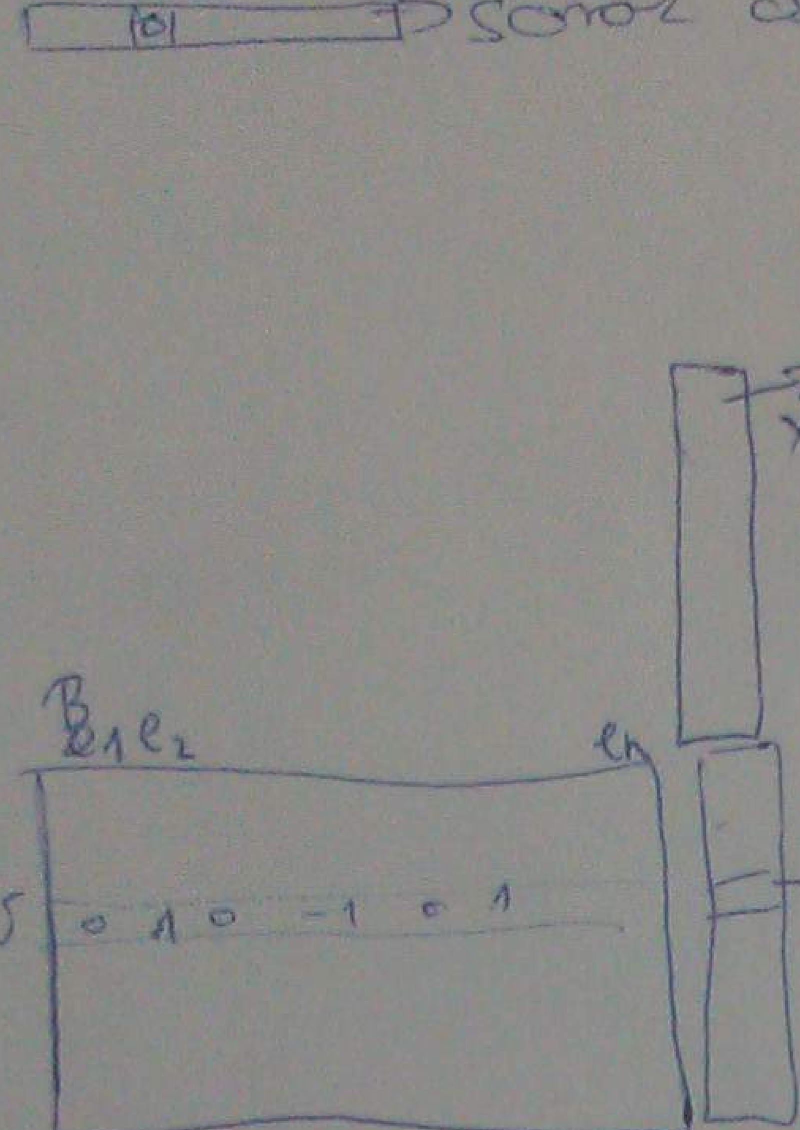
$\det M = (\pm 1)(\pm 1) \underbrace{\det \boxplus}_{\pm 1, 0}$ $q-1$ $\in \{1, -1, 0\}$ ✓

II. eset: Ha M ~~A~~ oszlopa 1db 1-est és valamennyi 0-t tartalmaz
1db -1est



sorok összege = $\underline{0}$ (nullvektor) $\Rightarrow$ sorok lineárisan összefüggenek $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ det = 0 ✓



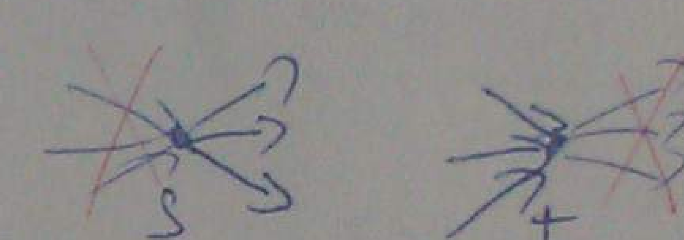
$\rightarrow x_1 = x(e_1)$

$\rightarrow \sum_{v \to e} x(e) - \sum_{e \to v} x(e)$

Max. folyam.

Input: $G$, $s, t \in V(G)$ $c: E \to \mathbb{R}^+$

ir.



$c(e) > 0$

él kapacitása

output: $e \to x(e) \geq 0$

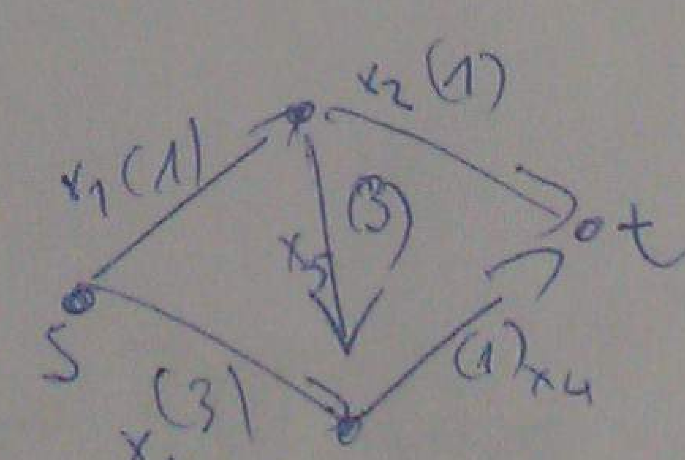
$\sum_{v \to e} x(e) = \sum_{e \to v} x(e)$

$\forall v \neq s, t$

és $\max \sum_{s \to e} x(e)$

$0 \leq x(e) \leq c(e)$

max folyam linprog feladat



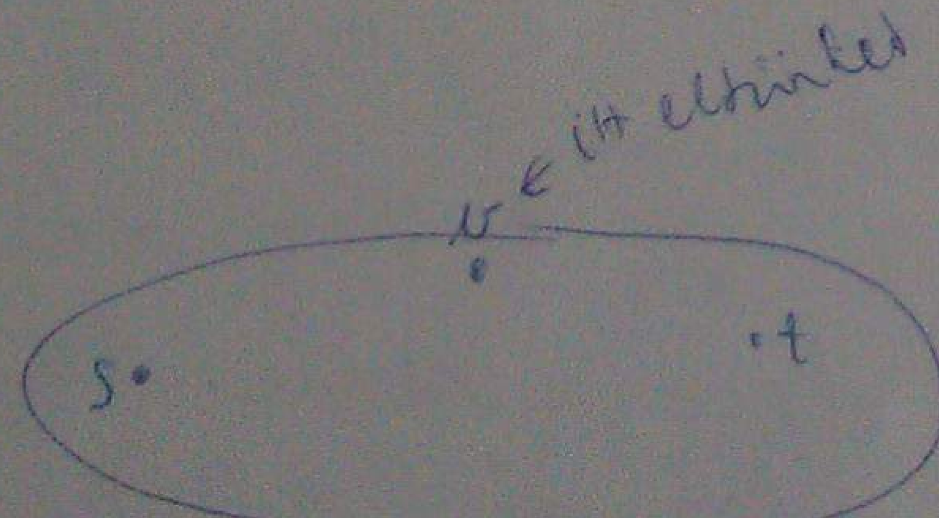
$x_1 = x_2 + x_5$

$x_5 + x_3 - x_4 = 0$

$0 \leq x_5 \leq 3$

max: $x_1 + x_3$

Lemma:



triviális folyam

Lemma: $e \to x(e)$ G-ben

(1) $\forall v \neq s,t \quad \sum_{v \to e} x(e) \leq \sum_{e \to v} x(e)$

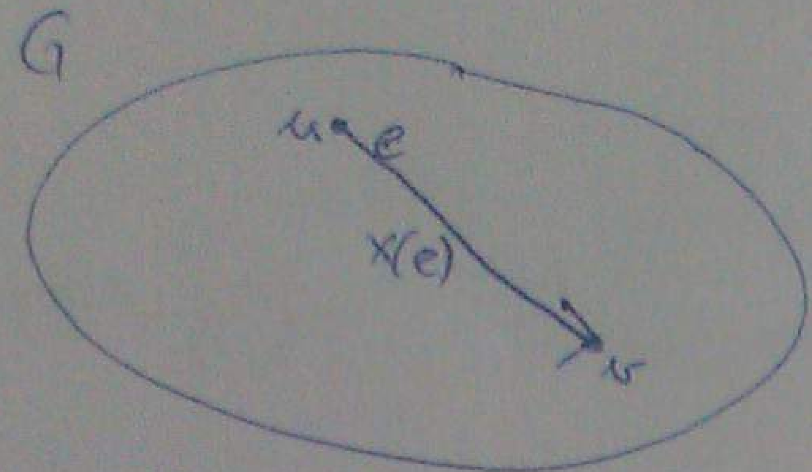
(2) $\sum_{s \to e} x(e) \leq \sum_{e \to t} x(e)$

$\Rightarrow$ x folyam

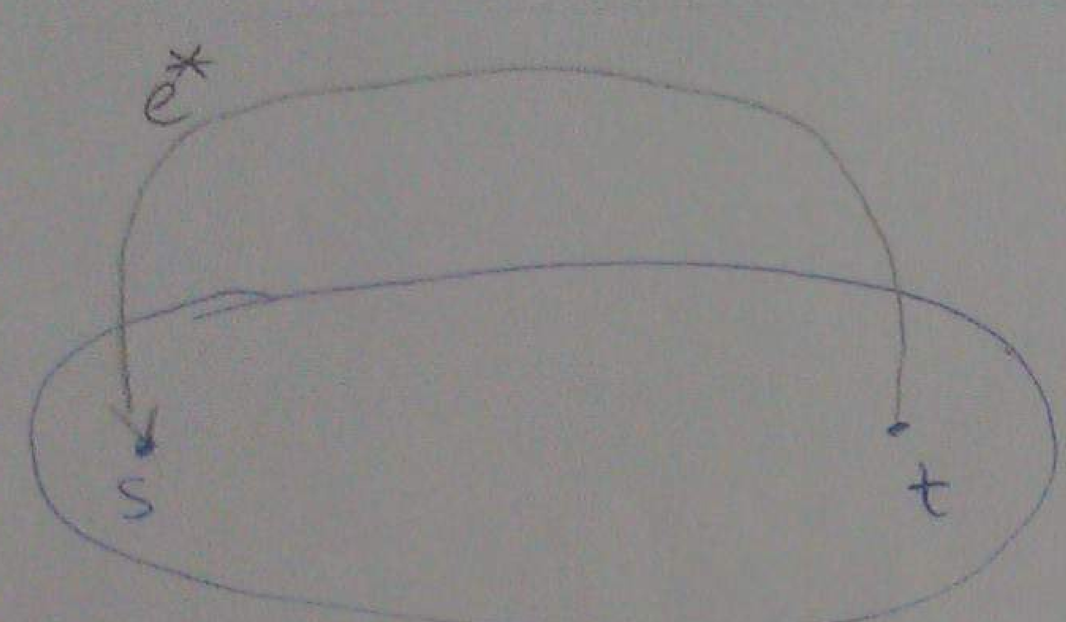
Biz: van x fgv., x folyam-e?

$$0 = \sum_{v \in V(G)} \left( \sum_{e \to v} x(e) - \sum_{v \to e} x(e) \right) \geq \underbrace{\sum_{\to t} x(e) - 0}_{t} + \underbrace{0 - \sum_{s \to e} x(e)}_{s} + \underbrace{0 + \dots + 0}_{(1)} \underbrace{\geq 0}_{(2)}$$

$$= \quad \sum_{\to} x(e) = \sum_{\to} x(e) \checkmark \quad v \neq s,t$$

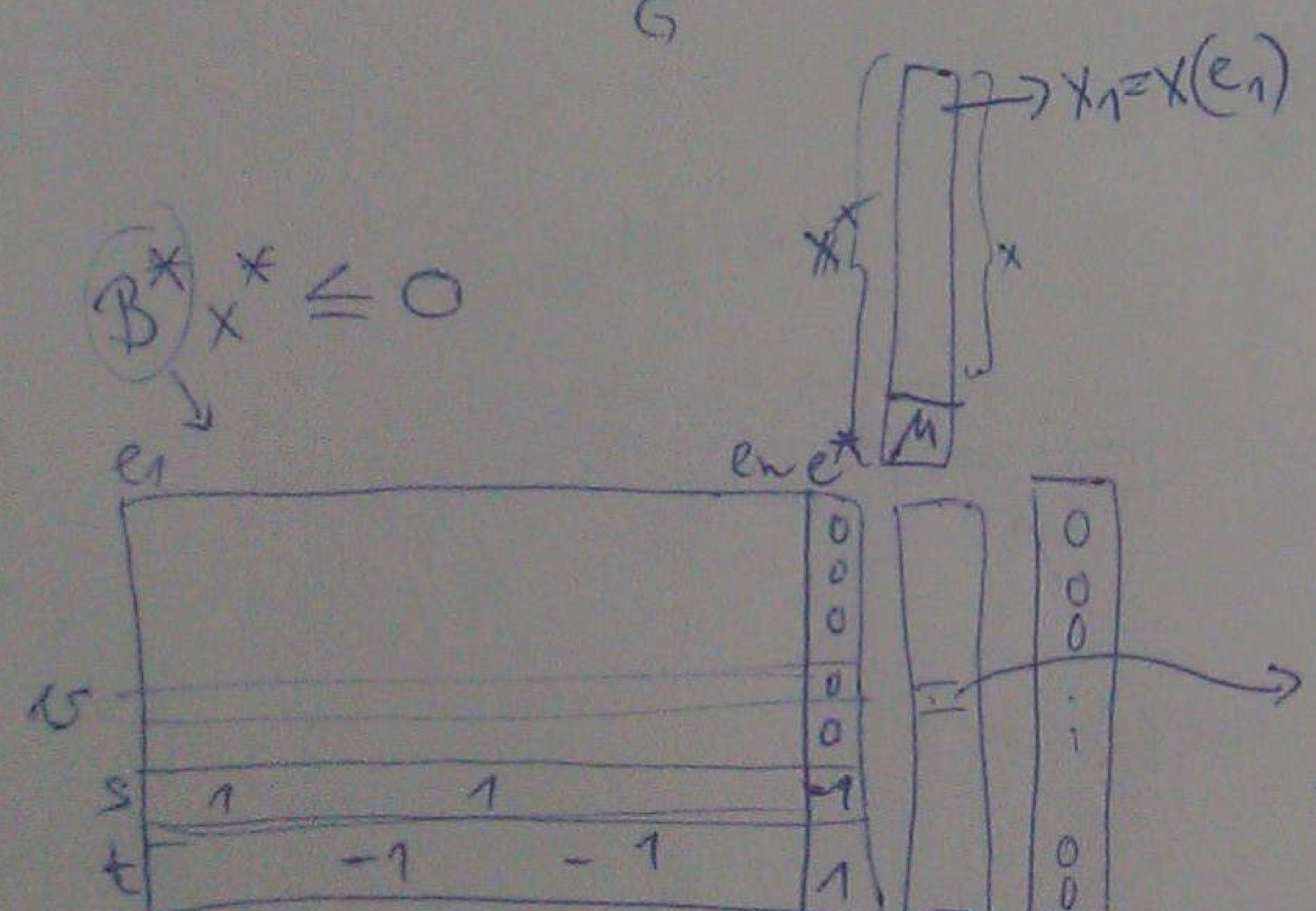



$\underbrace{x(e)}_{v} - \underbrace{x(e)}_{u}$




$B^*$

$B^* x^* \leq 0$




$\sum_{v \to e} x(e) - \sum_{e \to v} x(e)$

$B^* x^* \leq 0$

$\forall v \neq s,t \quad \sum_{v \to e} x(e) - \sum_{e \to v} x(e) \leq 0$ } [illegible] lemma 1. feltétele

s: $\sum_{s \to e} x(e) - \mu \leq 0$

t: $-\sum_{e \to t} x(e) + \mu \leq 0$

$\sum_{s \to e} x(e) \leq \mu \leq \sum_{e \to t}$

lemma 2. feltétele

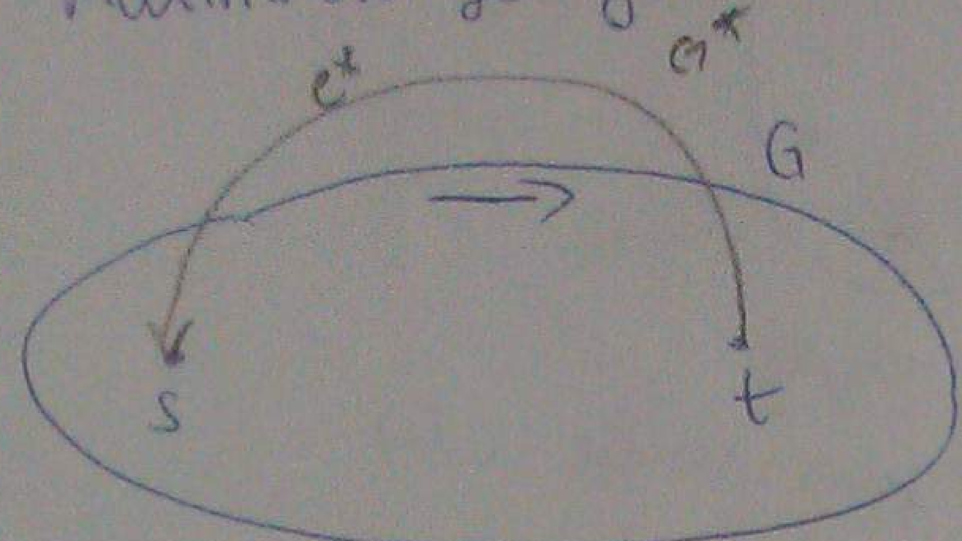
$B^* x^* \le 0 \rightsquigarrow x$ folyam, aminek értéke: $M$

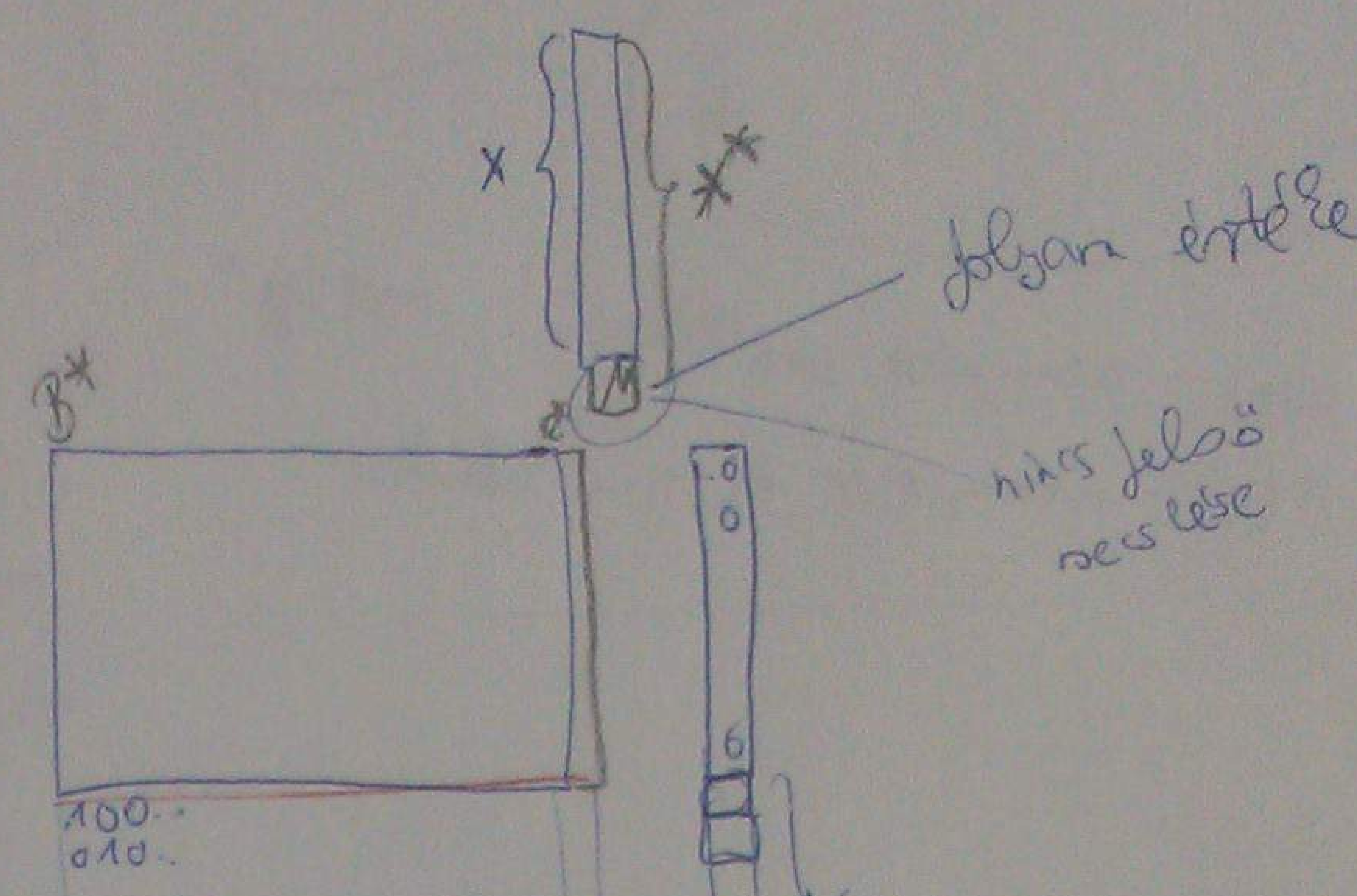
$B^* x^* \le 0 \,, \quad 0 \le x \le c \Big\}$

$c = \begin{bmatrix} c(e_1) \\ \\ c(e_m) \end{bmatrix}$

$$\max \Big\{ \underbrace{(00 \ldots 001) \cdot x^*}_{M} : B^* x^* \le 0 \,, \; 0 \le x \le c \Big\}$$

maximális folyam

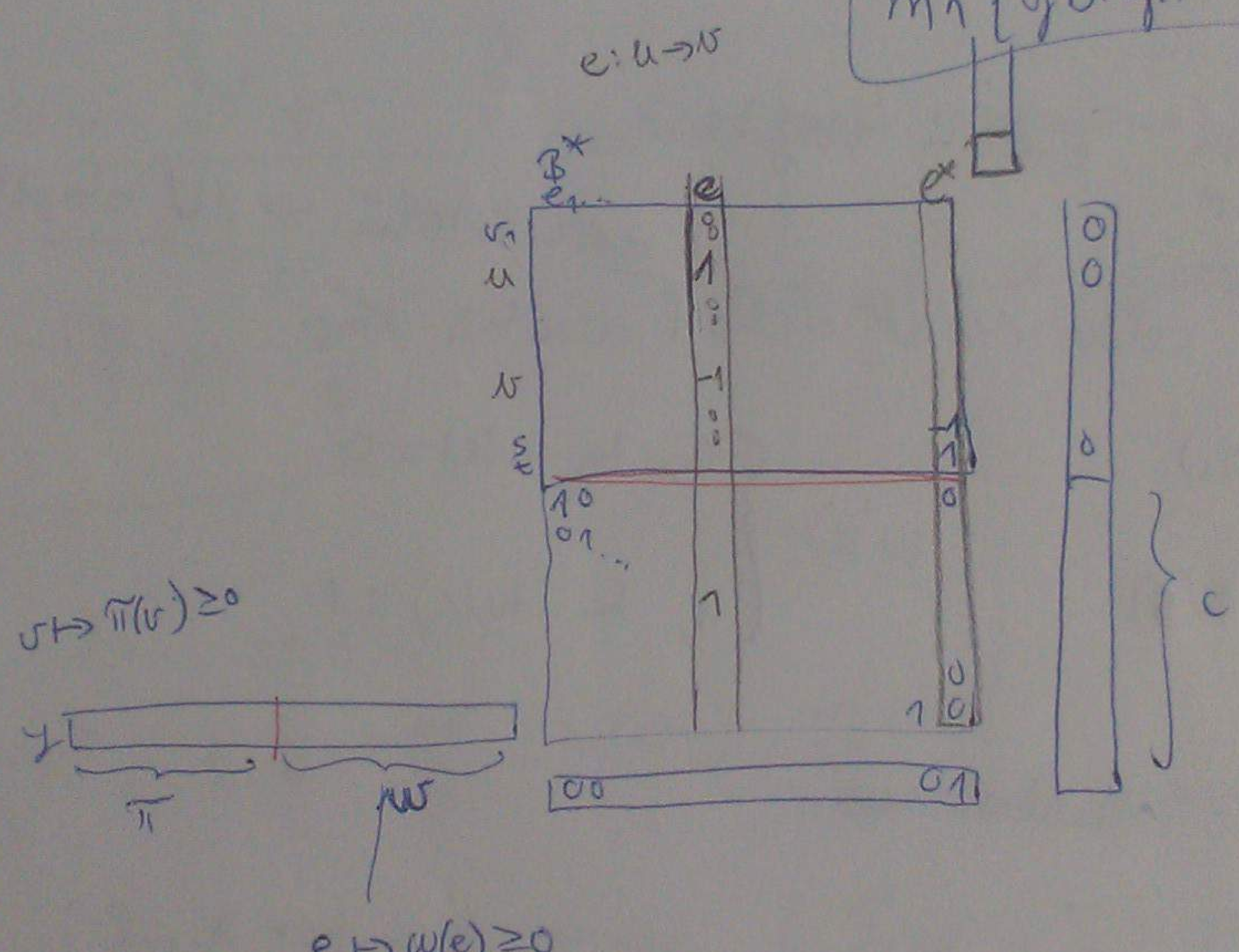



$$\text{max folyam} = \max\{(0\ldots 001)x^* : B^*x^* \leq 0,\ x \leq c,\ x^* \geq 0\} =$$

$$= \min\left\{ y \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ c \end{bmatrix} : y \begin{bmatrix} B^* \\ 1\ 1 \end{bmatrix} \geq (0 \ldots 01),\ y \geq 0 \right\} =$$

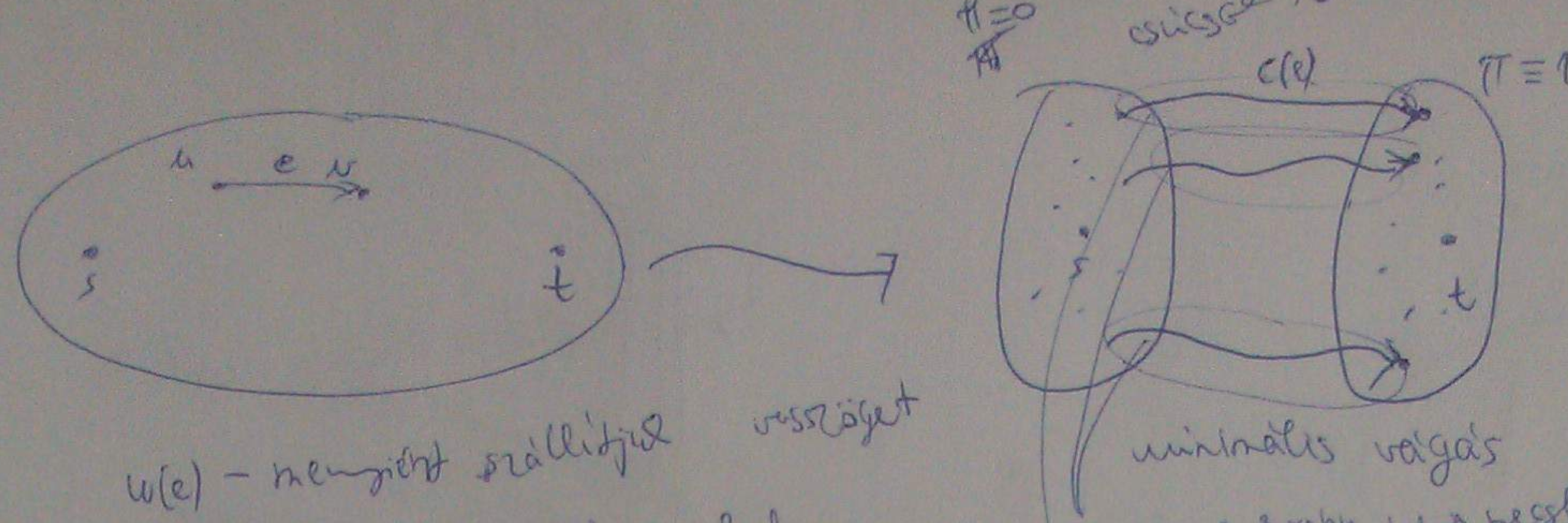
ism.:
$\max\{cx : Ax \leq b,\ x \geq 0\} =$
$\min\{yb : yA \geq c,\ y \geq 0\}$




$$= \min\left\{ \sum_{e \in E} c(e)w(e) : \forall e = \vec{uv} : \pi(u) - \pi(v) + w(e) \geq 0,\ \pi(t) - \pi(s) \geq 1,\ \forall e : w(e) \geq 0,\ \forall v : \pi(v) \geq 0 \right\} =$$

$$= \min \sum_{e \in E} c(e)w(e) = \min_{DLP}$$

- $\forall e:\ \pi(v) \leq \pi(u) + w(e)$ – max potenciál
- $\pi(t) \geq \pi(s) + 1$
- $\forall e:\ w(e) \geq 0,\ \forall v : \pi(v) \geq 0$




$w(e)$ – mennyiért szállítjuk visszaadjuk

$\pi(u)$ – mennyiért tudom eladni

minimális vágás

$w(e)=1$ egyszerűbb felső becslése $c(e)$

potenciális

többi él : $w(e)=0$

$$= \sum c(e) \qquad \min_{DLP} \leq \min \text{ vágás}$$

vágás értéke

<u>Állítás</u>: min vágás $\leq \min_{DLP}$

<u>Biz</u>: arra van $\min_{DLP}$ értékű vágás

egész értékű → „TU alaptétel"

Legyen $\pi, w$ $\min_{DLP}$ célfv. értéket adó √ duális mo.

$$\pi'(v) = \begin{cases} 0, & \pi(v) \leq \pi(s) \\ 1, & \pi(v) > \pi(s) \end{cases} \qquad w'(e) = \begin{cases} 0, & \text{ha } w(e) = 0 \\ 1, & \text{ha } w(e) \geq 1 \end{cases}$$

áll: $\pi', w'$ továbbra is duális mo.

$\pi'(t)=1$

$\pi'(s)=0$

$\pi', w'$: $u \xrightarrow[w'=0]{e} v$, $u$: 0, $v$: 1 ← mikor sérül?

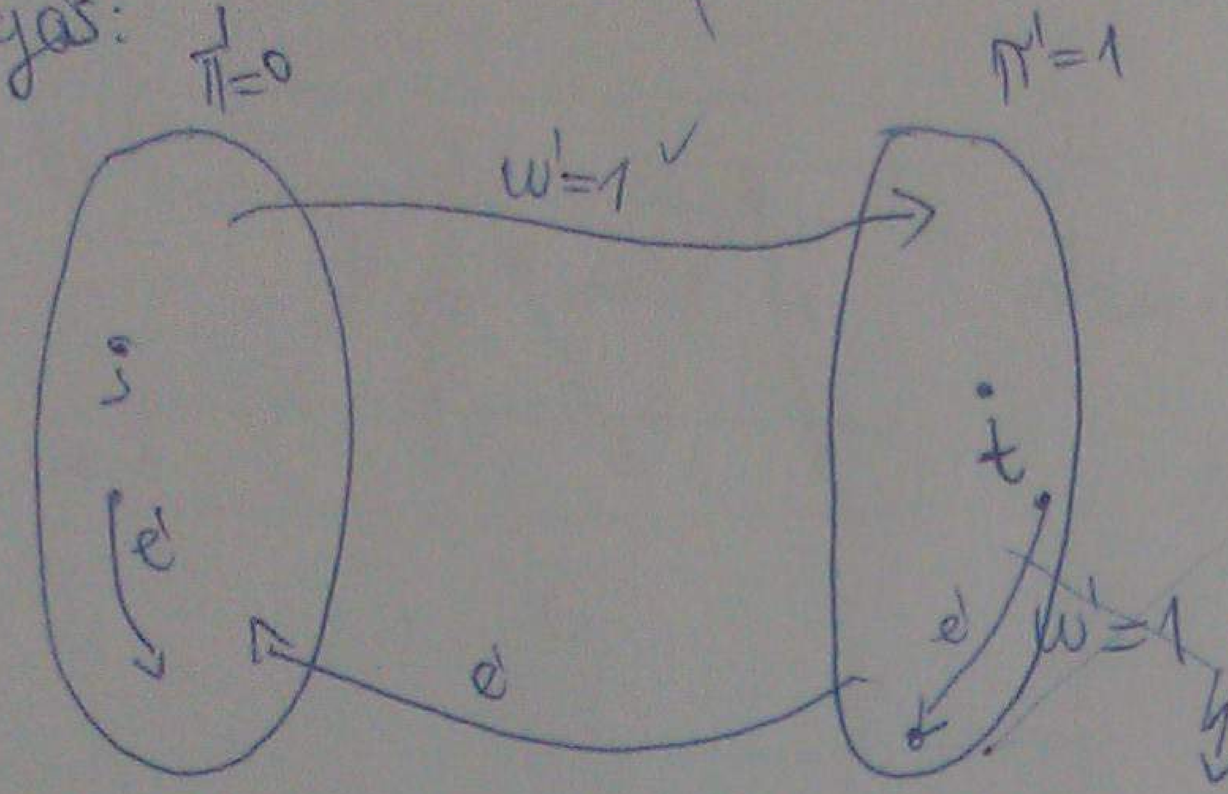
$\pi, w$: $u \xrightarrow[w=0]{} v$, $u$: $\leq \pi(s)$, $v$: $> \pi(s)$ ↯

$$\underbrace{\sum c(e)\, w'(e)}_{\substack{\min \\ DLP}} \le \underbrace{\sum c(e)\, w(e)}_{\substack{\min \\ DLP}}$$

$w'(e) \le w(e)$

vágás értéke

vágás:




ez nem jó
de nem fordulhat elő

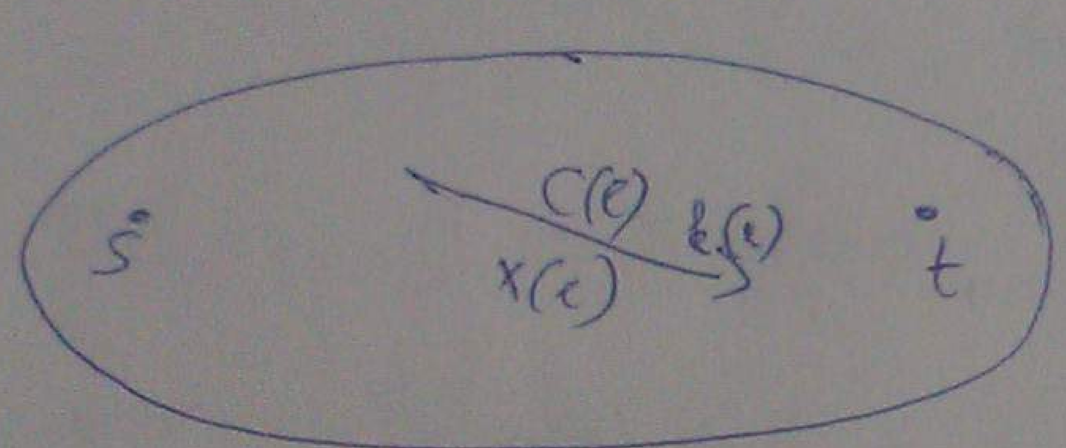
↯

mert akkor $w'(e') = 0$
opt.-nál jobb duális megoldást kapnánk

---

## Minimális költségű folyam

(szállítás lehető legolcsóbban)




$k$: egységnyi termék költsége

**Input:** $\vec{G}$ ir. gráf, $s, t \in V(G)$

$c: E \to \mathbb{R}^+$, $k: E \to \mathbb{R}^+$ (költség), $M \in \mathbb{R}$

(kapacitás) (megvalósítandó folyamérték)

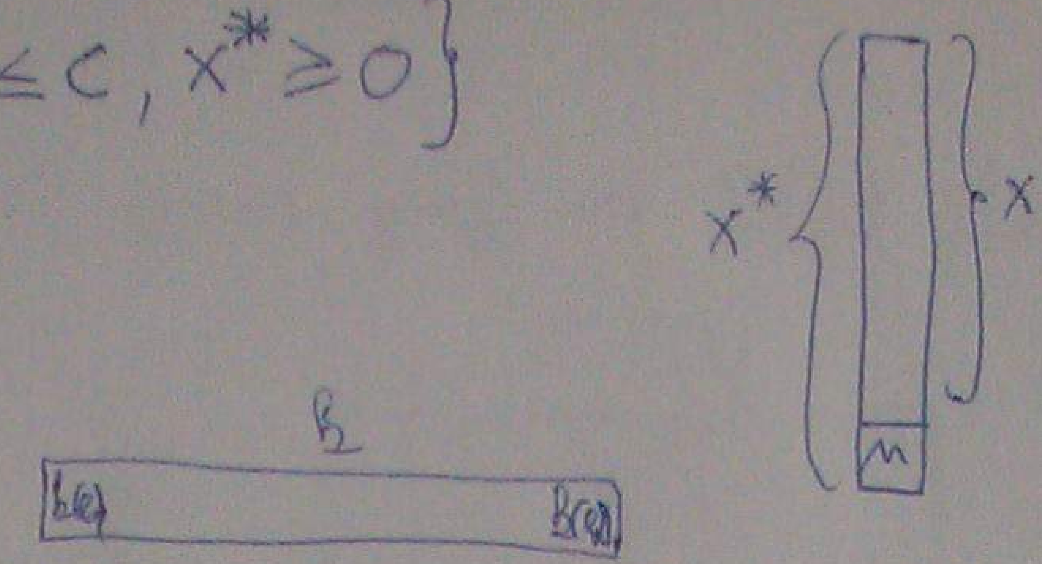
**Output:** $x$ folyam $s$-ből $t$-be $\left( \sum_{\to v} x(e) = \sum_{v \to} x(e), \ \forall v \notin s, t \right.$

$0 \le x(e) \le c(e)$

folyam értéke $\ge M$

$$\boxed{\min : \sum_{e \in E} k(e) \cdot x(e)}$$

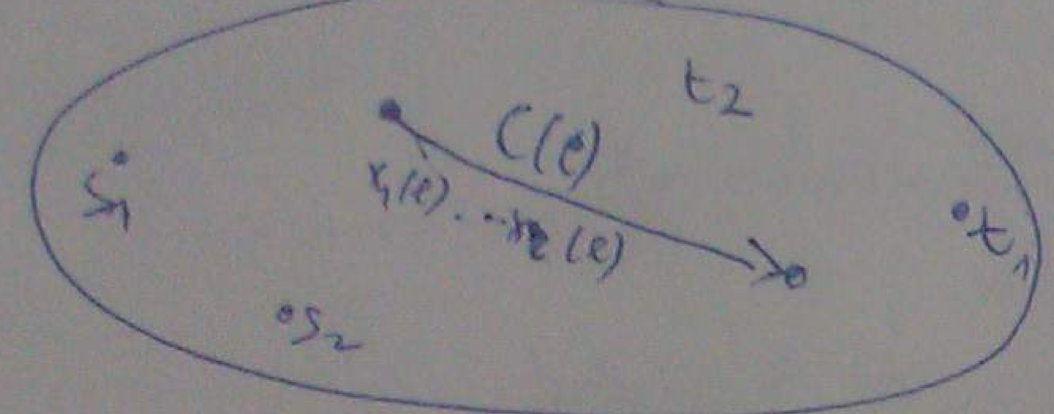
$\min\left\{ \overset{k}{\boxed{\phantom{xxxx}}}\boxed{0}\, x^* : B^* x^* \leq 0,\ m \geq M,\ x \leq c,\ x^* \geq 0 \right\}$




| | max folyam | | min cost flow | | többtermékes folyam |
|---|---|---|---|---|---|
| valós értékű | LP<br>F-F | ✓ | LP | ✓ | LP |
| egész értékű<br>$t(e) \in \mathbb{Z}$<br>$\forall e$ | IP + TU<br>F-F | ✓ | IP + TU | ✓ | NP-nehéz |

## Többtermékes folyam:

$k$




Input: $\vec{G}$ ir. gráf $\quad (s_i, t_i)\ i = 1 \dots k$

$c : E \to \mathbb{R}^+$

Output: $x_1, \dots, x_k : E \to \mathbb{R}^+$

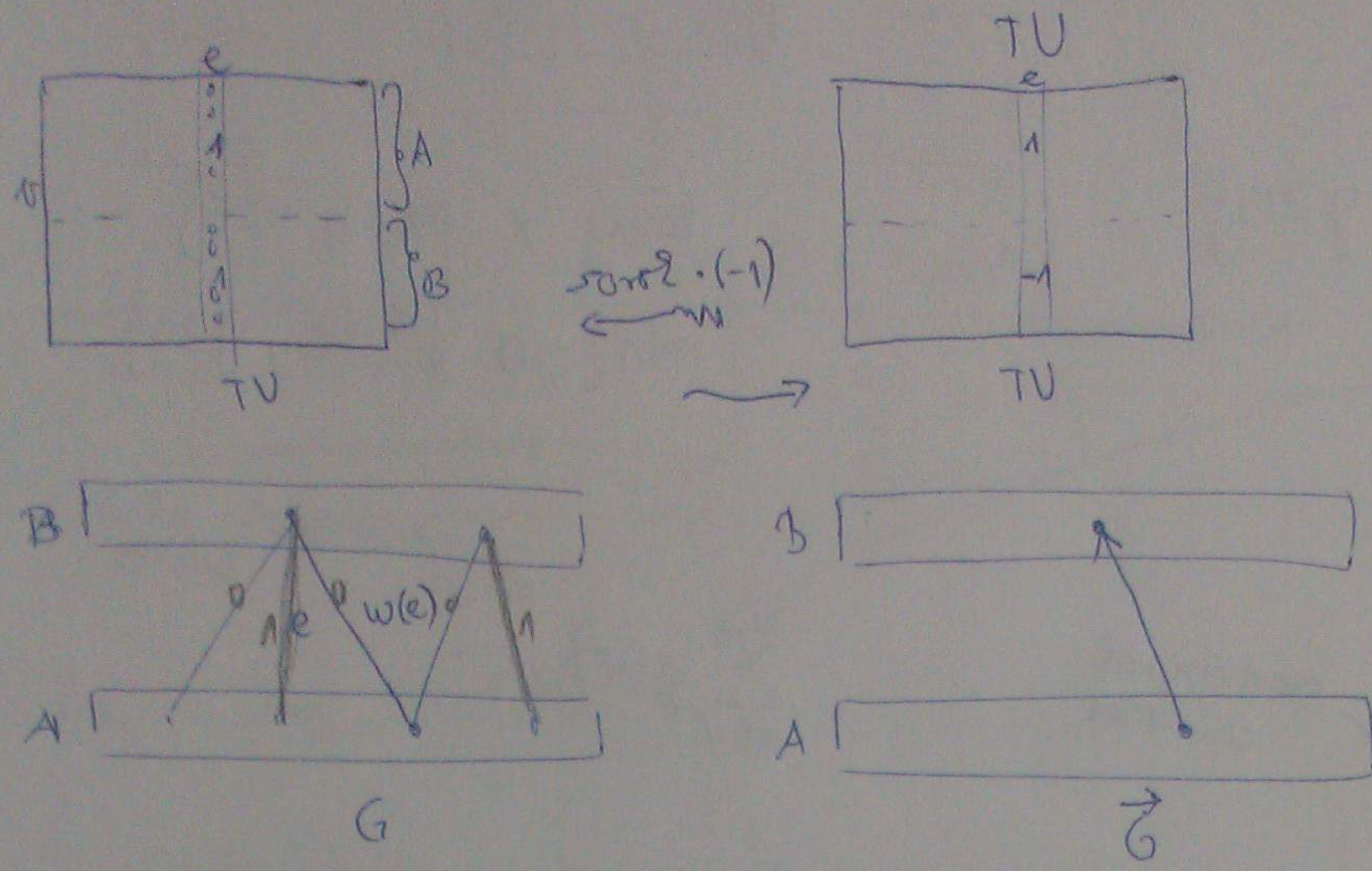
- $\forall i = 1 \dots k$ $\quad \sum_{v \xrightarrow{e}} x_i(e) = \sum_{\xrightarrow{e} v} x_i(e)$
  $\forall v \neq s_i, t_i$

- $\forall e \quad x_1(e) + x_2(e) + \dots + x_k(e) \leq c(e)$

$$\max \sum_{i=1}^{k} \left( \sum_{s_i \xrightarrow{e}} x_i(e) - \sum_{\xrightarrow{e} s_i} x_i(e) \right)$$

**Tétel:**

G páros gráf → B(G) illeszkedési mx.-a TU




Input: $G(A,B,E)$, $w: E \to \mathbb{R}$

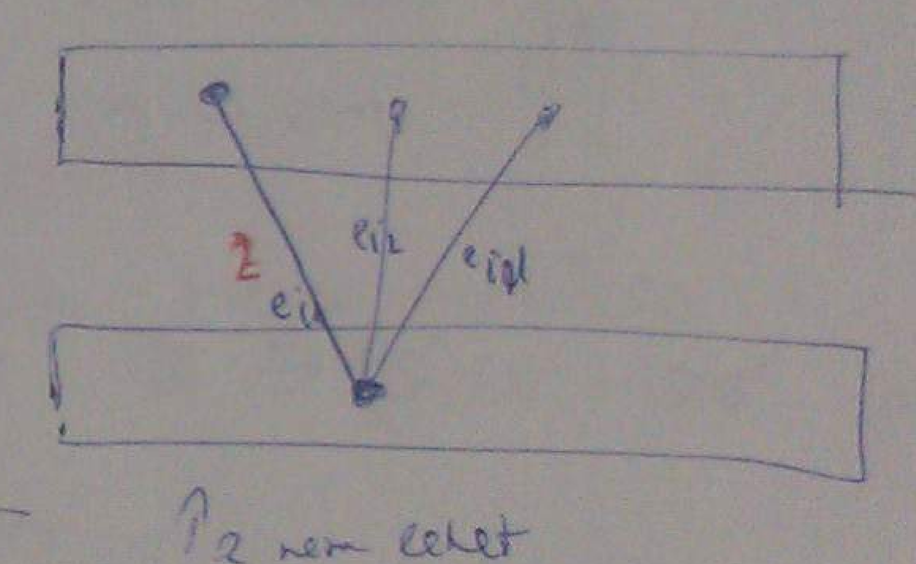
Output: max összsúlyú párosítás

IP feladat:

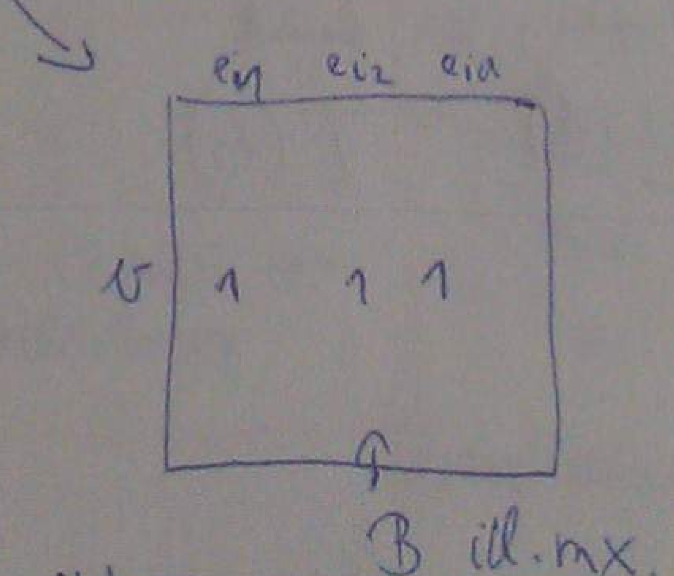
$$e \longrightarrow x(e) = \begin{cases} 1, & \text{ha } e \in \text{párosítás} \\ 0, & \text{ha } e \notin \text{— " —} \end{cases}$$

$\forall e: \quad 0 \le x(e) \le 1, \quad x(e)$: egész

$\forall v: \quad \sum_{v \sim e} x(e) \le 1 \quad$ ← ez miatt

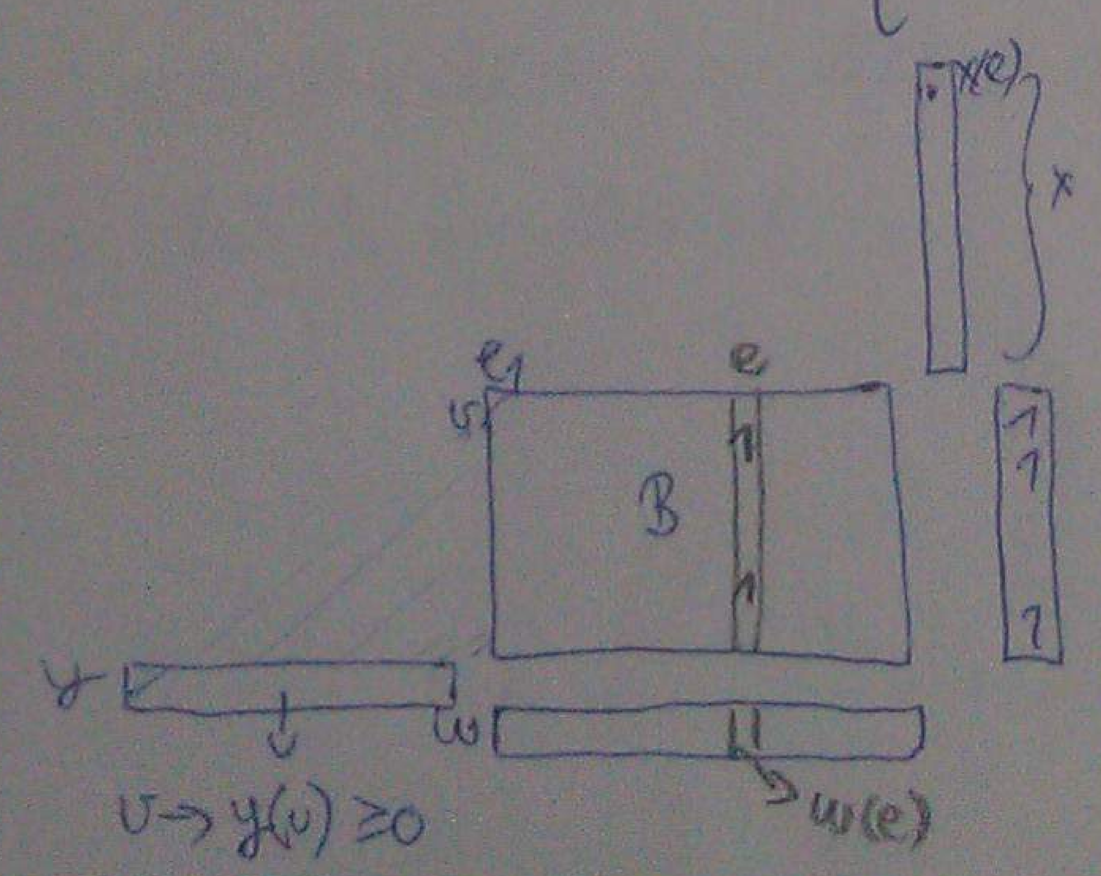



$\max \sum w(e) \cdot x(e)$




max összsúlyú párosítás = $\max\left\{ wx : Bx \le \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, x \ge 0, x \text{ egész} \right\} =$

TU alaptétel



$= \max\{wx : Bx \le \begin{pmatrix}1\\1\\ \vdots \\1\end{pmatrix}, x \ge 0\} =$

$\uparrow$ LP már

$TU \left\{ \begin{pmatrix} B \\ -E \end{pmatrix} \right. \quad \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$

$= \min\{ y\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} : yB \ge w \ , \ y \ge 0\}$

$\uparrow$ DLP

$\boxed{\begin{array}{l} \max\{cx : Ax \le b, x \ge 0\} \\ \min\{yb : yA \ge c, y \ge 0\} \end{array}}$

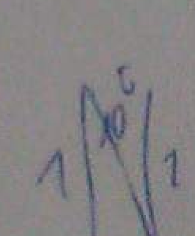
$e = \{a, b\}$

$y(a) + y(b) \ge w(e)$ ← egerváryi címkézés

$\sum_{v \in V} y(v)$ ← egerváryi felső becslés

Tétel: $G(A, B, E)$, $w : E \to \mathbb{R}$ (Egerváry Jenő)

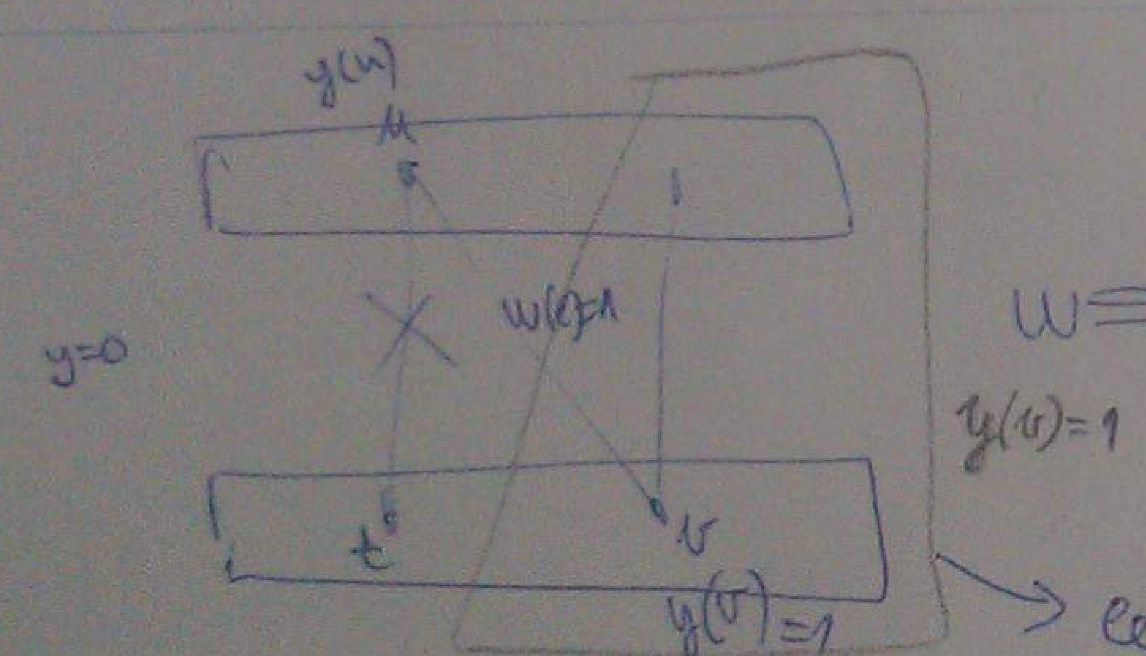
$\underbrace{\text{max összsúlyú párosítás összsúlya}}_{} = \underbrace{\text{min összegű, nem negatív címkézés összege}}_{}$



max ös. teljes ps. $10^6$ - lehet negatív címk.

max. ös. ps. 2 - nemnegatív —"—

Ha $\forall e$: $w(e) \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow$ min. összegű nem negatív címkézés választható egész ~~...~~ értékűnek is.



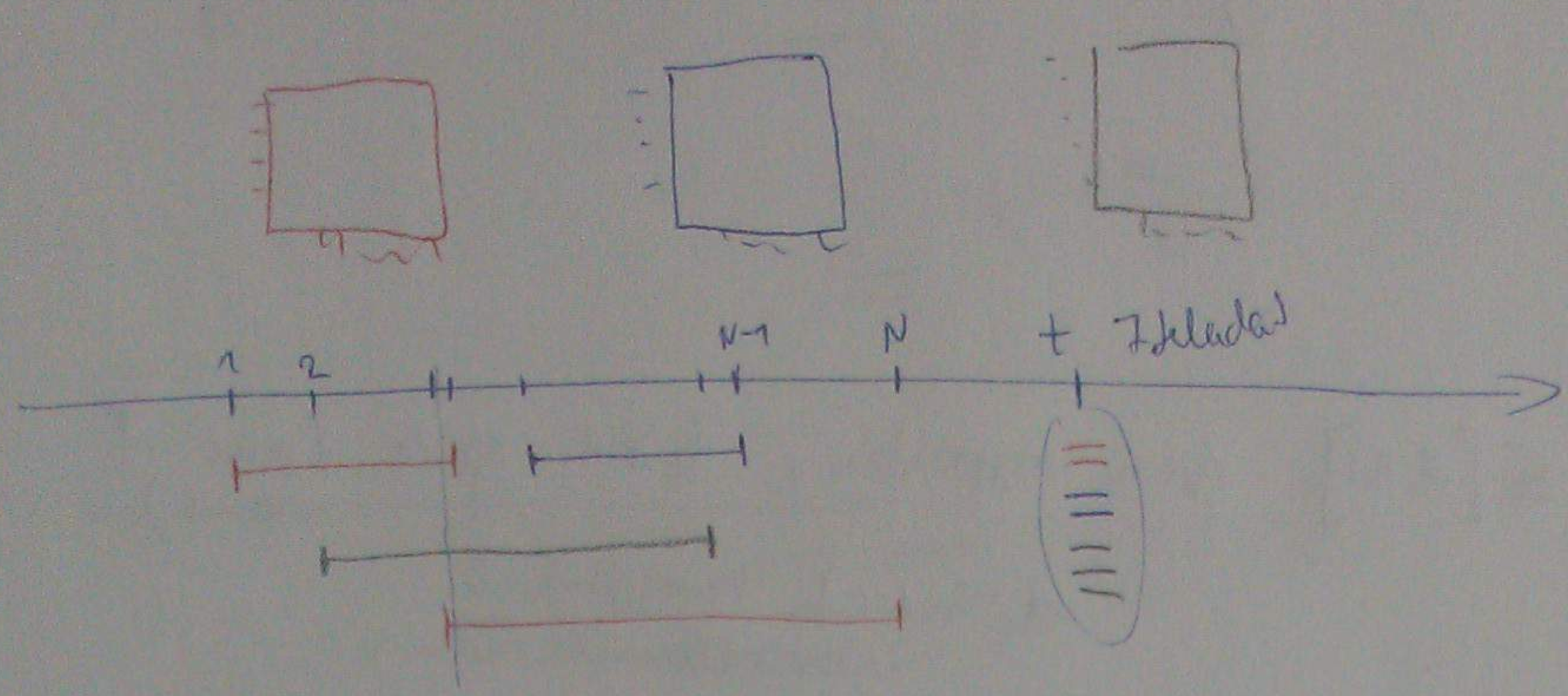

→ lefogó ponthalmaz

$w \equiv 1 \quad \underset{\sqcap}{\nu(G)} = \underset{\shortparallel}{\sqcup} \ \tau(G)$

min lefogó ponthalmaz

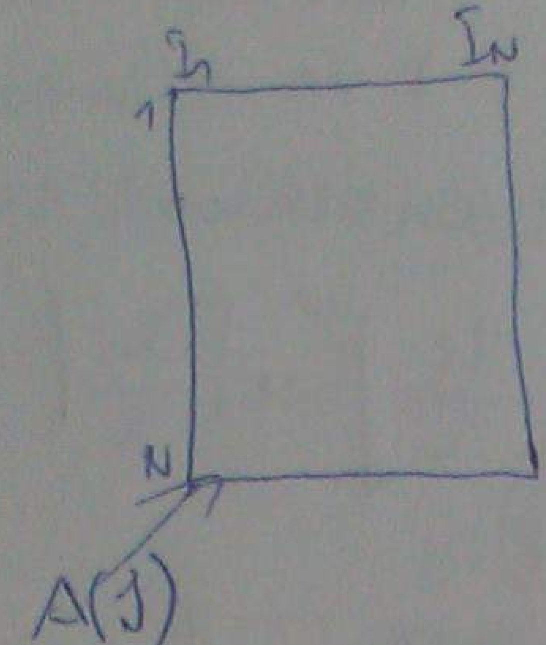
út él nem szabad

processzorok



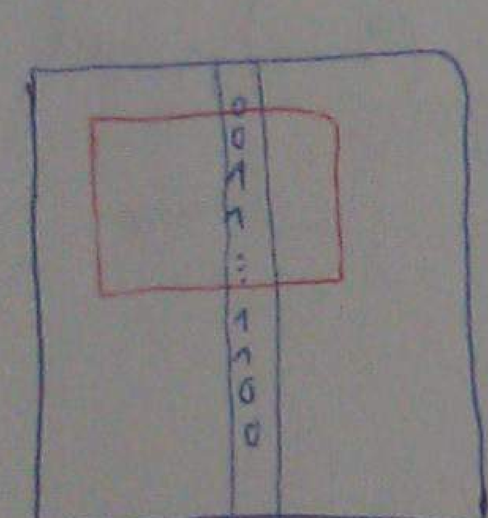

$J = \{I_1, I_2, \dots I_N\} \subseteq [1, N]$

$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ ha } i \in I_j \\ 0, \text{ ha } i \notin \end{cases}$




**Tétel**: A(J) TU

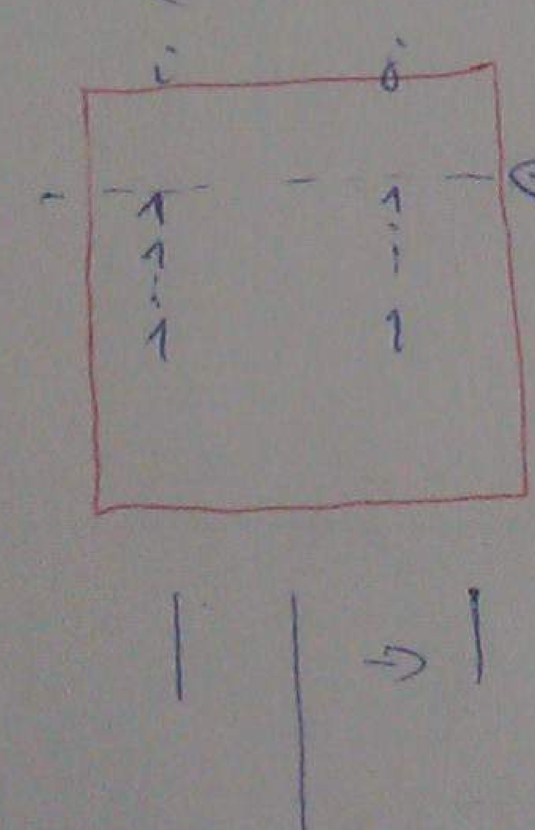
**Biz**:



négyzetes részmátrix

$\square$-ban lévő 1-esek számára teljes indukció (ha 0 db, 1 db, ✓)

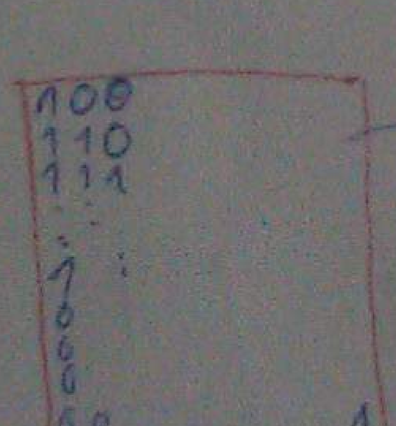
$\leq (k-1)$ db 1-esre igaz, $\overset{?}{\Rightarrow}$ k db 1-es




Ha van 0 oszlop $\Rightarrow$ det = 0 ✓

Ha van ilyen (két oszlop ahol az első egyes ugyanazon a pozícióban kezdődik) az egyikből (több 1-est tartalmazóból) a másikat kivonva ugyanilyen struktúrájú $\square$ $\Rightarrow$ indukcióval OK ✓

Ha egyik sem: oszlopátrendezés $\rightarrow$ előtte: det = ±1



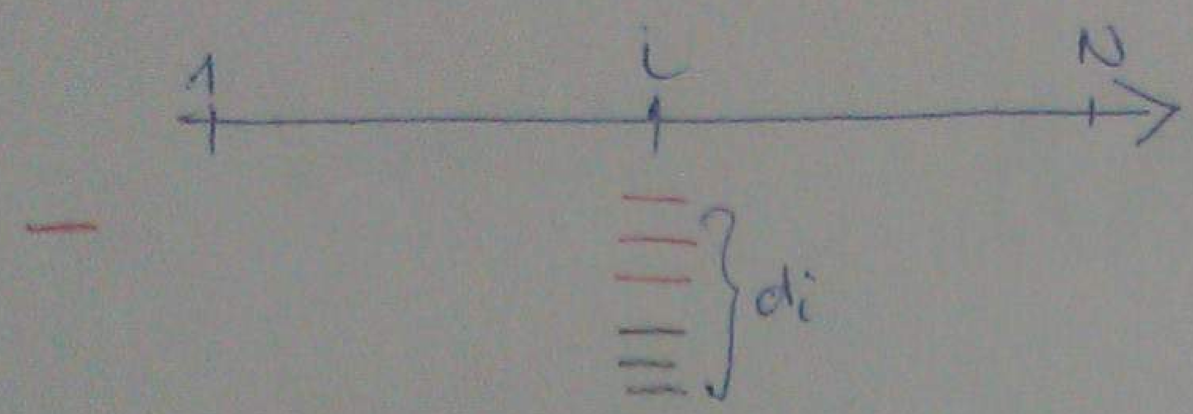
$\rightarrow$ alsó $\Delta$ mx. det = 1

Tfh. $Ax \le b$ megoldható (célfv. nincs), A TU, b egész $\Rightarrow$ $Ax \le b$-nek van egész mo.-a is.

biz: $c = 0$ ← célfv.

Tétel: $\mathcal{I} = \{I_1 \dots I_n\}$, $I_i \subseteq [1, N]$ egész végpontú, $k \ge 1$ egész (proc.-ok száma)

$d_i$: $i$-t tartalmazó intervallumok száma

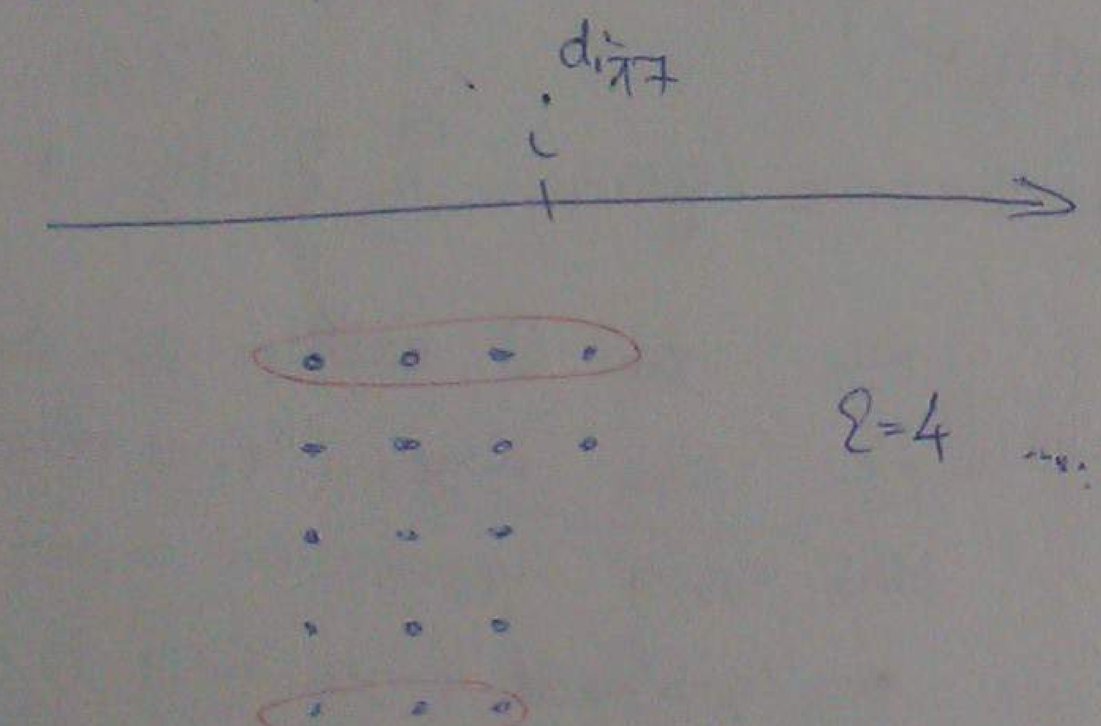



$\Rightarrow$ $\mathcal{I}$ tagjai megszínezhetők $k$ db színnel úgy, hogy $\forall 1 \le i \le N$ és $\forall c$ színre az $i$-t tartalmazó $c$ színű intervallumok száma $\left\lfloor \frac{d_i}{k} \right\rfloor$ v. $\left\lceil \frac{d_i}{k} \right\rceil$

Biz: elég: $\exists\, \mathcal{I}_1 \subseteq \mathcal{I}$ úgy, hogy $\forall\, 1 \le i \le N$ esetén $\mathcal{I}_1$-beli $i$-t tartalmazó intervallumok száma $\left\lfloor \frac{d_i}{k} \right\rfloor$ v. $\left\lceil \frac{d_i}{k} \right\rceil$

ha ez igaz: $\mathcal{I}_1$-et elhagyom, a maradékra ugyanez $(k-1)$-gyel stb.

$k = 5$

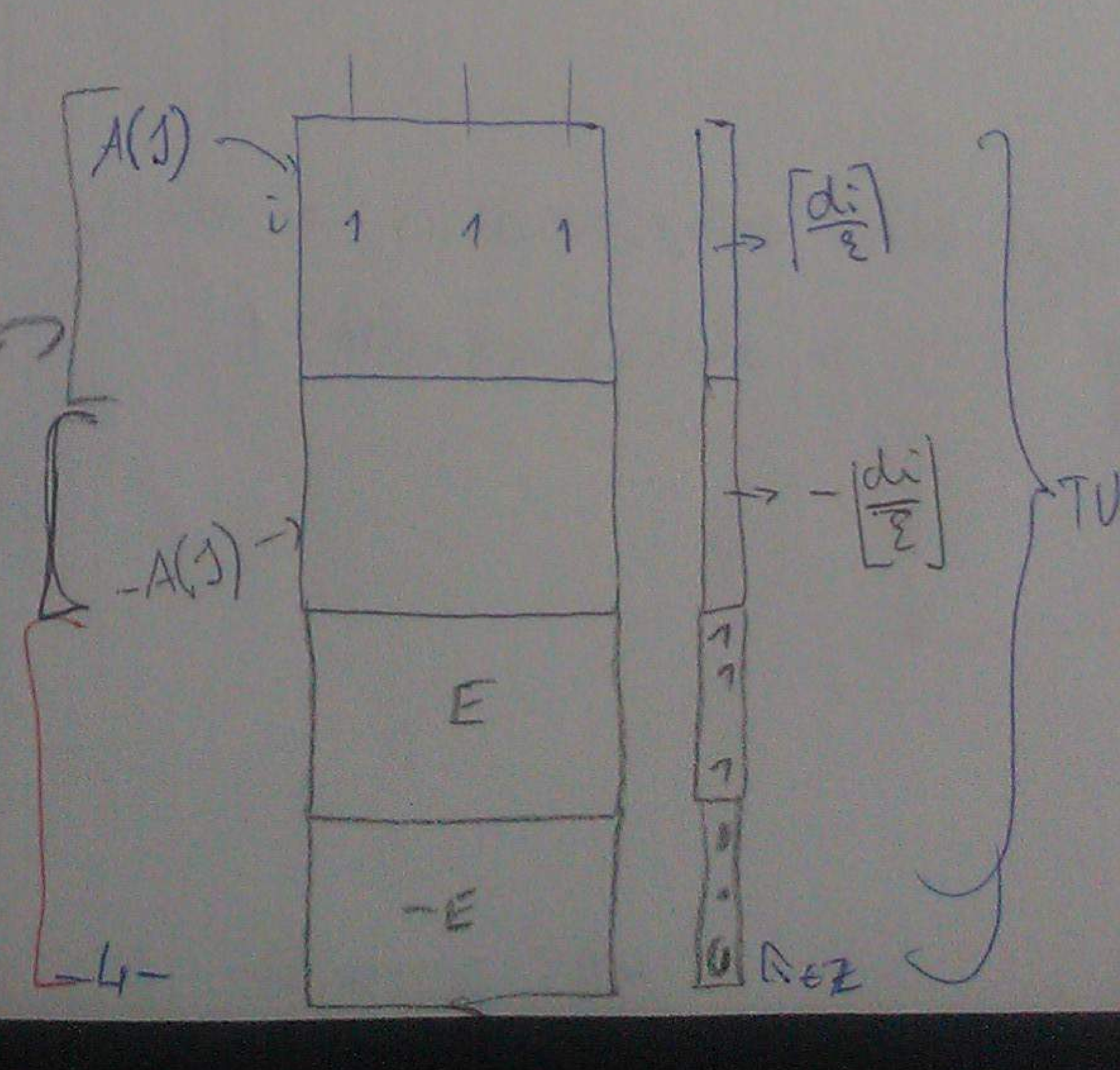



$k = 4$ ...

$$I_j \to x_j = \begin{cases} 1, & \text{ha } I_j \in \mathcal{I}_1 \\ 0, & \text{ha } I_j \notin \mathcal{I}_1 \end{cases}$$

$\forall j$ $\boxed{0 \le x_j \le 1}$, $x_j$ egész

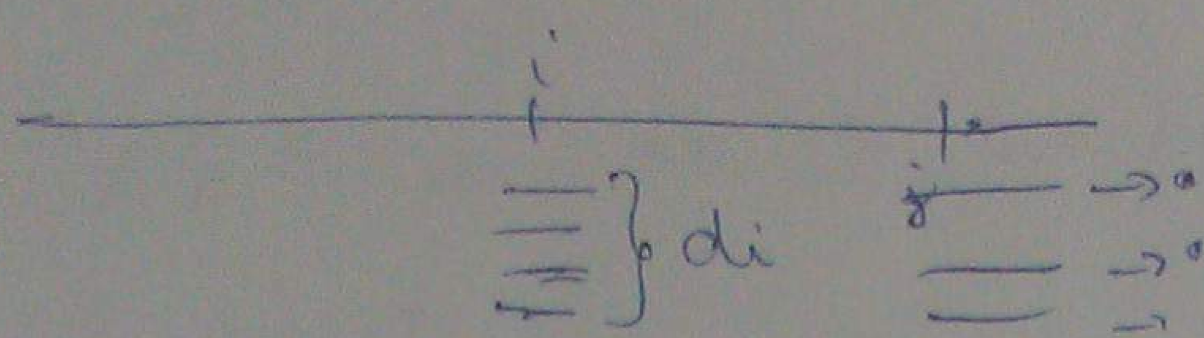
$\forall\, 1 \le i \le N$: $\left\lfloor \frac{d_i}{k} \right\rfloor \le \sum_{i \in I_j} x_j \le \left\lceil \frac{d_i}{k} \right\rceil$



$\forall j$-re:
$x_j = \frac{1}{k}$ $\hookrightarrow$

$$\sum_{i \in I_j} 1 = d_i$$

$$\sum 1/k = \frac{d_i}{k}$$

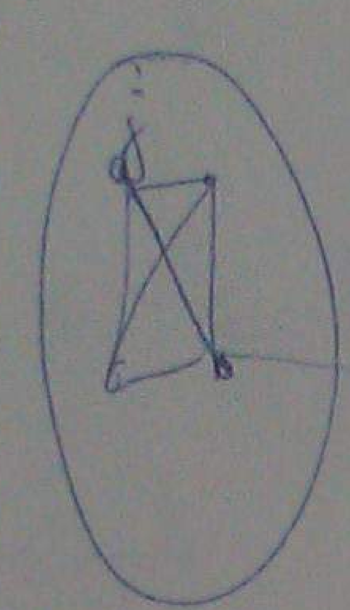



$k = \max d_i$ $\quad$ $\lfloor \frac{d_i}{k} \rfloor$ $\quad$ $0 \le \frac{d_i}{k} \le 1$

intervallumgráf

$\chi(G)$

$\shortparallel \leftarrow$ intervallumgráfban




$\omega(G)$
klikk

$\boxed{IP \xrightarrow{TU} LP_{\text{polinom}}}$ kivéve