1. Zárthelyi A2 2009 tavasz

1. Legyen L tetszőleges véges dimenziós lineáris tér és $L_1 \subseteq L$ valódi altere L-nek (azaz $L_1 \neq L$). Mutassa meg, hogy $\dim L_1 < \dim L$.

2. Van-e megoldása, és ha igen hány, az alábbi egyenletrendszereknek?

(a)
$$\begin{aligned} -2x + y - z &= 2 \\ 2x + 2y + 2z &= -2 \\ -x - y - 2z &= 1 \end{aligned}$$
$\emptyset$ 1

(b)
$$\begin{aligned} -2x + y - z &= 2 \\ 2x + 2y + 2z &= -2 \\ -x - y - z &= 1 \end{aligned}$$
∞

(c)
$$\begin{aligned} -2x + y - z &= 2 \\ 2x + 2y + 2z &= -2 \\ -x - y - z &= 2 \end{aligned}$$
$\emptyset$

3. Legyen $\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ és $\underline{\underline{\mathbf{B}}} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Mind $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ mind $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$ esetén határozza meg az összes olyan 2×2-es $\underline{\underline{\mathbf{X}}}$ mátrixot, amellyel jobbról szorozva
(a) nullmátrixot
(b) egységmátrixot
kapunk!

4. Mutassa meg, hogy a síkbeli $+\pi/4$ szöggel való elforgatás kielégíti az $\mathbf{A}^2 - \sqrt{2}\mathbf{A} + \mathbf{I} = 0$ másodfokú operátoregyenletet (ahol $\mathbf{I}$ az identitás a síkon).

5. Határozza meg az $\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ mátrix sajátértékeit és -vektorait!

6. Legyenek $L_1, L_2 \subseteq L$ lineáris terek, $a \in L, a \notin L_1, a \in L_2, a \neq 0$. Lineáris alterei-e L-nek az alábbiak:
(a) $L_1 \cup L_2$
(b) $L_1 \cap L_2$
(c) $L \setminus L_1$
(d) $L_1(a) = \{x \in L : \text{ van } y \in L_1, \text{ hogy } x = a + y\}$
(e) $L_2(a) = \{x \in L : \text{ van } y \in L_2, \text{ hogy } x = a + y\}$