ANALÍZIS(2)
Mérnök Informatikus szak

VIZSGADOLGOZAT

2009. jan. 7.
Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

1. feladat (13 pont)

a) Írja fel az elsőrendű homogén lineáris differenciálegyenlet általános alakját és oldja meg!
b) A homogén vagy az inhomogén differenciálegyenlet megoldásai alkotnak lineáris teret? Hány dimenziós ez a lineáris tér?

a.) $y' + g(x)\,y = 0 \qquad g \in C^0_{[\alpha,\beta]}$

$(\, y(x_0) = y_0 , \quad x_0 \in (\alpha,\beta) , \quad y_0 \in \mathbb{R} \,)$

(H) megoldása:

$y' + g(x) \cdot y = 0$ (szeparábilis differenciálegyenlet)

$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -g(x) \cdot y$ $\quad y \equiv 0$ megoldás

Ha $y \neq 0$: $\quad \int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\int g(x)\,\mathrm{d}x\,.$

Jelöljük g primitív függvényét G-vel! (G létezik g folytonossága miatt.) Ekkor

$$\ln|y| = -G(x) + C_1$$

$$|y| = \mathrm{e}^{C_1}\,\mathrm{e}^{-G(x)} = K\,\mathrm{e}^{-G(x)}\,, \quad K > 0$$

$$\left.\begin{array}{ll} y>0: & y = K\,\mathrm{e}^{-G(x)} \\ y<0: & y = -K\,\mathrm{e}^{-G(x)} \\ & (K>0) \\ \text{és} & y \equiv 0 \text{ is megoldás.} \end{array}\right\} \Longrightarrow y = C\,\mathrm{e}^{-G(x)}\,, \quad C \in \mathbb{R}$$

az általános megoldás.
A megoldást azon az (α,β) intervallumon kaptuk meg, ahol g folytonos.

Ha $y(x_0) = y_0 \implies y_0 = C\,\mathrm{e}^{-G(x_0)}$-ból C egyértelműen meghatározható.

b.) A homogén lineáris elsőrendű de. megoldásai egydimenziós lineáris teret alkotnak.

an2v-090107/1.

2. feladat (10 pont)

a) Írja le a numerikus sorokra vonatkozó hányadoskritérium limeszes alakját!

b) Konvergens-e az alábbi sor:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)^n}{(n+1)!}$$

a.) $\boxed{3}$ $a_n > 0$; $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = c$

Ha $(0\leq) c < 1$: $\sum^{\infty} a_n$ konv.

$c > 1$ vagy $c = \infty$: $\sum^{\infty} a_n$ div

$c = 1$: ?

b.) $\boxed{7}$ $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+3)^{n+1}}{(n+2)!} \frac{(n+1)!}{(n+2)^n} = \frac{n+3}{n+2} \left(\frac{n+3}{n+2}\right)^n =$ (2)

$= \frac{1+\frac{3}{n}}{1+\frac{2}{n}} \frac{\left(1+\frac{3}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n} \longrightarrow 1 \cdot \frac{e^3}{e^2} = e > 1$ (4)

$\Rightarrow \sum^{\infty} a_n$ div. (1)

3. feladat (8 pont)

a) Mit nevezünk az f függvény x_0 bázispontú, n-edrendű Taylor polinomjának, illetve a hozzá tartozó Lagrange féle maradéktagjának?

b) Mondja ki a függvény és Taylor sorának megegyezésére tanult elégséges tételt!

a.) (D) A legalább n-szer differenciálható f függvény x_0 bázispontú n-edrendű Taylor polinomja:

$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)^1 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$

Lagrange-féle alakban felírt maradéktag

(T)

Ha f legalább $(n+1)$-szer differenciálható $K_{x_0,\delta}$- ban és $x \in K_{x_0,\delta}$, akkor $\exists\, \xi \in (x_0, x)$ (ill. $\xi \in (x, x_0)$), hogy $$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

an2v-090107/2.

b.)

Elégséges tétel $f(x) = T(x)$ fennállására:

Ⓣ Ha f akárhányszor differenciálható $(-R, R)$-en és $f,\ f',\ f'', \dots, f^{(n)}, \dots$ deriváltfüggvények egyenletesen korlátosak itt, akkor

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k \qquad x \in (-R, R)\text{-en.}$$

4. feladat (11 pont)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{1+7x^3}}$$

a) Határozza meg az f függvény $x_0 = 0$ körüli Taylor sorát és annak konvergenciasugarát! Írja fel az első négy nem nulla tagot elemi műveletekkel!

b) $f^{(15)}(0) = ?$

a.) $f(x) = (1+7x^3)^{-1/4} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/4}{n} (7x^3)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/4}{n} 7^n x^{3n}$ (3)

$|7x^3| = 7|x|^3 < 1 \Rightarrow |x| < \frac{1}{\sqrt[3]{7}} = R$ (3)

$f(x) = 1 + \frac{-1/4}{1}\, 7\, x^3 + \frac{(-\frac{1}{4})(-\frac{5}{4})}{2!}\, 7^2 x^6 + \frac{(-\frac{1}{4})(-\frac{5}{4})(-\frac{9}{4})}{3!}\, 7^3 x^9 + \dots$ (2)

b.) $a_{15} = \frac{f^{(15)}(0)}{15!}$: x^{15} együtthatója

$\Rightarrow f^{(15)}(0) = 15!\, a_{15} = 15! \binom{-1/4}{5} 7^5$ (3)

5. feladat (6 pont)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2+3y^2}{4x^2+15y^2} = ?$$

$\lim_{x\to 0} \lim_{y\to 0} \frac{2x^2+3y^2}{4x^2+15y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\cancel{x^2}}{4\cancel{x^2}} = \frac{1}{2}$

$\lim_{y\to 0} \lim_{x\to 0} \frac{2x^2+3y^2}{4x^2+15y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{3\cancel{y^2}}{15\cancel{y^2}} = \frac{1}{5} \neq \frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \dots \nexists$

an2v090107/3.

6. feladat (12 pont)

$$f(x,y) = 3y + e^{xy^2} + \operatorname{arctg}\frac{x}{y}\,, \qquad P_0\,(0,1)$$

a) $f'_x(x,y) = ?$; $f'_y(x,y) = ?$, $\quad$ grad $f(P_0) = ?$

b) Írja fel az f függvény P_0 pontbeli érintősíkjának egyenletét!

a.) Ha $y \neq 0$:

$f'_x = y^2 e^{xy^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\,\frac{1}{y}$ (3)

$f'_y = 3 + 2xy\,e^{xy^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\,\frac{-x}{y^2}$ (3)

$f'_x(P_0) = 2\,,\quad f'_y(P_0) = 3$

$\operatorname{grad} f(P_0) = 2\underline{i} + 3\underline{j}$ (2)

b.) $f'_x(P_0)(x-x_0) + f'_y(P_0)(y-y_0) - (z - f(P_0)) = 0$ (2)

$f(P_0) = 4$

$2(x-0) + 3(y-1) - (z-4) = 0$ (2)

7. feladat (16 pont)*

a) Írja le polárkoordinátákkal a T tartományt!

$T = \{(x,y):\ 1 \le x^2 + y^2 \le 9\,;\ x \le 0\,;\ y \ge 0\}$

b) Írja fel a Jacobi determinánst polártranszformáció esetére és határozza meg az értékét!

c)

$$\iint_T \frac{1}{(2x^2+2y^2+5)^6}\,\mathrm{d}T = ?$$

a.) $\boxed{4}$

$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \end{aligned}\right\}$ (2) $\qquad \left.\begin{aligned} 1 \le\ & r \le 3 \\ \tfrac{\pi}{2} \le\ & \varphi \le \pi \end{aligned}\right\}$ (2)

b.) $\boxed{5}$

$J = \det \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} x'_r & x'_\varphi \\ y'_r & y'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} =$

$= r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r$

an2v 090107/4.

c.) [7] $\int_1^3 \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{1}{(2r^2+5)^6}\, r \, d\varphi \, dr = \left(\pi - \frac{\pi}{2}\right) \frac{1}{4} \int_1^3 4r\,(2r^2+5)^{-6} \, dr =$ (3) (1) $f' f^{-6}$

$= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{4} \, \frac{(2r^2+5)^{-5}}{-5} \Big|_1^3 = -\frac{\pi}{40} \left(\frac{1}{23^5} - \frac{1}{7^5} \right)$ (3)

8. feladat (9 pont)*

$$f(z) = u(x,y) + j\, v(x,y)$$

a) Írja le a Cauchy-Riemann parciális differenciálegyenleteket!
b) $f'(z) = ?$ Adjon két különböző képletet a parciális deriváltakkal!
Tudjuk, hogy a $v(x,y) = x^3 - 3xy^2 + 3y$ egy reguláris f függvény imaginárius része.
$f'(-1+2j) = ?$

a.) $u'_x = v'_y$ és $u'_y = -v'_x$ (3)

b.) $f'(z) = u'_x + j v'_x = v'_y + j v'_x$ (2)

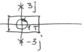
$f'(-1+2j) = v'_y(-1,2) + j\, v'_x(-1,2) = (-6xy+3)\big|_{x=-1,\, y=2} + j\,(3x^2 - 3y^2)\big|_{x=-1,\, y=2} =$

$= 15 + j(-9)$ (4)

9. feladat (15 pont)*
Adja meg az alábbi integrálok valós és képzetes részét!

a) $\oint_{|z|=1} \frac{\sin z}{z^2+9}\, dz = ?$ b) $\oint_{|z|=6} \frac{\sin z}{z^2+9}\, dz = ?$

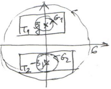
a.) $I_a = 0$, mert az integrandus reguláris T-n.
[3] (Cauchy-féle alaptétel.)
$\mathrm{Re}\, I_a = \mathrm{Im}\, I_a = 0$



b.) $\oint_G \ldots = \oint_{G_1} \ldots + \oint_{G_2} \ldots =$ (2)

$= \oint_{G_1} \frac{\frac{\sin z}{z+3j}}{z-3j}\, dz + \oint_{G_2} \frac{\frac{\sin z}{z-3j}}{z+3j}\, dz =$ (4)

reg T_1-en, reg T_2-n



$= 2\pi j \, \frac{\sin z}{z+3j}\Big|_{z=3j} + 2\pi j \, \frac{\sin z}{z-3j}\Big|_{z=-3j} =$ (2)

$= 2\pi j \left(\frac{\sin 3j}{6j} + \frac{\sin(-3j)}{-6j} \right) = 2\pi j \cdot 2\, \frac{\mathrm{sh}\,3}{6} = j\, \frac{2\pi\, \mathrm{sh}\,3}{3}$

$\mathrm{Im}\, I_b = \frac{2\pi\, \mathrm{sh}\,3}{3}$; $\mathrm{Re}\, I_b = 0$ (4)

an2v-090107/5.

Pótfeladatok. Csak az elégséges és a közepes vizsgajegy eléréséhez javítjuk ki.

10. feladat (10 pont)

Adja meg az

$$y'' - 7y' + 10y = 10x + 8e^{-x}$$

differenciálegyenlet összes megoldását!

$H: \quad \lambda^2 - 7\lambda + 10 = (\lambda-2)(\lambda-5) = 0 \qquad \lambda_1 = 2, \ \lambda_2 = 5$

$y_H = C_1 e^{2x} + C_2 e^{5x}$ (4)

$10 \cdot \, | \, y_{ip} = Ax + B + Ce^{-x}$

$-7 \cdot \, | \, y_{ip}' = A - Ce^{-x}$

$1 \cdot \, | \, y_{ip}'' = C e^{-x}$

$e^{-x}(10C - 7C + C) + x(10A) + (10B - 7A) = 10x + 8e^{-x}$

$\Rightarrow C = 2, \ A = 1, \ B = \frac{7}{10}$

$y_{ip} = x + \frac{7}{10} + 2e^{-x}$ (4)

$y_{ia} = y_H + y_{ip} = \dots$ (2)

11. feladat (10 pont)

$$f(x) = \frac{1}{x-5}$$

Írja fel az f függvény origó körüli, valamint $x_0 = 2$ körüli Taylor sorait és azok konvergenciasugarait!

$x_0 = 0: \quad f(x) = -\frac{1}{5} \frac{1}{1-\frac{x}{5}} = -\frac{1}{5} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{5}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{5^{n+1}} x^n$ (2)

$\left|\frac{x}{5}\right| < 1 \Rightarrow |x| < 5 \qquad R_1 = 5$ (2)

$x_0 = 2: \quad f(x) = \frac{1}{(x-2)-3} = -\frac{1}{3} \frac{1}{1-\frac{x-2}{3}} = -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x-2}{3}\right)^n =$

$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{3^{n+1}} (x-2)^n$ (4)

$\left|\frac{x-2}{3}\right| < 1 \Rightarrow |x-2| < 3 \qquad R_2 = 3$ (2)