1. feladat (18 pont)
Hol és milyen típusú szakadása van az alábbi függvénynek?

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x+3)}{x^2-x-12}, & \text{ha } x \le 0 \\[2ex] \dfrac{3\operatorname{ch}(x^2)}{x-2}, & \text{ha } x > 0 \end{cases}$$

Mo. A függvény folytonos függvények kompozíciója, így a nevező zérushelyeiben, tehát az $x=-3$, $x=2$ pontban van, és az $x=0$ pontban lehet szakadása **(3p)** . ($x=4$ esetén nincs baj, hiszen máshogy van értelmezve a függvény.)

$$\lim_{x\to -3\pm} f(x) = \lim_{x\to -3\pm} \frac{\sin(x+3)}{(x+3)} \cdot \frac{1}{x-4} = 1 \cdot \frac{1}{-7}, \,\textbf{(3p)}$$

vagyis ebben a pontban a függvénynek megszüntethető szakadása van. **(2p)**

$$\lim_{x\to 2\pm} f(x) = \lim_{x\to 2\pm} \frac{3\operatorname{ch}(x^2)}{x-2} = \pm\infty, \,\textbf{(3p)}$$

vagyis ebben a pontban a függvénynek másodfajú szakadása van. **(2p)**

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = f(0) = \frac{\sin 3}{-12} \neq -\frac{3}{2} = \frac{3\operatorname{ch}(0^2)}{0-2} = \lim_{x\to 0+} \frac{3\operatorname{ch}(x^2)}{x-2}, \,\textbf{(3p)}$$

így az $x=0$ pontban véges ugrása van a függvénynek. **(2p)**

---

2. feladat (5+10=15 pont)
a) Írja le egy f függvény x_0 pontbeli deriváltjának definícióját!
b) A definíció alapján számolja ki az $f(x) = \sqrt{2x+3}$ függvény deriváltját az $x_0 = 3$ pontban!

Mo. *a*) Tegyük fel, hogy x belső pontja az f függvény értelmezési tartományának, ekkor $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$, amennyiben létezik véges határérték **(5p)** .

b) $$f'(3) \overset{\textbf{(2p)}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{2(3+h)+3}-3}{h} \overset{\textbf{(2p)}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{9+2h}-3}{h} =$$

$$\overset{\textbf{(2p)}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{9+2h-9}{(\sqrt{9+2h}+3)h} \overset{\textbf{(2p)}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{2}{\sqrt{9+2h}+3} \overset{\textbf{(2p)}}{=} \frac{1}{3}.$$

3. feladat (12+10+10=32 pont)
Számolja ki az alábbi határértékeket!

$a)$ $\lim\limits_{x\to 0+}(\sin x)^x$ $b)$ $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\operatorname{ch}(4x+3)}{\operatorname{sh}(2-4x)}$ $c)$ $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\arcsin(3x+9)}{\operatorname{tg}(-6-2x)}$

Mo. $a)$ 0^0 típusú határérték **(1p)** :

$$\lim_{x\to 0+}(\sin x)^x \overset{(\mathbf{1p})}{=} \lim_{x\to 0+}\left(e^{\ln\sin x}\right)^x \overset{(\mathbf{1p})}{=} \lim_{x\to 0+} e^{x\ln\sin x} \overset{(\mathbf{1p})}{=} e^{\lim_{x\to 0+} x\ln\sin x} \overset{(\mathbf{1p})}{=} 1,$$

mert

$$\lim_{x\to 0+} x\ln\sin x \overset{(\mathbf{2p})}{=} \lim_{x\to 0+}\frac{\ln\sin x}{\frac{1}{x}} \overset{(\mathbf{2p})}{=} \lim_{x\to 0+}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{-1}{x^2}} =$$

$$\overset{(\mathbf{1p})}{=} \lim_{x\to 0+}\frac{-x^2\cos x}{\sin x} \overset{(\mathbf{1p})}{=} -\lim_{x\to 0+} x\cos x\frac{x}{\sin x} \overset{(\mathbf{1p})}{=} 0$$

$b)$ A függvények definíciója szerint

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{\operatorname{ch}(4x+3)}{\operatorname{sh}(2-4x)} \overset{(\mathbf{3p})}{=} \lim_{x\to -\infty}\frac{e^{4x+3}+e^{-4x-3}}{e^{2-4x}-e^{4x-2}} \overset{(\mathbf{3p})}{=} \lim_{x\to -\infty}\frac{e^{-4x}}{e^{-4x}}\cdot\frac{e^{8x+3}+e^{-3}}{e^2-e^{8x-2}} \overset{(\mathbf{3p})}{=} \frac{e^{-3}}{e^2} \overset{(\mathbf{1p})}{=} e^{-5}.$$

$c)$ $\frac{0}{0}$ típusú határérték, így használható a L'Hospital-szabály **(1p)**

$$\lim_{x\to -3}\frac{\arcsin(3x+9)}{\operatorname{tg}(-6-2x)} \overset{(\mathbf{6p})}{=} \lim_{x\to -3}\frac{\frac{3}{\sqrt{1-(3x+9)^2}}}{\frac{-2}{\cos^2(-6-2x)}} \overset{(\mathbf{3p})}{=} -\frac{3}{2}.$$

4. feladat (17 pont)
Határozza meg az $f(x)=3\pi-\arccos(7-4x)$ függvény értelmezési tartományát, értékkészletét, igazolja, hogy a függvény invertálható, majd adja meg a függvény inverzét, annak értelmezési tartományát és értékkészletét!

Mo. $D_{\text{arccos}}=[-1,1]$, így $-1\le 7-4x\le 1 \iff -8\le -4x\le -6 \iff 2\ge x\ge \dfrac{3}{2}$, így $D_f=\left[\dfrac{3}{2},2\right]$ **(3p)** . $R_{\text{arccos}}=[0,\pi]$, így $R_f=[2\pi,3\pi]$ **(2p)** .

$$f'(x)=\frac{-4}{\sqrt{1-(7-4x)^2}}<0, (\mathbf{3p})$$

így a függvény szigorúan monoton csökkenő, vagyis invertálható **(2p)** .

$$y = 3\pi - \arccos(7-4x) \iff 3\pi - y = \arccos(7-4x) \iff$$
$$\iff \cos(3\pi - y) = 7 - 4x \iff \frac{7-\cos(3\pi-y)}{4} = x(\mathbf{4p}),$$

tehát $f^{-1}(x) = \dfrac{7-\cos(3\pi-x)}{4}$ **(1p)** , és $D_{f^{-1}} = R_f = [2\pi, 3\pi]$ **(1p)** és $R_{f^{-1}} = D_f = \left[\dfrac{3}{2}, 2\right]$ **(1p)** .

---

5. feladat (18 pont)
Melyek azok a legbővebb intervallumok, amelyeken az $f(x) = (x-1)\,\mathrm{arctg}(x+1)$ függvény konvex, illetve konkáv? Hol vannak inflexiós pontjai a függvénynek?

Mo. $D_f = \mathbb{R}$ **(1p)** , és

$$f''(x) \overset{(\mathbf{3p})}{=} \left(\mathrm{arctg}(x+1) + \frac{x-1}{1+(x+1)^2}\right)' =$$
$$\overset{(\mathbf{4p})}{=} \frac{1}{1+(x+1)^2} + \frac{1+(x+1)^2 - 2(x-1)(x+1)}{\left(1+(x+1)^2\right)^2} =$$
$$\overset{(\mathbf{2p})}{=} \frac{2+2(x+1)^2 - 2(x-1)(x+1)}{\left(1+(x+1)^2\right)^2} \overset{(\mathbf{2p})}{=} \frac{4x+6}{\left(1+(x+1)^2\right)^2},$$

így $f''\left(-\dfrac{3}{2}\right) = 0$, $f''(x) < 0$, ha $x < -\dfrac{3}{2}$, $f''(x) >$, ha $x > -\dfrac{3}{2}$ **(3p)** , vagyis a függvény a $\left(-\infty, -\dfrac{3}{2}\right)$ intervallumon konkáv, **(1p)** , az $\left(-\dfrac{3}{2}, \infty\right)$ intervallumon konvex **(1p)** , és a $-\dfrac{3}{2}$ pontban inflexiós pontja van **(1p)** .

IMSC feladat (8 IMSC pont)
Az egységnyi oldalú szabályos háromszögnek levágjuk az egyik sarkát úgy, hogy a levágott rész egy $x \in (0,1)$ oldalú szabályos háromszög. Milyen x-re maximális a $T(x)/K(x)$ mennyiség, ahol $T(x)$ a megmaradt trapéz területe, $K(x)$ pedig a kerülete? (Bizonyítás nélkül elfogadjuk, hogy a vizsgált függvénynek maximuma van a vizsgált szakaszon.)

Mo. $T(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}(1-x^2)$ **(1p)** , $K(x) = 3 - x$ **(1p)** , így

$$\left(\frac{T}{K}\right)'(x) = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{-2x(3-x)+1-x^2}{(3-x)^2} \quad (\mathbf{3p}).$$

Ez a függvény a $(0,1)$ intervallumon deriválható, tehát csak a derivált zérushelyeinél lehet szélsőértéke. A nevező pozitív, a számláló gyökei: $3 \pm \sqrt{8}$ **(2p)** . A két gyök közül a $3 - \sqrt{8}$ érték esik a $(0,1)$ intervallumba **(1p)** .
