ANALÍZIS(1)
Mérnök Informatikus szak

VIZSGADOLGOZAT

2011. jún. 6.
Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

1. feladat (7+9=16 pont)

a) Mondja ki és bizonyítsa be a számsorozatokra vonatkozó rendőrelvet!

b) $b1)\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+4}{2n^2+2}\right)^{2n^2}=?$ $\qquad b2)\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+4}{2n^2+2}\right)^{2n}=?$

a.) $\boxed{7}$

(T)

$$\boxed{\begin{pmatrix} a_n\to A & \text{és} & a_n\le c_n\le b_n \\ b_n\to A & & \forall n\in\mathbb{N}\end{pmatrix} \implies (c_n\to A)}$$

2

(M) A tétel állítása most is igaz marad, ha a $\forall n\in\mathbb{N}$ feltétel helyett a gyengébb $\forall\, n>N_1$ ($\exists$ ilyen N_1) feltételt használjuk.

(B) A feltételek miatt:

Ha $n>N_a(\varepsilon)$: $A-\varepsilon<a_n<A+\varepsilon$ és $A-\varepsilon<b_n<A+\varepsilon$, ha $n>N_b(\varepsilon)$.

$N(\varepsilon):=\max\{N_a(\varepsilon),N_b(\varepsilon)\}$.

Ha $n>N(\varepsilon)$, akkor az előzőek miatt:

$$A-\varepsilon<a_n\le c_n\le b_n<A+\varepsilon.$$

Tehát, ha $n>N(\varepsilon)$

$$A-\varepsilon<c_n<A+\varepsilon \implies |c_n-A|<\varepsilon.$$

5

Vagyis $c_n\to A$, ezzel az állítást bebizonyítottuk.

b1) $\boxed{4}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{4}{2n^2}\right)^{2n^2}}{\left(1+\frac{2}{2n^2}\right)^{2n^2}}=\frac{e^4}{e^2}=e^2$$

b2.) $\boxed{5}$

$$b_n:=\sqrt[n]{\underbrace{\left(\frac{2n^2+4}{2n^2+2}\right)^{2n^2}}_{:=a_n\to e^2}}=\sqrt[n]{a_n}$$

$:=a_n\to e^2$ (ld. b1.) !)

$$a_n\to e^2 \implies$$

$$e^2-1<a_n<e^2+1\ ,\ \text{ha } n>N_1$$

$$\implies \underset{\downarrow\atop 1}{\sqrt[n]{e^2-1}}<b_n=\sqrt[n]{a_n}<\underset{\downarrow\atop 1}{\sqrt[n]{e^2+1}}$$

$$\underset{\text{rendőrelv}}{\implies} b_n\to 1$$

an1v-110606/1.

2. feladat (10 pont)

Konvergens-e az alábbi sor?

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+3}{2n^2+5}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 2^{2n}}{3 + 6^{n+1}}$

a.) $\boxed{5}$ $a_n > 0$ és

$$a_n = \frac{4n+3}{2n^2+5} > \frac{4n}{2n^2+5n^2} = \frac{4}{7}\frac{1}{n}$$

$$\frac{4}{7}\sum^{\infty} \frac{1}{n} \text{ div } \xRightarrow[\text{minoráns kr.}]{} \sum^{\infty} a_n \text{ div.}$$

b.) $\boxed{5}$ $b_n > 0$ és

$$b_n = \frac{2^n + 4^n}{3 + 6\cdot 6^n} < \frac{4^n + 4^n}{6\cdot 6^n} = \frac{1}{3}\left(\frac{4}{6}\right)^n = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$\frac{1}{3}\sum^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n \text{ konv. geom. sor } \left(0 < q = \frac{2}{3} < 1\right)$$

$$\xRightarrow[\text{majoráns kr}]{} \sum^{\infty} b_n \text{ konv.}$$

3. feladat (18 pont)

$$f(x) = \begin{cases} x\, e^{\frac{1}{2-x}}, & \text{ha } x \neq 2 \\ 0, & \text{ha } x = 2 \end{cases}$$

a) $\lim\limits_{x \to 2+0} f(x) = ?$, $\lim\limits_{x \to 2-0} f(x) = ?$
Hol és milyen típusú szakadása van az f függvénynek?

b) Írja fel $f'(x)$ értékét, ahol az létezik!

c) Írja le Weierstrass I. és II. tételét!
Van-e minimuma, illetve maximuma f-nek a $[2,3]$ intervallumon? (Nem kell az értéke!)

a.) $\boxed{5}$

$$f(2+0) = \lim_{x\to 2+0} \underbrace{x}_{\downarrow\, 2}\ \underbrace{e^{\frac{1}{2-x}}}_{\downarrow\, 0} = 0$$

$\frac{1}{2-x} \to -\infty$, mert $\frac{1}{-0}$ alakú

$$f(2-0) = \lim_{x\to 2-0} \underbrace{x}_{\downarrow\, 2}\ \underbrace{e^{\frac{1}{2-x}}}_{\downarrow\, \infty} = \infty$$

$\frac{1}{2-x} \to \infty$, mert $\frac{1}{+0}$ alakú

$x = 2$-ben másodfajú szakadása van, egyébként folytonos

anlv-110606/2.

b.) $\boxed{5}$ $f'(2)\ \nexists$, mert f nem folytonos $x=2$-ben. (1)

Ha $x\neq 2$:

$$f'(x)=1\cdot e^{\frac{1}{2-x}}+x\,e^{\frac{1}{2-x}}\,\frac{-1}{(2-x)^2}(-1) \quad (4)$$

c.) Weierstrass I. tétele:

$\boxed{8}$ (T) Ha f folytonos az $[a,b]$ (korlátos és zárt) intervallumon, akkor ott f korlátos. (2)

(T) **Weierstrass II. tétele:** (2)

Ha f folytonos $[a,b]$-ben, akkor ott felveszi az infimumát ill. szuprémumát, tehát van minimuma és maximuma. Vagyis $\exists\,\alpha,\beta\in[a,b]$, hogy

$$f(\alpha)=\sup\{f(x):\ x\in[a,b]\}\qquad \left(=\max_{x\in[a,b]}\{f(x)\}=\max f([a,b])\right)$$

$$f(\beta)=\inf\{f(x):\ x\in[a,b]\}\qquad \left(=\min_{x\in[a,b]}\{f(x)\}=\min f([a,b])\right)$$

(4) $f(2+0)=f(2)$ miatt f folytonos a $[2,3]$ intervallumo

$\xRightarrow[\text{W. II. t.}]{}$ f-nek $\exists$ minimuma és maximuma $[2,3]$-on

4. feladat (10 pont)

a) Írja le az inverzfüggvény deriválási szabályát!

b) Ennek segítségével bizonyítsa be, hogy

$$(\operatorname{arch} x)'=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}},\qquad x>1$$

a.) $\boxed{3}$ f szigorúan mon. I-ben $\Rightarrow$ f invertálható,

f differenciálható I-ben $\Rightarrow$ f folytonos I-ben

és $f'(x)\neq 0$ I-ben

Akkor f^{-1} differenciálható az $f(I)$ tetszőleges belső pontjában (x_0) és

$$f^{-1)}(x_0)=\frac{1}{f'(f^{-1}(x_0))}$$

b.) $\boxed{7}$ Az inverzfüggvény deriválási szabályával:

$$(\operatorname{arch} x)'=\left.\frac{1}{\operatorname{sh} u}\right|_{u=\operatorname{arch} x}=\left.\frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 u-1}}\right|_{u=\operatorname{arch} x}=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

Felhasználtuk, hogy

$$\operatorname{ch}^2 u-\operatorname{sh}^2 u=1\quad\text{miatt}\quad \operatorname{sh} u=+\sqrt{\operatorname{ch}^2 u-1}$$

(A vizsgált intervallumon $\operatorname{sh} u>0$).

an1v-110606/3.

5. feladat (10 pont)*

a) $\displaystyle\int \frac{1}{(2x+4)^4}\,\mathrm{d}x = ?$

b) $\displaystyle\int \operatorname{arctg}(2x)\,\mathrm{d}x = ?$

a.) $\boxed{3}$ $\displaystyle\frac{1}{2}\int \underset{f'}{2}\cdot \underset{f^{-4}}{(2x+4)^{-4}}\,dx = \frac{1}{2}\,\frac{(2x+4)^{-3}}{-3} + C$

b.) $\boxed{7}$ $\displaystyle\int 1\cdot \operatorname{arctg}2x\,dx = x\operatorname{arctg}2x - \int \frac{2x}{1+4x^2}\,dx =$ 2

$u'=1 \quad v=\operatorname{arctg}2x$

$u=x \quad v'=\dfrac{1}{1+4x^2}\cdot 2$ 2

$\displaystyle = x\operatorname{arctg}2x - \frac{1}{4}\int \underset{f'/f}{\frac{8x}{1+4x^2}}\,dx = x\operatorname{arctg}2x - \frac{1}{4}\ln(1+4x^2)+C$ 3

6. feladat (7+8=15 pont)*

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^2+2x+4}\,\mathrm{d}x = ?$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+2x-3}\,\mathrm{d}x = ?$

a) $\boxed{7}$ $\displaystyle I_a = \lim_{\omega\to\infty}\int_0^\omega \frac{1}{x^2+2x+4}\,dx = \lim_{\omega\to\infty}\int_0^\omega \underbrace{\frac{1}{(x+1)^2+3}}_{\frac{1}{3}\frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{\sqrt3}\right)^2}}\,dx =$ 1

$\displaystyle = \lim_{\omega\to\infty}\frac{1}{3}\,\frac{\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt3}}{\frac{1}{\sqrt3}}\Bigg|_0^\omega = \frac{1}{\sqrt3}\lim_{\omega\to\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{\omega+1}{\sqrt3} - \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt3}\right) =$ 4

$\displaystyle = \frac{1}{\sqrt3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$ 2

b.) $\boxed{8}$ $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+2x-3}\,dx = \int \frac{1}{(x+3)(x-1)}\,dx$ 1

$\displaystyle\frac{1}{(x+3)(x-1)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-1} \Rightarrow 1 = A(x-1)+B(x+3)$

$x=-3 \ : \ 1=-4A \Rightarrow A=-\frac{1}{4}$

$x=1 \ : \ 1=4B \Rightarrow B=\frac{1}{4}$

$\displaystyle I_b = \frac{1}{4}\int\left(-\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x-1}\right)dx = \frac{1}{4}\left(-\ln|x+3|+\ln|x-1|\right)+C$ 4 3

an1v110606/4.

7. feladat (10 pont)*

Vezesse be a $t = e^x$ új változót és határozza meg az alábbi integrált!

$$\int \frac{e^{3x} + 2e^x}{e^x + 1}\, dx$$

$$e^x = t \Rightarrow x = \ln t \Rightarrow dx = \frac{1}{t}\, dt \quad (2)$$

$$\int \frac{t^3 + 2t}{t+1} \frac{1}{t}\, dt \quad (2) \quad = \int \underbrace{\frac{t^2+2}{t+1}}_{\text{áltört}} dt = \int \frac{t^2 - 1 + 3}{t+1}\, dt =$$

$$= \int \left(t - 1 + \frac{3}{t+1}\right) dt = \frac{t^2}{2} - t + 3 \ln|t+1| + C \quad (5)$$

$$I = \frac{e^{2x}}{2} - e^x + 3 \ln(e^x + 1) + C \quad (1)$$

8. feladat (11 pont)*

$$f(t) = \begin{cases} (t+1)^2, & \text{ha } t \in [0,1] \\ 4 \sin\left(\frac{\pi}{2} t\right), & \text{ha } t > 1 \end{cases}$$

Határozza meg a

$$F(x) = \int_0^x f(t)\, dt, \quad x > 0$$

integrált! $F'(1) = ?$ (Indokoljon!)

$$0 < x \le 1: \quad F(x) = \int_0^x (t+1)^2\, dt = \frac{(t+1)^3}{3}\Big|_0^x = \frac{(x+1)^3}{3} - \frac{1}{3}$$

$$1 < x: \quad F(x) = \int_0^1 (t+1)^2\, dt + \int_1^x 4 \sin\left(\frac{\pi}{2} t\right) dt =$$

$$= \frac{(t+1)^3}{3}\Big|_0^1 - 4 \frac{\cos \frac{\pi}{2} t}{\frac{\pi}{2}}\Big|_1^x = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} - \frac{8}{\pi} \cos \frac{\pi}{2} x + 0$$

$$F(x) = \begin{cases} \frac{(x+1)^3}{3} - \frac{1}{3}, & \text{ha } x \in (0,1] \\ \frac{7}{3} - \frac{8}{\pi} \cos \frac{\pi}{2} x, & \text{ha } x > 1 \end{cases} \quad (8)$$

(3) Az integrandus folytonos $t = 1$-ben $\xRightarrow[\text{II. alaptétel}]{\text{int. szám.}}$ $F'(1) = f(1) = 4$

A *-gal jelölt feladatokból legalább 13 pontot el kell érni!

Pótfeladatok (csak az elégséges és közepes vizsgajegy eléréséhez javítjuk ki):

an1v-110606/5.

9. feladat (10 pont)

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n + 3^n}{3^{n+3} + (-1)^n} = ?$ b) $\lim\limits_{x\to +0} x^7 \ln \sqrt[5]{x} = ?$

a.) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n\left(\frac{1}{3}\right)^n + 1}{3^3 + \left(-\frac{1}{3}\right)^n} = \dfrac{0+1}{27+0} = \dfrac{1}{27}$

$\boxed{5}$

Felhasználtuk: $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$, ha $|a|<1$ és

$\lim\limits_{n\to\infty} n^k a^n = 0$, ha $|a|<1$, $k\in\mathbb{N}^+$

b.) $\lim\limits_{x\to 0+0} \dfrac{\ln\sqrt[5]{x}}{\frac{1}{x^7}} = \lim\limits_{x\to 0+0} \dfrac{\frac{1}{5}\ln x}{x} \overset{L'H}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}$

$\boxed{5}$

$= \lim\limits_{x\to 0+0} \dfrac{\frac{1}{5}\frac{1}{x}}{-7x^{-8}} = -\dfrac{1}{35} \lim\limits_{x\to 0+0} x^7 = 0$

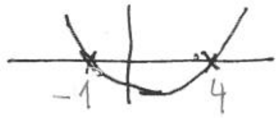
10. feladat (10 pont)

$$f(x) = (x^2 - 4x - 2)\, e^{2x}$$

Adja meg azokat a legbővebb intervallumokat, melyeken a függvény monoton!
Hol és milyen jellegű lokális szélsőértéke van f-nek?

$f'(x) = (2x-4)e^{2x} + (x^2-4x-2)e^{2x}\cdot 2 =$

$= 2e^{2x}(x^2-3x-4) = \underbrace{2e^{2x}}_{>0}(x-4)(x+1)$



	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 4)$	4	$(4, \infty)$
f'	+	0	−	0	+
f	↗	lok. max.	↘	lok. min	↗

an1o-110606|6.