2. Zárthelyi A1 2011 ősz

1. Határozza meg az alábbi sorozatok határértékét (ha léteznek)!

(a) $a_n = (1+\frac{1}{n})^{\frac{1}{n}}$ (b) $a_n = (1+\frac{1}{n})^{n}$ (c) $a_n = (1+n)^{\frac{1}{n}}$ (d) $a_n = (1+n)^{n}$

2. Legyen $a_n = \dfrac{\sqrt{n+\sqrt{2n+\sqrt{4n+1}}}}{\sqrt{4n+1}}$. Számítsuk ki az alábbi határértékeket, amennyiben léteznek!

(a) $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} a_n$ (b) $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \dfrac{a_{2n}}{a_n}$ (c) $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} (a_n)^n$

3. Határozzuk meg a $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{\ln\sqrt{\cos x}}{\sin^2 x}$ értékét L'Hospital-szabály alkalmazása nélkül!

4. Ábrázolja vázlatosan az $f(x) = \dfrac{1}{e^x - e^{\frac{1}{x}}}$ függvényt a $\pm\infty$-ben és a szakadási helyeken vett jobb- ill. baloldali határértékek meghatározása alapján!

5. Döntse el, hogy van-e megoldása az $e^{(e^x)} + e^x = 2$ egyenletnek, és ha van, akkor hány!

6.

(1) Legyen (a_n) tetszőleges sorozat. Igazak-e a következő állítások?
(a) Ha $\lim a_n = 0$, akkor $\lim(a_{n+1} - a_n) = 0$.
(b) Ha $\lim a_n = 1$, akkor $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$.
(c) Ha $\lim(a_{n+1} - a_n) = 0$, akkor $\lim a_n = 0$.
(d) Ha $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, akkor $\lim a_n = 1$.

(2) Melyik igaz, melyik nem?
(a) Nem korlátos intervallumon minden folytonos függvény nem korlátos.
(b) Korlátos intervallumon minden folytonos függvény korlátos.
(c) Korlátos intervallumon minden nem folytonos függvény nem korlátos.
(d) Korlátos zárt intervallumon minden folytonos függvény korlátos.
(e) Korlátos zárt intervallumon minden monoton függvény korlátos.