ANALÍZIS(2)
Mérnök Informatikus szak

VIZSGADOLGOZAT

2012. jan. 16.
Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

1. feladat (7+4+5=16 pont)

Oldja meg az alábbi differenciálegyenleteket!

a) $y' = \dfrac{2y^2+3}{y}\,(3x+1)^5 \qquad (y \neq 0)$

b) $y''' - 4\,y'' = 0$

c) $y''' + 4\,y' = 0$

a.) $\boxed{7}$

$$\int \frac{y}{2y^2+3}\,dy = \int (3x+1)^5\,dx \qquad 2$$

$$\frac{1}{4}\int \frac{4y}{2y^2+3}\,dy = \frac{1}{3}\int 3\cdot(3x+1)^5\,dx$$

$$f'/f \qquad\qquad f'f^5$$

$$\frac{1}{4}\ln(2y^2+3) = \frac{1}{3}\,\frac{(3x+1)^6}{6} + C$$

2 2 1

b.) $\boxed{4}$

$y''' - 4y'' = 0 \Rightarrow \lambda^3 - 4\lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda^2(\lambda-4) = 0$

$\lambda_{1,2} = 0, \quad \lambda_3 = 4$

$y_H = C_1 + C_2 x + C_3 e^{4x} \qquad C_i \in \mathbb{R}$

c.) $\boxed{5}$

$y''' + 4y' = 0 \Rightarrow \lambda^3 + 4\lambda = \lambda(\lambda^2+4) = 0$

$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_{2,3} = \pm 2j$

$y_H = C_1 + C_2\cos 2x + C_3 \sin 2x \qquad C_i \in \mathbb{R}$

2. feladat (15 pont)

a) Hogyan definiáljuk egy f függvény x_0 körüli Taylor sorát?

b) Milyen elégséges tételt tanultunk arra, hogy f megegyezzék Taylor sorával?

c) Vezesse le az $f(x) = \sin x$ függvény Taylor sorát $x_0 = 0$ esetén!
$f(x) = T(x)$ milyen x-ekre áll fenn? Indokoljon!

a.) f akárhányszor deriválható x_0-ban.

$\boxed{3}$

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

an20-120116/1.

b.) Elégséges tétel $f(x)=T(x)$ fennállására:

$\boxed{3}$ Ha f akárhányszor deriválható $(-R,R)$-en és $f, f', f'', \dots, f^{(n)}, \dots$ deriváltfüggvények egyenletesen korlátosak itt, akkor

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k, \quad x\in(-R,R)\text{-en}.$$

c.)

$$f(x)=\boxed{\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\,;\quad \boxed{x\in\mathbb{R}}$$

Ui.:

$f(x)=\sin x$	$f(0)=0$
$f'(x)=\cos x$	$f'(0)=1$
$f''(x)=-\sin x$	$f''(0)=0$
$f'''(x)=-\cos x$	$f'''(0)=-1$
$f^{(4)}(x)=\sin x$	$\downarrow$ Innen periodikusan ismétlődik

$$f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\cdots=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots$$

A deriváltak $(-\infty,\infty)$-en egyenletesen korlátosak, ezért $\forall\, x$-re: $\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots$.

3. feladat (11 pont)

Írja fel az alábbi függvények $x_0=0$ bázispontú Taylor sorának első négy nem nulla tagját és adja meg a sor konvergencia tartományát!

$$f(x)=\frac{1}{1+3x^2}, \qquad g(x)=x^2\ \mathrm{sh}\,(2x^2)$$

$$f(x)=\frac{1}{1-(-3x^2)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-3x^2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-3)^n x^{2n}=$$

$$=1-3x^2+3^2x^4-3^3x^6+\dots \quad 4$$

$$|q|=|-3x^2|=3|x|^2<1 \implies |x|<\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$K.T.:\ \left(-\frac{1}{\sqrt3},\ \frac{1}{\sqrt3}\right) \quad 2$$

$$\mathrm{sh}\, u = u+\frac{u^3}{3!}+\frac{u^5}{5!}+\dots\ ;\quad u\in\mathbb{R}$$

$$g(x)=x^2\ \mathrm{sh}(2x^2)=x^2\left(2x^2+\frac{(2x^2)^3}{3!}+\dots\right)=$$

$$=2x^4+\frac{2^3}{3!}x^8+\frac{2^5}{5!}x^{12}+\frac{2^7}{7!}x^{16}+\dots \quad 4 \qquad KT.:(-\infty,\infty) \quad 1$$

an2v120116l2.

4. feladat (16 pont)

$$f(x,y) = (y-3)^6 \ \mathrm{e}^{-3x}$$

a) $f'_x(x,y) = ?\,;\quad f'_y(x,y) = ?\,,\qquad \operatorname{grad} f = ?$

Hol létezik a gradiens? (Indokoljon!)

b) $\left.\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{P_0} = ?\,,\qquad P_0(0,4)\,,\qquad \underline{e} \parallel 4\underline{i} - 3\underline{j}$

$\max \left.\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{P_0} = ?$ Milyen irányban kapjuk? ($\underline{e} = ?$)

a.) $\boxed{8}$

$f'_x = (y-3)^6 e^{-3x}(-3)$ (2)

$f'_y = 6(y-3)^5 e^{-3x}$ (2)

mindenütt léteznek és folytonosak $\Rightarrow$ grad f mindenütt $\exists$ (2)

$\operatorname{grad} f = f'_x \underline{i} + f'_y \underline{j} = \dots$ (2)

b.) $\boxed{8}$

$\left.\dfrac{df}{d\underline{e}}\right|_{P_0} = \operatorname{grad} f(P_0) \cdot \underline{e}$ (2)

$\underline{v} = 4\underline{i} - 3\underline{j}\ ;\ |\underline{v}| = \sqrt{4^2+3^2} = 5 \Rightarrow \underline{e} = \frac{4}{5}\underline{i} - \frac{3}{5}\underline{j}$ (1)

$\operatorname{grad} f(0,4) = -3\underline{i} + 6\underline{j}$

$\left.\dfrac{df}{d\underline{e}}\right|_{P_0} = (-3\underline{i} + 6\underline{j})\left(\frac{4}{5}\underline{i} - \frac{3}{5}\underline{j}\right) = -3\cdot\frac{4}{5} + 6\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)\left(= -\frac{30}{5} = -6\right)$ (2)

$\max \left.\dfrac{df}{d\underline{e}}\right|_{P_0} = |\operatorname{grad} f(P_0)| = \sqrt{9+36} = \sqrt{45}$

$\underline{e} = \dfrac{\operatorname{grad} f(P_0)}{|\operatorname{grad} f(P_0)|} = -\dfrac{3}{\sqrt{45}}\underline{i} + \dfrac{6}{\sqrt{45}}\underline{j}$

(3)

5. feladat (16 pont)*

a) Cserélje meg az integrálás sorrendjét!

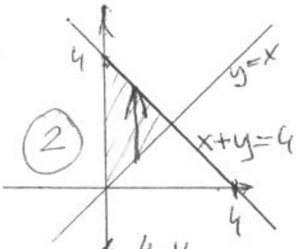
$$\int_0^2 \int_x^{4-x} f(x,y)\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x$$

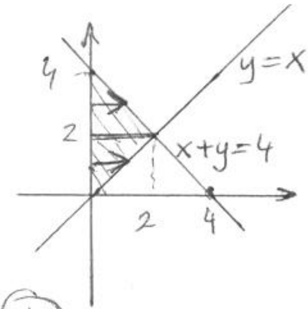
b) $\iint_T (2x^2+2y^2+4)^7\ \mathrm{d}T = ?\qquad T:\ x^2+y^2 \le 9,\quad x \le 0\,,\ y \ge 0$

an2v-120116/3.

a.) $\boxed{6}$ $x \le y \le 4-x$

$0 \le x \le 2$



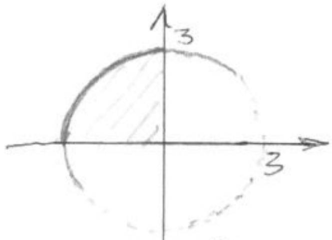


$$\int_{y=0}^{2}\int_{x=0}^{y} f(x,y)\,dx\,dy + \int_{y=2}^{4}\int_{x=0}^{4-y} f(x,y)\,dx\,dy \quad 4$$

b.) $\boxed{10}$ $x = r\cos\varphi$ $\quad 0 \le r \le 3$

$y = r\sin\varphi$ 2 $\quad \frac{\pi}{2} \le \varphi \le \pi$ 2

$|J| = r$



$$\int_{r=0}^{3}\int_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{\pi} (2r^2+4)^7 \underbrace{r}_{|J|}\, d\varphi\, dr = \left(\pi - \frac{\pi}{2}\right)\frac{1}{4}\int_0^3 \underbrace{4r}_{f'} \underbrace{(2r^2+4)^7}_{f^7} dr =$$

2 1

$$= \frac{\pi}{8}\,\frac{(2r^2+4)^8}{8}\Big|_0^3 = \frac{\pi}{64}\left(22^8 - 4^8\right) \quad 3$$

6. feladat (15 pont)*

$$f(z) = \operatorname{sh}(j\,2\,z)$$

a) Írja fel a függvény valós és képzetes részét!

b) Oldja meg az $f(z) = 0$ egyenletet! (Indokoljon!)

c)

$$\oint_{|z-2j|=2} \left(f(z) + \frac{1}{z+8} \right)\, dz = ?$$

Készítsen ábrát!

a.) $\boxed{4}$ $f(z) = \operatorname{sh}(j2(x+jy)) = \operatorname{sh}(-2y + j2x) =$

$= \operatorname{sh}(-2y)\operatorname{ch}(j2x) + \operatorname{ch}(-2y)\operatorname{sh}(j2x) = -\operatorname{sh}2y\cos 2x + j\operatorname{ch}2y\sin 2x$

$u = -\operatorname{sh}2y\cos 2x \quad ; \quad v = \operatorname{ch}2y\sin 2x$

b.) $\boxed{6}$ $-\operatorname{sh}2y\cos 2x = 0 \quad (1)$ 2

$\operatorname{ch}2y\sin 2x = 0 \quad (2)$

$(2):\ \operatorname{ch}2y \ne 0 \ \Rightarrow \sin 2x = 0:\ 2x = k\pi \Rightarrow x = k\frac{\pi}{2}\ ;\ k \in \mathbb{Z}$

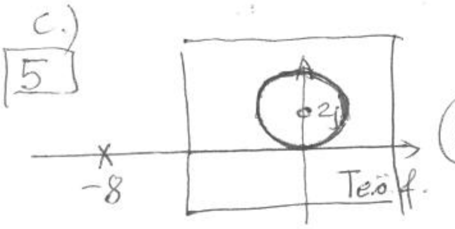
$(1):\ \cos 2x \ne 0 \Rightarrow \operatorname{sh}2y = 0 \Rightarrow y = 0$

Tehát $\operatorname{sh} j2z = 0$, ha $z = k\frac{\pi}{2} + j0 \quad (k \in \mathbb{Z})$ 4

an20120116/4.

c.)

$\boxed{5}$



(2) f mindenütt reguláris

$$\oint_{|z-2j|=2} \underbrace{\left(f(z)+\frac{1}{z+8}\right)}_{\text{reg } T\text{-n}} dz = 0 \quad \text{(Cauchy-féle alaptétel)}$$

(3)

7. feladat (11 pont)

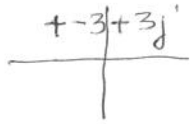
Keresse meg a z_1, z_2, z_3 és a z_4 komplex számok valós és képzetes részét, amennyiben léteznek!

$$z_1 = e^{1-j\,2\pi}, \qquad z_2 = \ln 0, \qquad z_3 = \mathrm{Ln}\,(-3+3j), \qquad z_4 = (-3)^j$$

$z_1 = e^1 \left(\underbrace{\cos(-2\pi)}_{1} + j\underbrace{\sin(-2\pi)}_{0}\right) = e \qquad \mathrm{Re}\, z_1 = e \;;\; \mathrm{Im}\, z_1 = 0$ (2)

$z_2 = \ln 0$ nem értelmezett (1)

$z_3 = \ln|-3+3j| + j\left(\mathrm{arc}(-3+3j) + 2k\pi\right) =$



$= \ln\sqrt{18} + j\left(3\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)$

$\mathrm{Re}\, z_3 = \ln\sqrt{18} \;;\; \mathrm{Im}\, z_3 = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ (4)

$z_4 = (-3)^j = e^{j\ln(-3)} = e^{j(\ln 3 + j(-\pi))} =$

$= e^{\pi + j\ln 3} = e^{\pi}(\cos\ln 3 + j\sin\ln 3)$

$\mathrm{Re}\, z_4 = e^{\pi}\cos\ln 3 \;;\; \mathrm{Im}\, z_4 = e^{\pi}\sin\ln 3$ (4)

Pótfeladatok. Csak az elégséges és a közepes vizsgajegy eléréséhez javítjuk ki.

8. feladat (11 pont)

$$f(x,y)=\frac{x\,e^{3y}}{x^2+1}\,, \qquad P_0(1,0)$$

a) $f'_x=?\,,\qquad f'_y=?\,,\qquad \mathrm{d}f\,(P_0,(h,k))=?$

b) Írja fel az f függvény P_0 pontbeli érintősíkjának egyenletét!

a) $f'_x = e^{3y}\,\dfrac{1\cdot(x^2+1)-x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}$

$f'_y = \dfrac{x}{x^2+1}\,e^{3y}\cdot 3$ (4)

$dP\,(P_0,(h,k)) = \underbrace{f'_x(P_0)}_{=0}\cdot h + \underbrace{f'_y(P_0)}_{=\frac{3}{2}}k = \frac{3}{2}\,k$ (3)

Érintősík

$f'_x(P_0)(x-x_0)+f'_y(P_0)(y-y_0)-(z-f(P_0))=0$ (2.)

$0\cdot(x-1)+\frac{3}{2}(y-0)-(z-\frac{1}{2})=0$ (2)

9. feladat (9 pont)

Írja fel az $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[4]{16+x}}$ függvény $x_0=0$ bázispontú Taylor sorfejtését és adja meg annak konvergenciasugarát!

$\binom{-1/5}{3}=?$ Elemi műveletekkel adja meg!

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt[4]{16}}\;\frac{1}{\sqrt[4]{1+\frac{x}{16}}}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{x}{16}\right)^{-\frac{1}{4}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}\binom{-1/4}{n}\left(\frac{x}{16}\right)^n=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}\binom{-1/4}{n}\left(\frac{1}{16}\right)^n x^n \qquad (5)$$

$$\left|\frac{x}{16}\right|<1 \Rightarrow |x|<16=R \qquad (2)$$

$$\binom{-1/}{3}=\frac{-\frac{1}{5}\left(-\frac{6}{5}\right)\left(-\frac{11}{5}\right)}{1\cdot 2\cdot 3} \qquad (2)$$

an2v120116/6.