Villamosmérnök alapszak Fizika2 4. vizsga dolgozat, 2018. jún. 20.	1.	2.	3.	4.	M	E1	E2	E3	E4.	E5	B	Összes
*iMSc pontok**	i	i	i	i	---	---	---	---	---	----		i

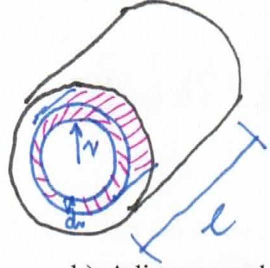
*A fizika2 vizsgán összesen 10 iMSc pont gyűjthető az 1. - 4. számú számítási feladatok ***IMSC)***-vel jelölt feladatrészeinek fakultatív megoldásával. Ezen feladatrészek kiértékelését csak akkor végezzük el, ha a hallgató a vizsgán legalább 85%-os eredményt ért el. Az iMSc pontok a vizsgán gyűjtött pontszámhoz nem adódnak hozzá. A gyűjtött iMSc pontok a hallgatót a BME-VIK által meghatározott kedvezményekre jogosíthatják.

NÉV: ______________________________ **Neptun kód:** ____________________

Előadó: Márkus / Sarkadi / Vizsgakurzus

1. Adott egy R sugarú, l hosszúságú INHOMOGÉN töltéseloszlással rendelkező henger. A térfogati töltéssűrűség eloszlását az alábbi függvény adja meg a henger tengelyétől mért r távolság függvényében: $\rho(r) = \alpha r^2$ ahol α egy konstans paraméter.

a) Mekkora a henger teljes töltése (1,5)

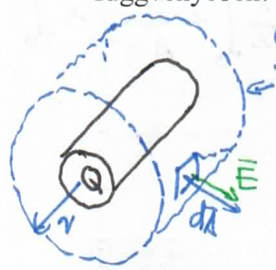


r sugarú, dr vastagságú hengerhéj térfogata: $dV = 2r\pi \cdot l \cdot dr$

$$dq = \rho \cdot dV = \alpha r^2 \cdot 2\pi r \cdot l \cdot dr = 2\pi l \alpha \cdot r^3 dr$$

$$Q = \int dq = 2\pi l \alpha \cdot \int_0^R r^3 dr = 2\pi l \cdot \alpha \cdot \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R = \boxed{\frac{\pi l \alpha R^4}{2}}$$

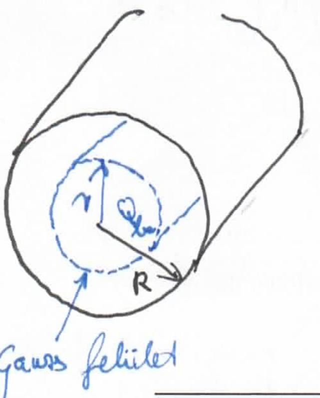
b) Adja meg a hengeren kívül kialakuló elektromos tér nagyságát a henger tengelyétől mért r távolság függvényében! ($E(r)$=? $r>R$) (1,5) Feltételezzük, hogy $l>>R$!



$$\frac{Q_{be}}{\varepsilon_0} = \oint E\,dA \underset{\text{szimmetria okozza}}{=} E \cdot A_{palást} = E \cdot 2\pi r \cdot l \Rightarrow E = \frac{Q_{be}}{2\pi \varepsilon_0 l \cdot r}$$

$$E_{(1)} = \frac{\pi l \cdot \alpha R^4}{2} \cdot \frac{1}{2\pi \varepsilon_0 l \cdot r} = \boxed{\frac{\alpha R^4}{4\varepsilon_0 \cdot r}}$$

c) Adja meg a hengeren belül kialakuló elektromos tér nagyságát a henger tengelyétől mért r távolság függvényében! ($E(r)$=? $r<R$) (2)



$$Q_{be} = \int_0^r dq = 2\pi l \cdot \alpha \int_0^r r'^3 dr' = 2\pi l \alpha \left[\frac{r'^4}{4}\right]_0^r = \frac{\pi l \alpha r^4}{2}$$

$$\frac{Q_{be}}{\varepsilon_0} = \oint E\,dA \Rightarrow \frac{\pi \cdot l \alpha r^4}{2\varepsilon_0} = \underbrace{2\pi r l}_{\text{Gauss felület palástjának területe}} \cdot E$$

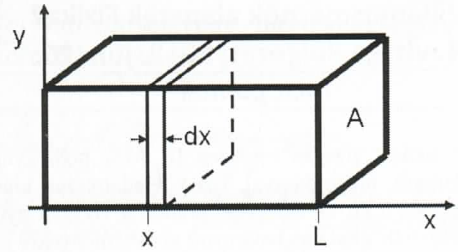
$$\Rightarrow \boxed{E_{(1)} = \frac{\alpha r^3}{4\varepsilon_0}}$$

IMSC) Mekkorának válasszuk a henger R sugarát, ha azt akarjuk, hogy a henger középpontja és külső felülete között U feszültség legyen! (2,5)

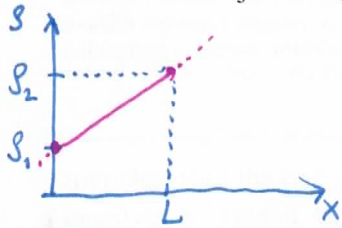
$$U = -\int_R^0 E\,dr = \frac{-\alpha}{4\varepsilon_0} \int_R^0 r^3 dr = -\frac{\alpha}{4\varepsilon_0}\left[\frac{r^4}{4}\right]_R^0 = \frac{\alpha R^4}{16\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \boxed{R = \sqrt[4]{\frac{16\varepsilon_0 U}{\alpha}}}$$

2. Az ábrán vázolt L hosszúságú, A keresztmetszetű vezető hasáb fajlagos ellenállása lineárisan növekszik ρ_1-ről ρ_2-re az $x=0$ koordinátájú ponttól az $x=L$ koordinátájú pontig.



a) Konstruálja meg a $\rho(x)$ függvényt a $0<x<L$ tartományban, vázlatosan ábrázolja is a függvényt! (1)



$$\boxed{\rho(x) = \frac{\rho_2-\rho_1}{L}\cdot x + \rho_1}$$

b) Határozza meg az ábrán feltüntetett dx vastagságú vezető szelet dR ellenállását egy tetszőleges x koordinátával jellemzett helyen! (1)

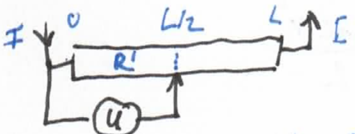
$$dR = \rho(x)\cdot\frac{dx}{A} = \boxed{\left(\frac{\rho_2-\rho_1}{L}x+\rho_1\right)\frac{dx}{A}}$$

c) Mekkora a vezeték teljes ellenállása? (1,5)

$$R = \int dR = \frac{1}{A}\int_0^L\left(\frac{\rho_2-\rho_1}{L}x+\rho_1\right)dx = \frac{\rho_2-\rho_1}{LA}\int_0^L x\,dx + \frac{\rho_1}{A}\int_0^L 1\,dx = \frac{\rho_2-\rho_1}{LA}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^L + \frac{\rho_1}{A}\cdot\left[x\right]_0^L$$

$$R = \frac{\rho_2-\rho_1}{2LA}L^2 + \frac{\rho_1}{A}L = \boxed{\frac{\rho_2+\rho_1}{2}\frac{L}{A}}$$

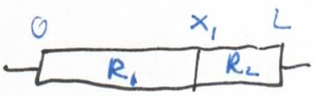
d) Tételezzük fel, hogy a vezetékben I áram folyik. Mekkora a potenciálkülönbség az $x=0$ és az $x=L/2$ pontok között? (1,5)



$$U = IR' = I\int_0^{L/2} dR = I\frac{\rho_2-\rho_1}{LA}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{L/2} + \frac{I\rho_1}{A}\left[x\right]_0^{L/2} =$$

$$U = I\frac{\rho_2-\rho_1}{8LA}L^2 + \frac{I\rho_1}{2A}L = \boxed{\frac{IL}{8A}(\rho_2+3\rho_1)}$$

IMSC) Adja meg azt az x_1 koordinátájú pontot, ahol a vezetéket kettévágva két azonos ellenállású darabot kapunk! (2,5)



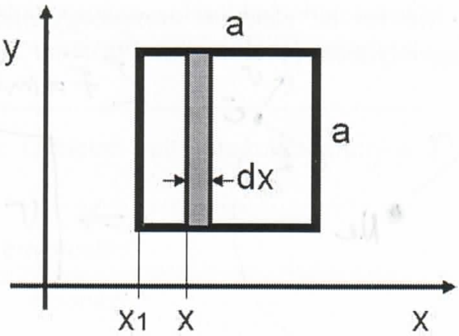
$$R_1 = R_2 \Rightarrow \int_0^{x_1} dR = \int_{x_1}^{L} dR$$

$$\frac{\rho_2-\rho_1}{LA}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{x_1} + \frac{\rho_1}{A}\left[x\right]_0^{x_1} = \frac{\rho_2-\rho_1}{AL}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x_1}^{L} + \frac{\rho_1}{A}\left[x\right]_{x_1}^{L}$$

$$\frac{\rho_2-\rho_1}{2L}x_1^2+\rho_1x_1 = \frac{\rho_2-\rho_1}{2L}(L^2-x_1^2)+\rho_1(L-x_1) \Leftrightarrow \frac{\rho_2-\rho_1}{L}x_1^2+2\rho_1x_1-\frac{\rho_2+\rho_1}{2}L = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-2\rho_1\pm\sqrt{4\rho_1^2+2(\rho_2^2-\rho_1^2)}}{2\frac{\rho_2-\rho_1}{L}} \Rightarrow \boxed{x_1 = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\rho_2^2-\rho_1^2}-\rho_1}{\rho_2-\rho_1}L}$$

3. Adott az ábra szerinti a oldalhosszúságú négyzetes vezető keret, melyet INHOMOGÉN mágneses térbe helyezünk. A Mágneses indukció vektor az ábra síkjára merőlegesen kifelé mutat, nagyságát a $B(x) = \beta x$ függvény írja le, ahol β egy konstans paraméter.



a) Mekkora az ábrán szürke színnel jelölt dx szélességű terület $d\phi$ mágneses fluxusa? (1)

$$d\phi = \vec{B}\,d\vec{A} = \boxed{\beta x \cdot a \cdot dx} \quad (1)$$

b) Mekkora a vezető keret által határolt terület teljes mágneses fluxusa? (1,5)

$$\phi = \int d\phi = \beta a \int_{x_1}^{x_1+a} x\,dx = \beta a \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x_1}^{x_1+a} = \frac{\beta a}{2}\left((x_1+a)^2 - x_1^2\right) = \boxed{\frac{\beta a^2}{2}(2x_1+a)}$$

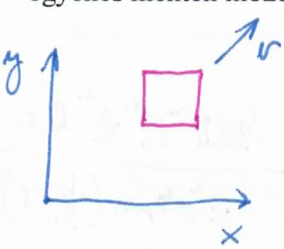
c) Írja fel a keret által határolt terület mágneses fluxusának $\phi(t)$ időfüggvényét, ha tudjuk, hogy a keret egyenletes v sebességgel mozog az x tengellyel párhuzamosan, azaz $x_1(t) = vt$ (1)

$$\boxed{\phi_{(t)} = \frac{\beta a^2}{2}(2v \cdot t + a)}$$

d) Határozza meg a keretben indukálódó feszültséget az idő függvényében! (1,5)

$$U = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{\beta a^2}{2} \cdot \frac{d}{dt}(2vt+a) = -\frac{\beta a^2}{2} \cdot 2v = \boxed{-\beta a^2 v}$$

IMSC) Mekkora az indukált feszültség, ha a keret az xy síkban, az x tengellyel 45°-os szöget bezáró egyenes mentén mozog? (2,5)

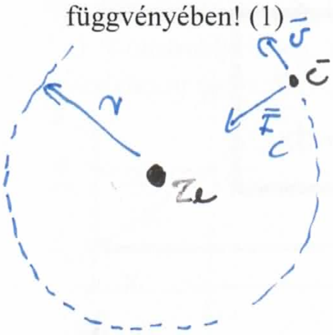


Mivel a mágneses indukció nagysága független y-tól, a fluxusváltozás mértéke csak a sebesség x irányú összetevőjétől függ.

$$U = -\beta a^2 \cdot v_x = -\beta a^2 v \cdot \cos 45^\circ = \boxed{-\frac{\beta a^2 v}{\sqrt{2}}}$$

4. Adott egy Z darab protonból álló atommag, amely körül körpályán kering egy elektron.

a) Írja fel az elektron mozgásegyenletét (0,5), és fejezze ki az elektron sebességét a pályasugár függvényében! (1)



$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow F_c = m a_{cp} \Rightarrow \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Ze^2}{r^2} = m\frac{v^2}{r}$$ 0,5

$$\Rightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 m r}}}$$ 1

b) Fejezze ki az elektron impulzusmomentumát a pályasugár függvényében, (0,5) írja fel a Bohr-féle kvantálási feltételt, bevezetve az N kvantumszámot. (0,5) és határozza meg, milyen r_N pályasugarak valósulhatnak meg a fenti atommag körül. (1)

$$L = m r\cdot v = m r\cdot\sqrt{\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 m r}} = \boxed{\sqrt{\frac{Ze^2 m r}{4\pi\varepsilon_0}}}$$ 0,5 $\quad L = N\hbar \quad N = 1, 2, 3 \ldots$ 0,5

$$N^2\hbar^2 = \frac{Ze^2 m r}{4\pi\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{r_N = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{Ze^2 m}\cdot N^2}$$ (1)

c) Fejezze ki az elektron potenciális (1), valamint kinetikus energiáját (0,5) az N kvantumszám függvényében!

$$E_{pot} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q_1Q_2}{r} = -\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r} = -\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{Ze^2 m}{4\pi\varepsilon_0\hbar^2 N^2} = \boxed{-\frac{Z^2e^4 m}{16\pi^2\varepsilon_0^2\hbar^2}\cdot\frac{1}{N^2}}$$ 1

$$E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\cdot\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 m r} = \frac{1}{2}\cdot\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Ze^2 m}{4\pi\varepsilon_0\hbar^2 N^2} = \boxed{\frac{Z^2e^4 m}{32\pi^2\varepsilon_0^2\hbar^2}\cdot\frac{1}{N^2}} = -\frac{E_{pot}}{2}$$ 0,5

IMSC) Mekkora hullámhosszúságú fotont bocsát ki a fenti kvantumrendszer, ha a 3. pályáról az 1. pályára lép át az elektron? (2,5)

$$E_N = E_{pot} + E_{kin} = E_{pot} - \frac{E_{pot}}{2} = \frac{E_{pot}}{2} = -\frac{Z^2e^4 m}{32\pi^2\varepsilon_0^2\hbar^2}\cdot\frac{1}{N^2}$$

$$hf = \frac{hc}{\lambda} = \Delta E \Rightarrow \lambda = \frac{hc}{\Delta E} = \frac{hc}{E_3 - E_1} = \frac{hc}{-\frac{Z^2e^4 m}{32\pi^2\varepsilon_0^2\hbar^2}\left(\frac{1}{3^2} - 1\right)} = -\frac{32\pi^2\varepsilon_0^2\hbar^2 hc}{Z^2e^4 m\left(\frac{1}{9} - 1\right)}$$

$$\lambda = \frac{32\pi^2\varepsilon_0^2\left(\frac{h}{2\pi}\right)^2 hc}{\frac{8}{9}Z^2e^4 m} = \boxed{\frac{9\varepsilon_0^2 h^3 c}{Z^2e^4 m}}$$

Villamosmérnök alapszak Fizika2 **vizsga dolgozat, 2018. jún. 20.**

Kiegészítendő mondatok

Egészítse ki az alábbi hiányos mondatokat úgy a megfelelő szavakkal, szókapcsolatokkal, matematikai kifejezésekkel (skalár-vektor megkülönböztetés), hogy azok a Fizika2 tantárgy színvonalának megfelelő, fizikailag helyes állításokat fogalmazzanak meg!

---

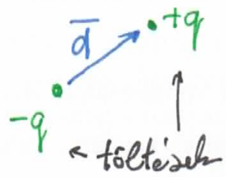
1. A Gauss-törvény értelmében az elektromos térerősség zárt felületre vett integrálja arányos a ….felület által bezárt töltéssel…………
2. Az ……elektrosztatikus…………… tér örvénymentes.
3. Két egymással szembefordított dipól ……taszítja………… egymást.
4. Töltött síkkondenzátor lemezei közé dielektrikum lemezt csúsztatunk. A művelet során .negatív…. előjelű munkát végzünk.
5. Egy C kapacitású kondenzátor U feszültségforráshoz van csatlakoztatva. A kondenzátort kisütjük, majd a feszültségforrás pólusait felcserélve újra feltöltjük. A kondenzátor kezdeti, valamint végállapota közötti energiakülönbség: ….nulla…………
6. Egy ideális fogyasztó tápfeszültségét megduplázzuk. A fogyasztó teljesítménye …négy….. szeresére nő.
7. Egy izzólámpa tápfeszültségét megduplázzuk. Az izzólámpa teljesítménye …kisebb…………mértékben nő, mint ha az egy ideális fogyasztó lenne.
8. Ponttöltésre ható Lorentz-erő vektorát megadó összefüggés: ……$\vec{F}=q(\vec{v}\times\vec{B})$…………
9. A Föld felszínén az …egyenlítőn…………… találhatóak azok a pontok, ahol a földi mágnesesség indukcióvektorai a talajjal párhuzamosak.
10. Az elemi mágneses momentumok doménekbe rendeződése ..ferromágneses………… anyagokban következik be.
11. Egy vákuumban terjedő elektromágneses hullám Poynting-vektorát meg akarjuk kétszerezni. Az elektromos tér rezgésének amplitúdóját ………$\sqrt{2}$…………… szeresére kell változtatnunk.
12. A fény terjedési sebessége ……$1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$………… formában fejezhető ki más univerzális állandók segítségével.
13. A Stefan-Boltzmann törvény értelmében egy egységnyi felületű fekete test által kisugárzott elektromágneses hullám teljesítménye a hőmérséklet …negyedik….. hatványával arányos.
14. A Compton-szórás során ….foton………… hat kölcsön egy …elektronnal…………
15. Ha elektronnyalábot irányítunk egy grafitkristályra, a grafitkristály diffrakciós rácsként viselkedik. Ez a kísérlet az elektron ..hullámtermészetét…… igazolja.

Kifejtendő kérdések

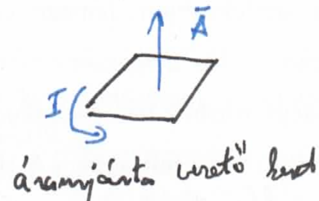
Tömör, lényegre törő, vázlatszerű, fizikailag és matematikailag pontos válaszokat várunk. Ha szükséges, rajzoljon magyarázó ábrákat!

1. Hasonlítsa össze az elektromos és a mágneses dipólt! Készítsen ábrát mindkét dipóltípus egyszerű fizikai modelljéről, és nevezze meg az ábrák részeit! (1) Definiálja a dipólmomentumot mindkét esetben! A felhasznált fizikai mennyiségeket nevezze meg! (1) Mutasson rá a homogén külső térbe helyezett elektromos és mágneses dipólok analóg viselkedésére a dipólokra ható forgatónyomatékot, valamint a dipólok potenciális energiáját megadó összefüggések felírásával! (1)

Elektromos dipól



Mágneses dipól



$+q, -q$: töltések

$\bar{d}$: $-q$-ból a $+q$-ba mutató vektor.

$\bar{A}$: vezető keret normálvektora

I: keretben folyó áram

Momentum: $\bar{p} = q \cdot \bar{d}$ $\qquad \bar{\mu} = I\bar{A}$

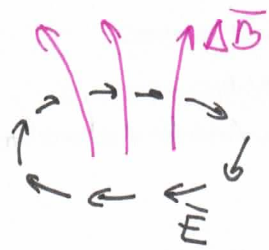
Forgatónyomaték külső térben: $\bar{M} = \bar{p} \times \bar{E}$ $\qquad \bar{M} = \bar{\mu} \times \bar{B}$

Potenciális energia: $\mathcal{E}_{pot} = -\bar{p}\bar{E}$ $\qquad \mathcal{E}_{pot} = -\bar{\mu}\bar{B}$

2. Írja fel a Faraday-féle indukció törvényt matematikai összefüggés formájában, (0,5) valamint fogalmazza meg a törvényt egy mondatban. (0,5) Vektorábrán szemléltesse az elektromos és a mágneses terek viszonyát, ha az indukció jelensége vákuumban lép fel! (1) Fogalmazza meg Lenz-törvényét! (1)

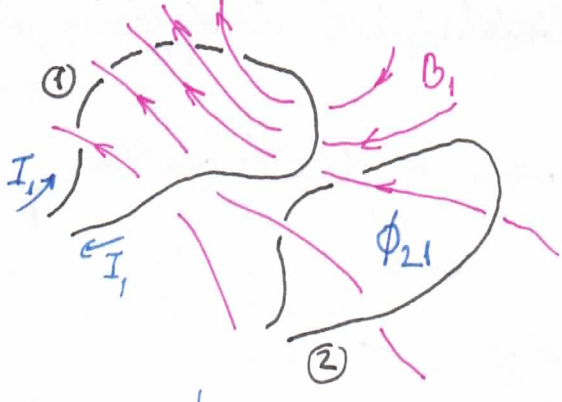
$$\boxed{\oint \bar{E}\, d\bar{r} = -\frac{d\Phi_B}{dt}}$$

Az elektromos tér zárt görbére vett integrálja arányos a görbe által határolt felület mágneses fluxusának időegységenkénti megváltozásával.



Lenz-törvénye: Egy vezető hurokban indukált áram iránya mindig olyan, hogy az áram mágneses tere az áramot indukáló fluxus változását hátráltatja.

3. Ábra, valamint matematikai összefüggés felírásával definiálja a kölcsönös indukciós együttható fogalmát! A felhasznált fizikai mennyiségeket nevezze meg! (1,5) A definíció alapján határozza meg, mekkora a kölcsönös indukciós együttható egy l hosszúságú, N menetű A_1 keresztmetszetű szolenoid, valamint a belsejében elhelyezett A_2 területű vezető keret között, ha a keret normálvektora α szöget zár be tekercs tengelyével! (1,5)



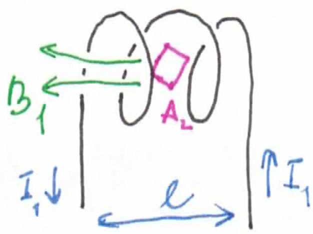
①: Vezetőhurok
I_1: 1-es hurokban folyó áram
B_1: 1-es hurok által keltett mágneses tér
②: Vezetőhurok
Φ_{21}: 1-es hurok által keltett mágneses tér 2-es hurok által határolt területre vonatkoztatott fluxusa.

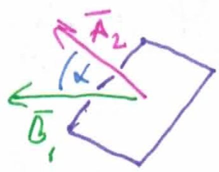
$$M_{12} = M_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I_1}$$

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1 N}{l}$$

$$\Phi_{21} = \bar{B}_1 \cdot \bar{A}_2 = B_1 A_2 \cdot \cos\alpha =$$

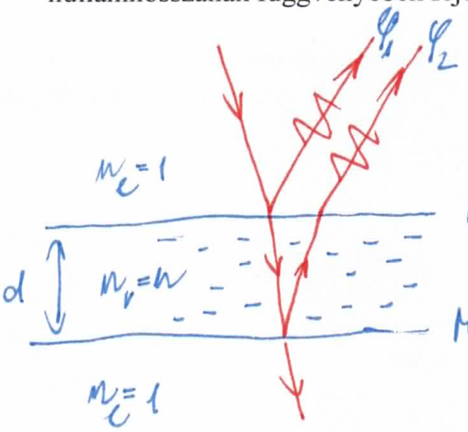
$$\Phi_{21} = \frac{\mu_0 I_1 N}{l} \cdot A_2 \cos\alpha$$





$$M_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I_1} = \boxed{\frac{\mu_0 N A_2}{l} \cdot \cos\alpha}$$

4. A fényutak vázlatos lerajzolásával értelmezze a szappanhártya (levegő-víz-levegő) felületeiről visszaverődő fény interferencia jelenségét! (1) Adja meg, hogy az egyes felületekről visszaverődve mekkora fázisugrást szenved a hullám? (1) A szappanhártya d vastagságának, n törésmutatójának, valamint a fény hullámhosszának függvényében fejezze ki az interferáló hullámok fáziskülönbségét! (1)



Mivel $n_l < n_v \Rightarrow \pi$ fázisugrás

Mivel $n_v > n_l \Rightarrow 0$ fázisugrás

$\varphi_1 = \pi$ Útkülönbség: $\Delta \approx 2d$ Hullámhossz a közegben: $\lambda' = \frac{\lambda}{n}$

$$\varphi_2 = 2\pi \cdot \frac{\Delta}{\lambda'} = 2\pi \frac{2d}{\frac{\lambda}{n}} = \frac{4\pi d n}{\lambda}$$

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \boxed{\frac{4\pi d n}{\lambda} - \pi}$$

5. Fogalmazza meg egy mondatban a Schrödinger-féle anyaghullámok Born-Jordan-féle valószínűségi értelmezését! (1) Az értelmezés alapján következtessen a $\psi(r)$ hullámfüggvény mértékegységére! (1) Matematikailag fogalmazza meg a hullámfüggvényre vonatkozó normálási feltételt! (1)

- Egy részecske hullámfüggvényének abszolútérték-négyzete megadja a részecske előfordulási valószínűségének sűrűségfüggvényét.

- Annak valószínűsége, hogy egy részecske a dV térfogatban megtalálható: $P(dV) = |\Psi(r)|^2 \cdot dV$

dimenziótlan $[m^3]$

$$\Downarrow$$

$$[\Psi] = \frac{1}{m^{3/2}}$$

- A részecske biztosan megtalálható a teljes térben, ezért:

$$\int_{\text{teljes tér}} |\Psi|^2 dV = 1$$