

Megoldás

1. feladat 24 pont

(a) Adja meg

$$z = \frac{(3 + 4i) - (2 - i)}{1 - i}, \quad \text{és} \quad w = \left(2(\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ)\right) \cdot (3 - 3i)$$

valós és képzetes részét!

(b) Adja meg a $z^2 + 2z + 3i(z + 1)$ polinom komplex gyökeit!**Megoldás:**

$$(a) \quad z = \frac{1 + 5i}{1 - i} = \frac{(1 + 5i)(1 + i)}{2} = \frac{-4 + 6i}{2},$$

$$\operatorname{Re} z = -2, \operatorname{Im} z = 3 \quad \boxed{8\text{p.}}$$

$$w = 2(\cos(-15^\circ) + i \sin(-15^\circ)) \cdot 3\sqrt{2}(\cos(-45^\circ) + i \sin(-45^\circ)) = 6\sqrt{2}(\cos(-60^\circ) + i \sin(-60^\circ)),$$

$$\operatorname{Re} w = 3\sqrt{2}, \operatorname{Im} w = -3\sqrt{6} \quad \boxed{8\text{p.}}$$

(b) $z^2 + (2 + 3i)z + 3i = 0$

$$z_{1,2} = \frac{-(2 + 3i) \pm \sqrt{(2 + 3i)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3i}}{2 \cdot 1} =$$

$$\frac{-(2 + 3i) \pm \sqrt{4 + 9i^2 + 2 \cdot 2 \cdot 3i - 12i}}{2} = \frac{-(2 + 3i) \pm \sqrt{-5 + 12i - 12i}}{2} =$$

$$\frac{-(2 + 3i) \pm \sqrt{-5}}{2} = \frac{-2 - 3i \pm \sqrt{5}i}{2} \quad \boxed{8\text{p.}} = -1 + \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}i$$

2. feladat 26 pont

Határozza meg az

$$\bullet \quad a_n = \frac{n^5 \cdot \sqrt{n} + 3n^3 - 100}{3n^4 \cdot \sqrt[3]{n} + 100n^2};$$

$$\bullet \quad b_n = \sqrt[n]{\frac{n^5 \cdot \sqrt{n} + 3n^3 - 100}{3n^4 \cdot \sqrt[3]{n} + 100n^2}};$$

sorozatok határértékét, ha léteznek!

Megoldás:

$$\bullet \quad a_n = \frac{n^{11/2} + 3n^3 - 100}{3n^{13/3} + 100n^2} = \frac{\overset{\rightarrow \infty}{n^{7/6}} + \overset{\rightarrow 0}{3n^{-4/3}} - \overset{\rightarrow 0}{100n^{-13/3}}}{3 + \underset{\rightarrow 0}{100n^{-7/3}}} \rightarrow \infty \quad \boxed{13\text{p.}}$$

$$\bullet \quad b_n \leq \sqrt[n]{\frac{n^6 + 3n^6}{3n^4}} = \sqrt[n]{\frac{4}{3}n^2} = \sqrt[n]{\frac{4}{3}} \underbrace{\left(\sqrt[n]{n}\right)^2}_{\rightarrow 1^2} \rightarrow 1$$

Másrészt $a_n \rightarrow \infty$ miatt $a_n \geq 1$, ha n elég nagy. Ilyenkor $1 \leq b_n$, így a rendőrelv miatt $b_n \rightarrow 1$. 13p.

3. feladat **26 pont**

Határozza meg a

• $c_n = \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n};$

• $d_n = \frac{(-2)^{5n+1} + (-3)^{3n-1}}{(-4)^{2n}};$

sorozatok határértékét, ha léteznek!

Megoldás:

$$\begin{aligned} \bullet c_n &= \frac{(\sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n})(\sqrt{n + \sqrt{n}} + \sqrt{n})}{\sqrt{n + \sqrt{n}} + \sqrt{n}} = \frac{n + \sqrt{n} - n}{\sqrt{n + \sqrt{n}} + \sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n + \sqrt{n}} + \sqrt{n}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{n}}} + 1} \rightarrow \frac{1}{2} \quad \boxed{13p.} \end{aligned}$$

• Ha n páros, akkor $d_n = \frac{-2 \cdot 32^n - \frac{1}{3} \cdot 27^n}{16^n} = -2 \cdot 2^n - \frac{1}{3} \left(\frac{27}{16}\right)^n \rightarrow -\infty$, mert $2^n \rightarrow \infty$
és $\left(\frac{27}{16}\right)^n \rightarrow \infty$, hiszen 1-nél nagyobb kvóciensű mértani sorozatok.

Ha n páratlan, akkor $d_n = \frac{2 \cdot 32^n + \frac{1}{3} \cdot 27^n}{16^n} = 2 \cdot 2^n + \frac{1}{3} \left(\frac{27}{16}\right)^n \rightarrow +\infty$, mert $2^n \rightarrow \infty$
és $\left(\frac{27}{16}\right)^n \rightarrow \infty$, hiszen 1-nél nagyobb kvóciensű mértani sorozatok.

 d_n -nek van 2 torlódási pontja, így nincs határértéke. 13p.**4. feladat** **24 pont**

Határozza meg az

$$f(x) = \frac{\sqrt{(x^2 - 2x + 1)(x^4 + 3)}}{x^3 - x}$$

függvény alábbi határértékeit, ha léteznek!

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x);$

• $\lim_{x \rightarrow 1} f(x);$

• $\lim_{x \rightarrow 2} f(x);$

Megoldás:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2} \cdot \frac{x^4 + 3}{x^4}}}{\frac{x^3 - x}{-x^3}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right) \cdot \left(1 + \frac{3}{x^4}\right)}}{-1 + \frac{1}{x^2}} = \\ &= -1 \quad \boxed{10p.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 1\pm} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1\pm} \frac{\sqrt{(x-1)^2(x^4+3)}}{x(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1\pm} \frac{|x-1| \sqrt{x^4+3}}{x-1} \cdot \frac{2}{x(x+1)} = \pm 1 \cdot \frac{2}{2} = \pm 1, \text{ így} \\ &\nexists \lim_{x \rightarrow 1} f(x). \quad \boxed{10p.} \end{aligned}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{(2^2 - 2 \cdot 2 + 1)(2^4 + 3)}}{2^3 - 2} = \frac{\sqrt{19}}{6} \quad \boxed{4p.}$$

Legyen $x_0 = -1$ és $x_n = -4\sqrt[3]{x_{n-1}}$ minden $n \in \mathbb{N}^+$ -re! Adja meg a sorozat torlódási pontjait!

Megoldás: $x_{n+1} = -4\sqrt[3]{x_n} = \sqrt[3]{2^8} \cdot \sqrt[9]{x_{n-1}}$

Fixpontjai az $x = \sqrt[3]{2^8} \sqrt[9]{x} = f(x)$ megoldásai, $x_0 = 0$, $x_{1,2} = \pm 8$.

Teljes indukcióval belátjuk, hogy x_{2n} monoton csökkenő. $x_0 = -1 > x_2 = f(-1) = -\sqrt[3]{2^8}$

Ha $x_{2n+2} < x_{2n}$, akkor $x_{2n+4} = f(x_{2n+2}) < f(x_{2n}) = x_{2n+2}$, mivel f szigorúan monoton növény.

Ekkor $\lim x_{2n} = \inf x_{2n}$. Vagy $-\infty$ vagy -8 . Teljes indukcióval belátjuk, hogy $-8 \leq x_{2n}$ minden n -re.

$$-8 \leq -1 = x_0$$

Ha $-8 \leq x_{2n}$, akkor $x_{2n+2} = f(x_{2n}) \geq f(-8) = -8$, mert f szigorúan monoton növény és -8 az egyik fixpontja.

Tehát $\lim x_{2n} = -8$.

Teljes indukcióval belátjuk, hogy x_{2n+1} monoton növény. $x_1 = 4 < x_3 = f(4) = \sqrt[9]{2^{26}}$

Ha $x_{2n+1} < x_{2n+3}$, akkor $x_{2n+3} = f(x_{2n+1}) < f(x_{2n+3}) = x_{2n+5}$, mivel f szigorúan monoton növény.

Ekkor $\lim x_{2n+1} = \sup x_{2n+1}$. Vagy ∞ vagy 8 . Teljes indukcióval belátjuk, hogy $x_{2n+1} \leq 8$ minden n -re.

$$x_1 = 4 \leq 8$$

Ha $x_{2n+1} \leq 8$, akkor $x_{2n+3} = f(x_{2n+1}) \leq f(8) = 8$, mert f szigorúan monoton növény és 8 az egyik fixpontja.

Tehát $\lim x_{2n+1} = 8$.

Így az x_n sorozatnak 2 torlódási pontja van ± 8 .

Megoldás: Teljes indukcióval belátjuk, hogy $x_n = -(-1)^n \frac{8}{2^{\frac{3}{3^n}}}$.

$$x_0 = -1 = -(-1)^0 \frac{8}{2^{\frac{3}{3^0}}} = -1 \frac{8}{2^1}$$

Ha $x_n = -(-1)^n \frac{8}{2^{\frac{3}{3^n}}}$, akkor

$$x_{n+1} = -4\sqrt[3]{x_n} = -4\sqrt[3]{-(-1)^n \frac{8}{2^{\frac{3}{3^n}}}} = -4 \cdot (-1) \cdot (-1)^n \frac{2}{2^{\frac{1}{3^n}}} = -(-1)^{n+1} \frac{8}{2^{\frac{3}{3^{n+1}}}}$$

Ha n páros, akkor $x_n = -\frac{8}{2^{\frac{3}{3^n}}} \rightarrow -8$

Ha n páratlan, akkor $x_n = \frac{8}{2^{\frac{3}{3^n}}} \rightarrow 8$

Így az x_n sorozatnak 2 torlódási pontja van ± 8 .