Felsőbb Mat. VillA és InfoD „Sztoch 2" pótvizsga megoldókulcs — 1 — Mogy
2014.08.19

(1) g polinom, így Taylor-sora önmaga:

$$g(z)=\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X=k)\, z^k = \frac{8}{24}z^0+\frac{6}{24}z^1+\frac{4}{24}z^2+\frac{3}{24}z^3+\frac{3}{24}z^4,$$

vagyis az eloszlás

k	0	1	2	3	4
$\mathbb{P}(X=k)$	$8/24$	$6/24$	$4/24$	$3/24$	$3/24$

a.) $$\mathbb{E}X=\sum_{k=0}^{\infty} k\,\mathbb{P}(X=k)=0\cdot\frac{8}{24}+1\cdot\frac{6}{24}+2\cdot\frac{4}{24}+3\cdot\frac{3}{24}+4\cdot\frac{3}{24}=\frac{6+8+9+12}{24}=\underline{\underline{\frac{35}{24}}}$$

Avagy: $$g'(z)=\frac{6+8z+9z^2+12z^3}{24} \Rightarrow \mathbb{E}X=g'(1)=\frac{6+8+9+12}{24}=\underline{\underline{\frac{35}{24}}}$$

b.) A fentiekből $\mathbb{P}(X=0)=\frac{8}{24}=\underline{\underline{\frac{1}{3}}}$

Avagy: $\mathbb{P}(X=0)=g(0)=\frac{8}{24}=\underline{\underline{\frac{1}{3}}}$

c.) A fentiekből $\mathbb{P}(X=4)=\frac{3}{24}=\underline{\underline{\frac{1}{8}}}$

Avagy: $$g''''(z)=\frac{3}{24}\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot z^0=\frac{1}{8}\cdot 4! \Rightarrow \mathbb{P}(X=4)=\frac{g''''(0)}{4!}=\underline{\underline{\frac{1}{8}}}$$

② a) Az állapottér $S=\{1,2,3,4\}$, a ~~...~~ tartózkodási idő paraméter vektor $\underline{\lambda}=\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$, a beágyazott diszkrét idejű Markov lánc átmenetmátrixa a szöveg szerint

$$Q=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ebből az ugrási ráták mátrixa:

$\lambda_{ij}=\lambda_i\cdot Q_{ij}$ miatt $(i\neq j)$-re

$$\underline{\underline{\Lambda}}=\begin{pmatrix} \ast & 1/3 & 0 & 0 \\ 1/9 & \ast & 2/9 & 0 \\ 0 & 1/9 & \ast & 2/9 \\ 0 & 0 & 1/3 & \ast \end{pmatrix}$$

Ebből a gráf-reprezentáció:

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, bend left, "1/3"] & 2 \arrow[l, bend left, "1/9"] \arrow[r, bend left, "2/9"] & 3 \arrow[l, bend left, "1/9"] \arrow[r, bend left, "2/9"] & 4 \arrow[l, bend left, "1/3"] \end{tikzcd}$$

az infinitezimális generátor

$$G=\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{9} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{9} & 0 \\ 0 & \frac{1}{9} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{9} \\ 0 & 0 & +\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

b.) A stacionárius eloszlás $G^T\pi^T=0$ megoldásával:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -\frac{1}{3} & \frac{1}{9} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{9} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{9} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{9} & -\frac{1}{3} & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -\frac{1}{3} & \frac{1}{9} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{9} & \frac{1}{3} & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} \pi_2=3\pi_1 \\ \cancel{2\pi_2=\pi_3} \\ \pi_3=2\pi_2 \\ \pi_4=\frac{2}{3}\pi_3 \end{array}$$

$\Rightarrow \pi=\dfrac{(1\ \ 3\ \ 6\ \ 4)}{\text{normálás}}$,

$$\pi=\left(\frac{1}{14}\ \ \frac{3}{14}\ \ \frac{6}{14}\ \ \frac{4}{14}\right)$$

Avagy: $X(t)$ születési-halálozási folyamat, a szembe ugrások rátáiból leolvasható, hogy $\frac{1}{3}\pi_1=\frac{1}{9}\pi_2$; $\frac{2}{9}\pi_2=\frac{1}{9}\pi_3$; $\frac{2}{9}\pi_3=\frac{1}{3}\pi_4$, amiből $\pi=\left(\frac{1}{14}\ \ \frac{3}{14}\ \ \frac{6}{14}\ \ \frac{4}{14}\right)$

2) folytatás

b.) $t := 70$ hosszú idő, mert várhatóan $\frac{70}{3} = 23\frac{1}{3}$ ugrás történik, a Markov lánc folytonos idejű, véges állapotterű és irreducibilis

$\Rightarrow$ a Markov láncok alaptétele szerint

$$\boxed{\mathbb{P}(X(t) = 4) \approx \pi_4 = \frac{4}{14} = \frac{2}{7}}$$

c.) A Markov lánc ~~folyt~~ véges állapotterű és irreducibilis

$\Rightarrow$ az ergodtétel szerint az $f(i) = \begin{cases} 1, & \text{ha } i = 1 \\ 0, & \text{ha } i \neq 0 \end{cases}$

fv. időátlaga hosszú távon

$$\boxed{\frac{\text{1-es állapotban töltött idő } T\text{-ig}}{T}} \xrightarrow{T \to \infty} \sum_i \pi_i f(i) = \pi f = \pi_1 = \frac{1}{14}$$

(1 valószínűséggel)

Felsőbb Mat. VillA és InfoD „Sztoch2" félvizsga megoldókulcs — 4 — Megy

2014.06.19

(3) $p_k := \mathbb{P}(k \text{ csípés}) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ $\quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots$

Ebből, ha a minta $x_1, \ldots, x_n$, akkor a likelihood-függvény

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} p_{x_i} = \prod_{i=1}^{n} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}$$

, a log-likelihood függvény pedig

$$\ell(\lambda) = \ln L(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \ln\left(e^{-\lambda} \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}\right) = \sum_{i=1}^{n} \left[-\lambda + x_i \ln \lambda - \ln(x_i!)\right] =$$

$$= -n\lambda + \ln\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i!) .$$

Ennek maximumhelyét keressük:

$$0 \doteq \ell'(\lambda) = -n + \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{n} x_i \Rightarrow \boxed{\lambda_{ML} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i} .$$

Esetünkben $n = 11$, $\lambda_{ML} = \frac{5+9+11+9+11+11+13+9+9+8+8}{11} = \frac{103}{11}$

$$\lambda_{ML} = \frac{103}{11} \approx 9.4$$

(4) A minta elemek átlaga $\overline{x} = \frac{100.1}{10} = 10.01 > 10$,

tehát a mintaelemek ~~megerősíti~~ a $H0: m \geq 10$ hipotézist,

ezért H0-t számolás nélkül $\boxed{\text{elfogadjuk}}$.

csak villamosmérnököknek

5 a.) Az osztályek: • {1} 1-elemű osztály mert sehonnan sem elérhető

• {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8} egyetlen osztály, mert ezen belül minden állapot mindenhonnan elérhető.

b.) Az {1} osztály nyílt ⇒ minden stacionárius eloszlás (Most csak 1 stac. eloszlás van.) szerint $\boxed{\pi_1 = 0}$.

Avagy: Az 1 állapotból a rendszer azonnal kiugrik és soha tér vissza ⇒ az ott töltött idő aránya 0-hoz tart.