

1. feladat (8+12=20 pont)

- a) Ismertesse, és igazolja a rendőrelvet!
b) Határozza meg $\sqrt[n]{\frac{7^n + 5^n}{n^3 + 2}}$ sorozat határértékét!

Mo. a) Tegyük fel, hogy $n \geq N$ esetén $a_n \leq b_n \leq c_n$, és $\lim a_n = \lim c_n = A$. Ekkor $\lim b_n = A$ **(2p)**, mert $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan N_1 , hogy $n \geq N_1$ esetén $A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$, és létezik olyan N_2 , hogy $n \geq N_2$ esetén $A - \varepsilon < c_n < A + \varepsilon$, vagyis $n \geq N(\varepsilon) = \max(N, N_1, N_2)$ esetén $A - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < A + \varepsilon$, vagyis $|b_n - A| < \varepsilon$. **(6p)**.

b) A rendőrelv miatt $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{7^n + 5^n}{n^3 + 2}} = 7$ **(2p)**, mert

$$7 \xleftarrow{(2p)} \frac{7}{\sqrt[3]{3}(\sqrt[n]{n})^3} \stackrel{(2p)}{=} \sqrt[n]{\frac{7^n}{3n^3}} \leq \sqrt[n]{\frac{7^n + 5^n}{n^3 + 2}} \leq \sqrt[n]{\frac{2 \cdot 7^n}{n^3}} \stackrel{(1p)}{=} \frac{7 \sqrt[n]{2}}{(\sqrt[n]{n})^3} \xrightarrow{(1p)} 7$$

2. feladat (4+10=14 pont)

- a) Definiálja egy sorozat torlódási pontjait!
b) Adja meg az $a_n = \left(\frac{n - (-1)^n}{n + 4}\right)^{n-1}$ sorozat torlódásai pontjainak halmazát, limesz superiorját, illetve limesz inferiorját! Konvergens-e a sorozat?

Mo. a) Az $A \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ az (a_n) sorozat torlódási pontja, ha létezik olyan (a_{n_k}) részsorozat, amelyre $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = A$. **(4p)** (Vagy: ha A minden környezetébe végtelen sok sorozatelem esik.)

b) Páratlan n esetén

$$a_n = \left(\frac{n+1}{n+4}\right)^{n-1} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{4}{n}\right)^n} \cdot \left(\frac{n+1}{n+4}\right)^{-1} \rightarrow \frac{1}{e^3}, \quad (3p)$$

páros n esetén

$$a_n = \left(\frac{n-1}{n+4}\right)^{n-1} = \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{4}{n}\right)^n} \cdot \left(\frac{n-1}{n+4}\right)^{-1} \rightarrow \frac{1}{e^5}, \quad (3p)$$

így a sorozat torlódási pontjainak halmaza $\left\{\frac{1}{e^3}, \frac{1}{e^5}\right\}$ **(1p)**, $\limsup a_n = \frac{1}{e^3}$ **(1p)**, $\liminf a_n = \frac{1}{e^5}$ **(1p)**, és mivel $\liminf a_n \neq \limsup a_n$, így a sorozat divergens **(1p)**.

3. feladat (4+10=14 pont)

- a) Adjon szükséges feltételt arra, hogy egy differenciálható függvény egy intervallumon

invertálható!

b) Írja fel az $f(x) = \pi - 2 \arcsin(2x - 5)$ függvény értelmezési tartományát és értékkészletét! Igazolja, hogy f invertálható a teljes értelmezési tartományán! Mi lesz az inverzfüggvény értelmezési tartománya, illetve értékkészlete?

Mo. a) Ha f az I intervallumon deriválható és invertálható, akkor I -n szigorúan monoton, így $f'(x) \geq 0$ minden $x \in I$ esetén, vagy $f'(x) \leq 0$ minden $x \in I$ esetén **(4p)**.
b) $-1 \leq 2x - 5 \leq 1$, vagyis $D_f = [2, 3]$, **(2p)** és

$$R_f = \left[\pi + 2 \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right), \pi + 2 \cdot \frac{\pi}{2} \right] = [0, 2\pi] \quad \text{(2p)}$$

$$f'(x) = \frac{(-2) \cdot 2}{\sqrt{1 - (2x - 5)^2}} < 0, \quad \text{(3p)}$$

tehát a függvény invertálható **(1p)**, és $D_{f^{-1}} = R_f = [0, 2\pi]$ **(1p)**, $R_{f^{-1}} = D_f = [2, 3]$ **(1p)**.

4. feladat (4+12=16 pont)

a) Ismertesse Weierstrass második tételét!

b) Határozza meg az $f(x) = x^2 e^{-5x^2 - 8x + 1}$ függvény minimumát, illetve maximumát a $[-2, 0]$ intervallumon!

Mo. a) Korlátos, zárt intervallumon értelmezett folytonos függvény felveszi a minimumát és a maximumát **(4p)**.

b) A függvény differenciálható, így minimumát, illetve maximumát az intervallumba eső lokális szélsőérték helyek valamelyikén, vagy az intervallum végpontjaiban veszi fel **(2p)**.

$$f'(x) = 2xe^{-5x^2 - 8x + 1} + x^2(-10x - 8)e^{-5x^2 - 8x + 1} = -2x(5x^2 + 4x - 1)e^{-5x^2 - 8x + 1} = 0, \quad \text{(3p)}$$

ha $x = 0$, $x = -1 \in [-2, 0]$, $x = \frac{1}{5} \notin [-2, 0]$ **(3p)**, és $f(0) = 0 < f(-2) = 4e^{-3} < f(-1) = e^4$ **(3p)**, vagyis az intervallumon felvett minimum 0, a maximum pedig e^4 . **(1p)**

5. feladat (4+10=14 pont)*

a) Adja meg minden $\alpha \in \mathbb{R}$, és differenciálható f függvény esetén az $f^\alpha(x)f'(x)$ függvény primitív függvényét!

b) Számolja ki az $f(x) = \sin^3 x + \frac{1}{(1 + 5x) \ln(1 + 5x)}$ függvény primitív függvényét!

Mo. a) Ha $\alpha \neq -1$, akkor

$$\int f^\alpha(x) f'(x) dx = \frac{f^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \quad (3\text{p})$$

$\alpha = -1$ esetén pedig $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + c$ (1p)

b) $\sin^3 x = \sin x(1 - \cos^2 x)$ (2p), tehát

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &\stackrel{(4\text{p})}{=} \int \sin x + (\cos x)' \cos^2 x + \frac{1}{5} \cdot \frac{\ln(1+5x)'}{\ln(1+5x)} dx \stackrel{(4\text{p})}{=} \\ &= -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + \frac{1}{5} \ln |\ln(1+5x)| + c \end{aligned}$$

6. feladat (10 pont)*

Számolja ki az alábbi integrált!

$$\int \operatorname{ch}(3x+2) \sin(2x-1) dx$$

Mo. Kétszeres parciális integrálással

$$\begin{aligned} I &= \int \operatorname{ch}(3x+2) \sin(2x-1) dx \stackrel{(3\text{p})}{=} \frac{-\operatorname{ch}(3x+2) \cos(2x-1)}{2} + \frac{3}{2} \int \operatorname{sh}(3x+2) \cos(2x-1) dx \stackrel{(3\text{p})}{=} \\ &= \frac{-\operatorname{ch}(3x+2) \cos(2x-1)}{2} + \frac{3 \operatorname{sh}(3x+2) \sin(2x-1)}{4} - \frac{9}{4} \int \operatorname{ch}(3x+2) \sin(2x-1) dx \stackrel{(2\text{p})}{=} \\ &= \frac{-\operatorname{ch}(3x+2) \cos(2x-1)}{2} + \frac{3 \operatorname{sh}(3x+2) \sin(2x-1)}{4} - \frac{9}{4} I \end{aligned}$$

így

$$I = \frac{4}{13} \left(\frac{-\operatorname{ch}(3x+2) \cos(2x-1)}{2} + \frac{3 \operatorname{sh}(3x+2) \sin(2x-1)}{4} \right). \quad (2\text{p})$$

7. feladat (6+6=12 pont)*

a) Ismertesse az integrálszámítás második alaptételét!

b) Számolja ki a $G(x) = \int_0^{3x} \operatorname{cth}(e^{\operatorname{arctg}(2t)}) dt$ függvény deriváltját $x \geq 0$ esetén!

- Mo. a) Minden $[a, b]$ intervallumon integrálható f függvény esetén az $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ függvény folytonos az $[a, b]$ intervallumon **(3p)**, és ha f folytonos egy $x_0 \in [a, b]$ pontban, akkor ott F differenciálható, és $F'(x_0) = f(x_0)$ **(3p)**.
- b) Az $f(x) = \operatorname{cth}(e^{\operatorname{arctg}(2x)})$ folytonos függvények kompozíciója, így az $F(x) = \int_0^x \operatorname{cth}(e^{\operatorname{arctg}(2t)}) dt$ függvény differenciálható, és $F'(x) = \operatorname{cth}(e^{\operatorname{arctg}(2x)})$ **(3p)**.
 $G(x) = F(3x)$, így $G'(x) = 3F'(3x) = 3 \operatorname{cth}(e^{\operatorname{arctg}(6x)})$ **(3p)**.

IMSC feladat (14 IMSC pont)

Jelölje $\{a\}$ az $a \in \mathbb{R}$ szám törtrészét, és legyen $f(x) = x \cdot \{\frac{1}{x}\}$. Határozza meg a következő határértékeket!

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{x} \right\}; \quad b) \lim_{x \rightarrow 0} f(x); \quad c) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); \quad d) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x).$$

- Mo. a) Az átviteli elvvel igazolható, hogy a határérték nem létezik. Legyen $\forall k \in \mathbb{N}_+$ estén $x_k = \frac{1}{k}$ és $y_k = \frac{1}{k+1/2}$. Mindkét sorozat zérushoz tart, és $\{\frac{1}{x_k}\} = 0 \neq \{\frac{1}{y_k}\} = \frac{1}{2}$. **(4p)**
- b) Mivel a törtrész függvény értékkészlete $[0, 1)$ korlátos, és $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ ezért $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$. **(3p)**
- c) Ha $x > 1$, akkor $\frac{1}{x} \in (0, 1)$, így $\{\frac{1}{x}\} = \frac{1}{x}$, tehát $f(x) = x \cdot \frac{1}{x} = 1$, és egyben ez a keresett határérték is. **(3p)**
- d) Ha $x < -1$, akkor $\frac{1}{x} \in (-1, 0)$, így $\{\frac{1}{x}\} = 1 + \frac{1}{x}$, tehát $f(x) = x \cdot (1 + \frac{1}{x}) = x + 1 \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\infty$. **(4p)**