3. ZÁRTHELYI DOLGOZAT

MATEMATIKA A2
VILLAMOSMÉRNÖK HALLGATÓKNAK

2016. május 12.
Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

Név: [redacted] **Gyakvez.:** [redacted]

Neptun kód: [redacted] **Gyak. kurzuskód:** [redacted]

1.	2.	3.	4.	5.	$\sum$
[redacted]					

A zárthelyin semmilyen segédeszköz nem használható!

1. **(20 pont)**
Számolja ki az
$$I = \iiint_V \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z$$
integrált, ahol
$$V = \{(x,y,z) : \sqrt{3x^2+3y^2} \le z, \quad x^2+y^2+z^2 \ge 9, \quad x^2+y^2+z^2 \le 81\}.$$

2. **(20 pont)**
Legyen L az $\mathbb{R}^4$ vektortér azon vektorainak halmaza, amelyekre fennáll, hogy a koordinátáinak összege 0. Mutassa meg, hogy L altér és adjon meg egy bázist L-ben!

3. **(20 pont)**
Adja meg az alábbi lineáris egyenletrendszer megoldásait a λ valós paraméter függvényében!
$$\begin{aligned}
\lambda x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1\\
x_1 + \lambda x_2 + x_3 + x_4 &= 1\\
x_1 + x_2 + \lambda x_3 + x_4 &= 1\\
x_1 + x_2 + x_3 + \lambda x_4 &= 1.
\end{aligned}$$

4. **(20 pont)**
Határozza meg az

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

mátrix sajátértékeit, sajátvektorait és inverzét, amennyiben létezik! Mennyi A^{100} determinánsa?

5. **(20 pont)**
Írja fel az $x - y + \sqrt{2}z = 0$ síkra vett merőleges vetítés mátrixát a kanonikus bázisban. Adja meg a mátrix sajátértékeit és sajátvektorait! Mi lesz a leképezés képtere, illetve magtere?

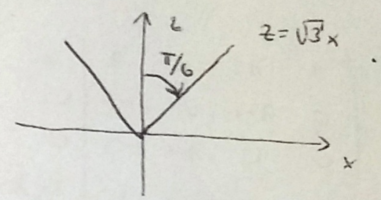
A2 3. ZH - megoldások

① $I = \int\limits_V \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\, dV \qquad V = \{(x,y,z):\ \sqrt{3x^2+3y^2} \le z,\ x^2+y^2+z^2 \ge 9,\ x^2+y^2+z^2 \le 81\}$

gömbi koord:

$$\left.\begin{aligned} x &= r\sin\vartheta\cos\varphi \\ y &= r\sin\vartheta\sin\varphi \\ z &= r\cos\vartheta \end{aligned}\right\} \Rightarrow x^2+y^2+z^2 = r^2$$

$|J| = r^2\sin\vartheta$



V: $3 \le r \le 9$

$0 \le \vartheta \le \pi/6$

$0 \le \varphi \le 2\pi$

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/6}\int_3^9 \frac{1}{r^2}\cdot r^2\sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi = \underbrace{\big[r\big]_3^9}_{6} \cdot \underbrace{\big[-\cos\vartheta\big]_0^{\pi/6}}_{1-\frac{\sqrt3}{2}} \cdot \underbrace{\big[\varphi\big]_0^{2\pi}}_{2\pi} = \underline{\underline{6(2-\sqrt3)\pi}}$$

②

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix},\ \underline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \qquad \underline{x}, \underline{y} \in L \iff \begin{aligned} x_1+x_2+x_3+x_4 &= 0 \\ y_1+y_2+y_3+y_4 &= 0 \end{aligned}$$

- $\underline{x}+\underline{y} = \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ x_3+y_3 \\ x_4+y_4 \end{pmatrix} \quad (x_1+y_1)+\ldots+(x_4+y_4) = (x_1+\ldots+x_4)+(y_1+y_2+y_3+y_4) = 0$

  $\hookrightarrow \underline{x}+\underline{y} \in L$

- $\lambda\underline{x} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_4 \end{pmatrix} \quad \lambda x_1+\ldots+\lambda x_4 = \lambda(x_1+\ldots+x_4) = 0 \quad \Rightarrow \lambda\underline{x} \in L$

$\Rightarrow$ vektortér

$\underline{x} \in L$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ -x_1-x_2-x_3 \end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{bázis pl} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \lambda & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \lambda & 1 \end{array}\right) \underset{S_1 \leftrightarrow S_4}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{S_2 - S_1 \\ S_3 - S_1 \\ S_4 - \lambda S_1}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & 1-\lambda \end{array}\right) \sim$$

$$\underset{S_4 + S_2}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 2-\lambda-\lambda^2 & 1-\lambda \end{array}\right) \underset{S_4 + S_3}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3-2\lambda-\lambda^2 & 1-\lambda \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda+3)(\lambda-1) & \lambda-1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \quad (\lambda+3)(\lambda-1)\, x_4 = \lambda - 1$$

$\Rightarrow$ • $\lambda = -3 \Rightarrow \nexists$ megoldás

• $\lambda = 1 \Rightarrow x_4 = p,\ x_3 = q,\ x_2 = r$ tetszőleges paraméterek

$x_1 = 1 - p - q - r$ $\quad$ ∞ sok megoldás 3 szabad paraméterrel

• $\lambda \neq 1,\ \lambda \neq -3$

$\hookrightarrow$ $x_4 = \dfrac{1}{\lambda+3}$, $\quad x_3 = x_4 = \dfrac{1}{\lambda+3}$, $\quad x_2 = x_4 = \dfrac{1}{\lambda+3}$

$$x_1 = 1 - x_2 - x_3 - \lambda x_4 = 1 - \frac{2+\lambda}{\lambda+3} = \frac{1}{\lambda+3}$$

pontosan 1 megoldás:

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_1 = \frac{1}{\lambda+3}$$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}}) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(1+\lambda)(\lambda-1) = 0$$

$\hookrightarrow \quad \lambda_1 = 2, \; \lambda_2 = -1, \; \lambda_3 = 1$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{v} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2v_1 - v_2 - v_3 \\ -v_2 \\ 2v_2 + v_3 \end{pmatrix}$$

- $\underline{\lambda_1 = 2}$ $\rightarrow$ $2v_1 - v_2 - v_3 = 2v_1$

  $-v_2 = 2v_2 \quad \rightsquigarrow \quad v_2 = 0$

  $2v_2 + v_3 = 2v_3 \quad \rightsquigarrow \quad v_3 = 0$ $\quad \Rightarrow \quad v_1 = 1$, ľ

  $$\boxed{\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

- $\underline{\lambda_2 = -1}$ $\rightarrow$ $2v_1 - v_2 - v_3 = -v_1 \quad \Rightarrow \quad v_1 = \frac{1}{3}(v_2 + v_3)$

  (0, -1, 1)

  $-v_2 = -v_2$

  $2v_2 + v_3 = -v_3 \quad \Rightarrow \quad v_2 = v_3 =: 1$

  $$\Rightarrow \boxed{\underline{v}_2 = \cancel{\begin{pmatrix} 2/3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}}$$

- $\underline{\lambda_3 = 1}$ $\quad 2v_1 - v_2 - v_3 = v_1 \quad \rightarrow \quad v_1 = v_3$

  $-v_2 = v_2 \quad \rightarrow \quad v_2 = 0$

  $2v_2 + v_3 = v_3$

  $$\Rightarrow \boxed{\underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$\det \underline{\underline{A}} = 2 \cdot (-1) \cdot 1 = -2 \quad \Rightarrow$ iverhiChehó

$$\det \underline{\underline{A}}^{100} = (\det \underline{\underline{A}})^{100} = (-2)^{100} = \underline{\underline{2^{100}}}$$

$$\underline{\underline{A}}^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -4 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(5) $x - y + \sqrt{2}z = 0 \implies \underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad |\underline{u}| = \sqrt{1+1+2} = 2$

$$\implies \underline{u}_0 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{P}} = \underline{u}_0 \circ \underline{u}_0 = \underline{u}_0 \cdot \underline{u}_0^T = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1/4 & -1/4 & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ -1/4 & 1/4 & -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}}$$

- sajátértékek, sajátvektorok:

  sík vektorai $\underline{\underline{\lambda = 1}}$ sajátértékkel pl: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$

  síkra merőleges vektorok $\underline{\lambda = 0}$ sajátértékkel: $\underline{u}_0 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$

- $\text{Im}\,\underline{\underline{P}} = \{x - y + \sqrt{2}z = 0 \text{ sík}\}$

  $\text{Ker}\,\underline{\underline{P}} = \underline{u}$ irányvektorú origón átmenő egyenes