Feladatok

1. Egy R = 5 cm sugarú, önmagában álló fémgömb potenciálja Φ = -20 V. A végtelen távoli pont potenciálja Φ_∞ = 30 V, a közeg levegő. Határozza meg a gömb töltését!

   a) 166,82 pC b) 111,21 pC c) -111,21 pC d) -278,03 pC

2. Adva van egy kocka alakú, a = 10 cm élhosszúságú, levegővel töltött tartomány, amely tértöltést nem tartalmaz. A tartományon időben állandó elektromos tér van jelen. A kocka lapjait úgy számozzuk, hogy az 1-6, 2-5, illetve 3-4 párok egymással szemközti lapokat jelentenek. Ekkor az 1., 2., 5., és 6. lapokon az elektromos skalárpotenciálra homogén Neumann-peremfeltétel teljesül (azaz $\partial\Phi/\partial n = 0$), míg a 3-on Φ_3 = 2 V, a 4-en Φ_4 = -3 V Dirichlet-feltételek. Mekkora az elektromos térben tárolt energia az adott térrészen?

   a) 6,25 mJ b) 11,06 pJ c) 54,11 nJ d) 15,03 µJ

3. Egy közegben az elektromos térerősség és az eltolás vektorának kapcsolatát a $\mathbf{D}(x,y,z,t) = \varepsilon_0(1 + 3e^{-2|y|})\mathbf{E}(x,y,z,t)$ összefüggés írja le, amelybe a helykoordináta méterben, az idő pedig szekundum egységben értendő. Ekkor a közeg…

   a) homogén és lineáris b) inhomogén és nemlineáris
   c) inhomogén és lineáris d) homogén és nemlineáris

4. Határozza meg az r_1 = 1 cm, r_2 = 3 cm sugarakkal jellemzett $\sigma = 10^{-5}$ S/m vezetőképességű szigetelővel kitöltött koaxiális kábel 2 m hosszúságú szakaszának szivárgási ellenállását!

   a) 6,12 MΩ b) 240 Ω c) 1365 Ω d) 8,74 kΩ

5. Egy a = 0,3 m oldalú négyzet középpontján átmenő, a négyzet síkjára merőleges, igen hosszú vezetőben I = 2 A áram folyik. Határozza meg a mágneses térerősségnek a négyzet egy oldalára vett vonal menti integrálját!

   a) 0,6 A/m b) 2 A c) 0,5 A d) 2 A/m

6. Milyen hosszú az a végén rövidre zárt, Z_0 = 75 Ω hullámimpedanciájú, ideális, légszigetelésű távvezeték, amelynek bemeneti impedanciája f = 100 MHz frekvencián Z_B = j120 Ω, ha tudjuk, hogy a hullámhossznál rövidebb, de a hullámhossz felénél hosszabb?

   a) 2,51 m b) 0,48 m c) 1,98 m d) 0,76 m

7. Egy veszteségmentes, légszigetelésű távvezeték hosszegységre eső induktivitása $L' = 0{,}8\cdot10^{-3}$ H/km. Határozza meg a vezeték hullámimpedanciáját!

   a) 50 Ω b) 240 Ω c) 75 Ω d) 120 Ω

8. Közelítőleg hányszorosára növekszik az egyenáramú ellenálláshoz képest egy 20 mm átmérőjű hengeres alumínium vezető ellenállása 5 kH frekvencián? (σ_{Al} = 35 MS/m)

   a) $R/R_0 \approx 4$ b) $R/R_0 \approx 2$ c) $R/R_0 \approx 10$ d) $R/R_0 \approx 0{,}5$

9. Cirkulárisan polarizált síkhullám terjed a derékszögű koordinátarendszer z tengelye irányában. A t = 0 pillanatban a z = 0 sík minden pontjában az elektromos tér y irányú rendezője E_x = 2 V/m, y irányú rendezője E_y = 0 V/m. Mekkora az elektromos tér y irányú rendezőjének abszolútértéke ugyanebben a pollanatban a z = λ/6 sík pontjaiban? (λ a hullámhossz)

   a) 1,41 V/m b) 1,73 V/m c) 0,87 V/m d) 0,71V/m

10. Egy levegőben álló Hertz-dipólus tengelye z irányba mutat. Elsugárzott teljesítménye P_S = 300 mW. Határozza meg a Poynting-vektor időbeli átlagát az x = 100 m, y = 100 m, z = 100 m helyen. (Az irányhatás D = 1,5.)

    a) 0,389 $\mu W/m^2$ b) 0,597 $\mu W/m^2$ c) 0,796 $\mu W/m^2$ d) 0,895 $\mu W/m^2$

Megoldások

1. A gömb és a végtelen távoli pont potenciálkülönbsége adja a két pont közötti feszültséget, mely ponttöltés esetén az elektrosztatika Gauss-törvényéből számítható:

$$\oint_A \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{dA} = \int_V \boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{dV}$$

Legyen a vizsgált zárt felület egy gömb, melynek x a sugara. Úgy vessszük fel a gömbfelületet, hogy annak középpontjába a töltött fémgömb kerüljön, így a villamos tér erővonalai sugárirányban kifelé mutatnak, amely megegyezik a gömbfelület normálisának irányával. Így a skaláris szorzás egyszerű szorzássá szelídül. A térfogaton belüli össztöltés Q.

$$E\varepsilon 4x^2\pi = Q$$

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{x^2}$$

A feszültség felírható a villamos térerősség vonal szerinti integráljával, a referenciapont a végtelen távoli pont.

$$\Phi - \Phi_\infty = U = \int_L \boldsymbol{Edl} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left[-\frac{1}{x}\right]_R^\infty = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{R}$$

A töltés kifejezhető a potenciálkülönbséggel:

$$Q = (\Phi - \Phi_\infty)4\pi\varepsilon_0 R = \boldsymbol{-278pC}$$

2. Azokkal a felületekkel, ahol a Neumann peremfeltétel szerint $\partial\Phi/\partial n = 0$, nem kell foglalkozni, mert ha a potenciálnak nincs normális irányú megváltozása, akkor nincs az elektromos térnek a felületre normális komponense. A 3-4. felületeken a potenciált írtuk elő, mely a meglehetősen hosszú megfogalmazású feladatot egy légtöltésű síkkondenzátor feladattá egyszerűsíti, ahol a lemezek távolsága d. A homogén térre a Gauss-törvényt levezetve a térerősség és feszültség között egyszerű formulát kapunk:

$$E = \frac{U}{d}$$

A térfogatban tárolt elektrosztatikus energia az energiasűrűség térfogati integráljából nyerhető ki:

$$W = \int_V w\, dV = \int_V \frac{1}{2}\varepsilon E^2 dV = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 a^3 = \boldsymbol{11,06pJ}$$

3. A közeg **inhomogén és lineáris**. Inhomogén, mert $\varepsilon(y)$ az y koordináta függvénye. Lineáris, mert akkor lenne nemlineáris, ha $\varepsilon(E)$ a térerősség függvénye lenne.

4. Használjuk az analógiát az elektrosztatikával ($\varepsilon \rightarrow \sigma$, $Q \rightarrow I$)! Vegyünk föl egy henger alakú felületet, mely a koaxiális kábel belső erétől az árnyékolásig tágul! Ekkor a térerősség az alábbi:

$$\oint_A \boldsymbol{EdA} = \frac{I}{\sigma}$$

A felület *x* sugarú, *l* hosszú henger felülete, és mivel a palástra merőleges a térerősség minden irányban, a skaláris szorzásból egyszerű szorzás lesz:

$$E 2x\pi l = \frac{I}{\sigma}$$

$$E = \frac{I}{2\pi l\sigma}\frac{1}{x}$$

A feszültség a térerősség vonalintegráljából számolható, ami a belső és külső sugár között (tetszőleges útvonalon) halad:

$$U = \int_{r_1}^{r_2} \boldsymbol{Edl} = \frac{I}{2\pi l\sigma}\int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{x} dl = \frac{I}{2\pi l\sigma}[\ln(x)]_{r_1}^{r_2} = \frac{I}{2\pi l\sigma}\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

Innen a szivárgási ellenállás könnyen számolható:

$$R = \frac{U}{I} = \frac{1}{2\pi l\sigma}\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) = \boldsymbol{8,74k\Omega}$$

5. A feladat egyik trükkje a megfogalmazásban volt. Nem mágneses térerősséget kellett számolni, hanem annak vonalintegrálját. Miven nincs eltolási áramsűrűség, az egész vezetőhurokra a vonalintegrálja:

$$\oint_L \boldsymbol{Hdl} = \int_A \boldsymbol{JdA} = I$$

A vezetőhurok negyedére pedig:

$$\int_{\frac{L}{4}} \boldsymbol{Hdl} = \frac{I}{4} = \boldsymbol{0,5A}$$

6. A bemeneti impedancia számítható az ismert képletből. Mivel a lezárás rövidzár, ezért $Z_2 = 0$.

$$Z_{be} = Z_0 \frac{Z_2 + Z_0 j \tan \beta l}{Z_0 + Z_2 j \tan \beta l} = Z_0 j \tan \beta l$$

Ebből számítható:

$$\beta l = 1{,}012 + k\pi$$

Tudjuk, hogy $\lambda = \frac{c}{f} = 3m$. Tudjuk, hogy $\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = 2{,}094 \frac{\text{rad}}{\text{m}}$. Ki kell használunk a periodikusságot is: $k = 1$ esetén esik a távvezeték hossza a $\frac{\lambda}{2} < l < \lambda$ tartományba.

$$l = \frac{1{,}012 + \pi}{\frac{2\pi}{\lambda}} = \mathbf{1{,}983m}$$

7. Ideális távvezeték esetén a terjedési sebesség: $v = c = \frac{1}{\sqrt{L'C'}}$. *L'* ismeretében *C'* kifejezhető a fénysebességből:

$$C' = \frac{1}{L'c^2}$$

Ideális távvezetékre a hullámimpedancia számítása egyszerű:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L'}{C'}} = \mathbf{240\Omega}$$

8. Váltakozó ellenállást úgy számolhatunk a behatolási mélység ismeretében, mintha a behatolási mélységig folyna konstans, irányfüggetlen áram. A behatolási mélységet a kör pereméről számoljuk a belseje felé, és a használható formula: $A = 2R\pi\delta$. Mivel az R sugár a d átmérőnek a fele, a váltakozó áramú ellenállás közvetlenül számolható:

$$R = \frac{l}{\sigma A} = \frac{l}{\sigma 2R\pi\delta}$$

A behatolási mélység adott frekvencián adott anyagra számolható:

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{f\pi\mu\sigma}}$$

A váltakozó áramú és egyenáramú ellenállás aránya:

$$\frac{R}{R_0} = \frac{\frac{l}{\sigma 2R\pi\delta}}{\frac{l}{\sigma A_0}} = \frac{A_0}{2R\pi\delta} = \frac{R^2\pi}{2R\pi\sqrt{\frac{1}{f\pi\mu\sigma}}} = \frac{R}{2\sqrt{\frac{1}{f\pi\mu\sigma}}} = 4{,}15 \approx \mathbf{4}$$

9. A cirkuláris polarizáció esetén az E_x és E_y térerősség komponensek összege az x-y síkon egy körvonalon forog z függvényében. Mivel a z = 0 pontban csak x irányú komponens van, ez megadja a kör sugarát: $|E| = 2\frac{V}{m}$. A $z = \frac{\lambda}{6}$ távolság egy $\frac{360°}{6} = 60°$-os forgatásnak felel meg a körön. Az y komponens számolható:

$$E_y = |E| \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}|E| = \frac{\sqrt{3}}{2}2 = \mathbf{1,732}\,\frac{\boldsymbol{V}}{\boldsymbol{m}}$$

10. A feladat egy olyan csavart tartalmaz, mely egyenesen félrevezeti a hallgatóságot, ezért úgy döntöttem, hogy a szokásosnál is részletesebb megoldást készítek hozzá.

Az első csapdába a hallgatók egy része a feladat értelmezésénél futott bele: a Ponyting-vektor időátlaga ($S_{időátl}$) és térátlaga ($S_{térátl}$ = S_{izo}) két különböző dolog. Az elektromos térerősséghez hasonlóan a teljesítménysűrűségnek is van egy ϑ szög szerinti irányfüggése. (ϑ a gömbi koordináta-rendszerben szereplő elevációs szög.) Hertz-dipólus esetén ez az alábbi módon határozható meg:

$$S_{időátl}(\vartheta) = S_{max} \sin^2(\vartheta)$$

Ahol S_{max} a főirányban sugárzott teljesítménysűrűség időbeli átlaga. Hertz-dipólus esetén a főirány a tengelyére merőleges irány ($\vartheta = 90°$). A szinusz négyzetes függésből az is következik, hogy a tengelye irányában nem sugároz, nem áramlik teljesítmény ($\vartheta = 0°$).

Az izotróp (irányfüggetlen) antenna olyan antenna, mely minden irányban egyformán sugároz, vagyis a kisugárzott teljesítmény gömbfelületen oszlik szét. Az izotróp antenna teljesítménysűrűsége meghatározható az $S_{izo} = \frac{P_S}{4d^2\pi}$ képlet alapján, ahol P_S a kisugárzott teljesítmény, d pedig annak a pontnak a távolsága, ahol vizsgálódunk. (Vagyis a gömb sugara.)

Az izotróp antenna és a Hertz-dipólus között az irányhatás teremt kapcsolatot: a Hertz-dipólus irányhatása az antennából sugárzó térbeli(!) maximális és átlagos teljesítménysűrűségnek aránya. Az átlagos teljesítménysűrűség pedig megegyezik az izotróp antenna kisugárzott teljesítménysűrűségével. A Hertz-dipólusra:

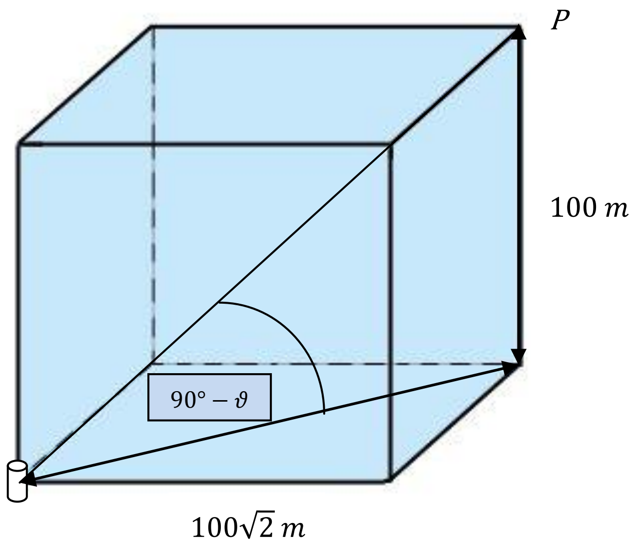
$$D = \frac{S_{max}}{S_{térátl}} = \frac{S_{max}}{S_{izo}} \approx 1{,}5$$

Ha a kisugárzott teljesítményt szétosztjuk egy d sugarú gömbfelületen, (ahogyan az izotróp antenna is teszi), majd az irányhatással megszorozzuk, megkapjuk a Hertz-dipólus teljesítménysűrűségét a főirányban. Végül, ha megszorozzuk az irányfüggéssel, akkor megkapjuk a Hertz-dipólus ϑ szöghöz tartozó teljesítménysűrűségét.

$$S_{időátl} = \frac{P_S}{4d^2\pi} D \sin^2(\vartheta)$$

A távolság számolható a koordinátákból: $d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 100\sqrt{3}m.$

A ϑ szög számolható a koordinátákból. Mivel a vizsgált pont egy 100 m oldalhosszúságú kocka átellenes csúcsában van, szögfüggvények segítségével kihozható:



$$90° - \vartheta = \tan^{-1}\frac{100}{100\sqrt{2}} = \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\vartheta \approx 54{,}72°$$

$$\sin^2(\vartheta) = \frac{2}{3}$$

Már csak a behelyettesítés van hátra:

$$S_{időátl} = \frac{P_S}{4d^2\pi} D\sin^2(\vartheta) = \frac{0{,}3W}{4\cdot 30000m\cdot\pi} 1{,}5\cdot\frac{2}{3} = \mathbf{0{,}796}\,\frac{\boldsymbol{\mu W}}{\boldsymbol{m^2}}$$

A Poynting-vektor térátlaga az izotróp antenna Poynting-vektorával egyezik meg, időátlaga pedig a komplex amplitudók segítségével írható le. Tehát, amikor a jegyzetben azt látjuk, hogy $S_{átl}$, akkor nem árt tudni, hogy az idő- vagy térátlagot jelent éppen.

A feladat azért is becsapós, mert az irányhatás és az irányfüggés „véletlenül” kiejtik egymást, ezért olyan hallgatóknak is kijött a jó megoldás, akik egyáltalán nem is foglalkoztak a teljesítménysűrűség irányfüggésével, sőt, izotróp antennára számolták ki a feladatot, nem pedig Hertz-dipólusra. Tehát rossz szemlélettel jött ki sokaknál a jó megoldás, ami félreértésre adhat okot.