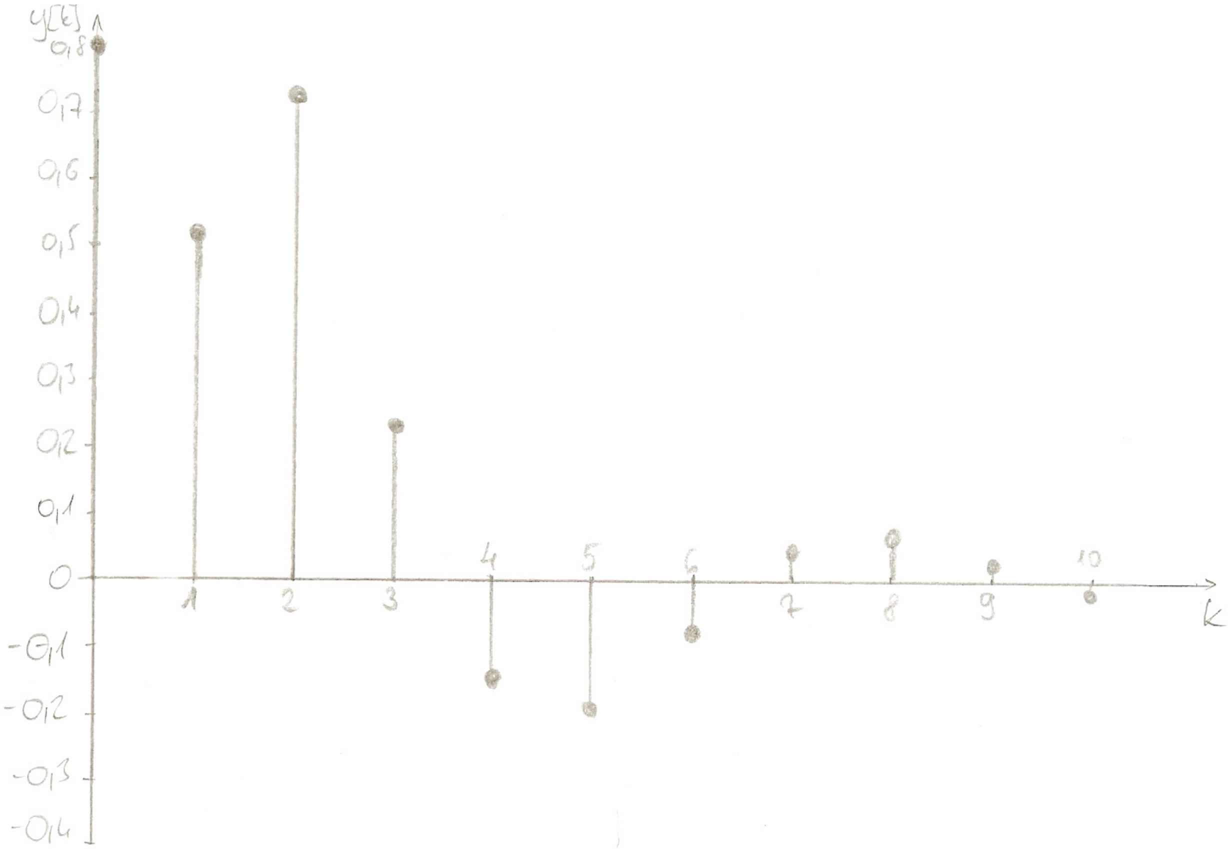
Erdei Bence
Z13UEY

1.3 Az impulzusválasz meghatározása

Lépésről lépésre módszerrel, az állapotváltozós leírásból:

k	u[k]	$x_1[k]$	$x_2[k]$	$x_3[k]$	y[k]
−1	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0,8
1	0	0,6	1	0,8	0,52
2	0	−0,153	−0,256	1,748	0,72
3	0	−0,335	−0,559	0,646	0,244
4	0	−0,124	−0,206	−0,365	−0,143
5	0	0,0701	0,116	−0,473	−0,1932
6	0	0,0908	0,151	−0,113	−0,06417
7	0	0,0217	0,0361	0,133	0,0393
8	0	−0,025	−0,0427	0,121	0,0518
9	0	−0,0234	−0,0388	0,0126	0,0168
10	0	−0,00243	−0,00405	−0,043	−0,0108



Erdei Bence
Z13W84

1.1 Állapotváltozós leírás normál alakja

$$x[k+1] = \underline{\underline{A}}\,\underline{x}[k] + \underline{B}\cdot u[k]$$
$$y[k] = \underline{C}^T \cdot \underline{x}[k] + D\cdot u[k]$$

A hálózati egyenletek:

$$x_1[k+1] = 0\cdot x_1[k] + 0\cdot x_2[k] + b\cdot g\cdot f\cdot x_3[k] + b\cdot u[k]$$
$$x_2[k+1] = 0\cdot x_1[k] + 0\cdot x_2[k] + g\cdot f\cdot x_3[k] + 1\cdot u[k]$$
$$x_3[k+1] = 1\cdot x_1[k] + c\cdot x_2[k] + e\cdot f\cdot x_3[k] + 0\cdot u[k]$$
$$y[k] = d\cdot x_1[k] + d\cdot c\cdot x_2[k] + (agf+hf+def)\cdot x_3[k] + a\cdot u[k]$$

Behelyettesítve az értékeket:

$$x_1[k+1] = -0{,}192\, x_3[k] + 0{,}6\cdot u[k]$$
$$x_2[k+1] = -0{,}32\, x_3[k] + 1\cdot u[k]$$
$$x_3[k+1] = 1\cdot x_1[k] + 0{,}7\cdot x_2[k] + 0{,}64\cdot x_3[k]$$
$$y[k] = 0{,}4\, x_1[k] + 0{,}28\cdot x_2[k] + 0{,}56\cdot x_3[k] + 0{,}8\cdot u[k]$$

1.2 Sajátértékek meghatározása

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -0{,}192 \\ 0 & 0 & -0{,}32 \\ 1 & 0{,}7 & 0{,}64 \end{pmatrix} \quad \underline{B} = \begin{pmatrix} 0{,}6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{C}^T = [0{,}4 \;\; 0{,}28 \;\; 0{,}56] \quad D = 0{,}8$$

MATLAB-bal:

$[M, la] = eig(A)$ $\Rightarrow$ a 3 sajátérték: 1. $0{,}32 + j0{,}56 = \lambda_2$ } komplex konjugált pár
2. $0{,}32 - j0{,}56 = \lambda_3$
3. $0 = \lambda_1$

GV-stabilitás feltétele: $|\lambda| < 1$ $\Longrightarrow$ $\underline{0{,}645 < 1}$ ✓, tehát a rendszer GV stabilis.

$\underline{0 < 1}$ ✓

Erdei Bence
Z13UP4

1.3. Az impulzusválasz analitikus alakja

$$h[k] = D\cdot\delta[k] + \varepsilon[k-1]\cdot\left(\underbrace{C^T\cdot \underline{\underline{L}}_1\cdot B}_{K_1}\cdot\lambda_1^{k-1} + \underbrace{C^T\cdot\underline{\underline{L}}_2\cdot B}_{K_2}\cdot\lambda_2^{k-1} + \underbrace{C^T\underline{\underline{L}}_3\cdot B}_{K_3}\cdot\lambda_3^{k-1}\right)$$

ahol $\underline{\underline{L}}_i$ az i-edik Lagrange mátrix.

$$\underline{\underline{L}}_i = \prod_{\substack{p=1\\p\neq i}}^{n} \frac{\underline{\underline{A}} - \lambda_p\cdot\underline{\underline{I}}}{\lambda_i - \lambda_p}$$

Ezeket a mátrixokat MATLAB-bal határoztam meg.

$K_1 = 6{,}95\cdot 10^{-5} \approx 0$. Ezt is ki kell számolni, bár $\lambda_1 = 0$, mégis 0^k esetben ez egyszeres szorzót jelentene, $k\neq 0$ esetén mindig 0. Így hogy a konstans csak a számítógép pontatlansága miatt nem 0, ezért ezt a tagot nem kell figyelembe venni.

$K_2 = 0{,}26 - 0{,}501j = 0{,}564\cdot e^{-j62{,}57°}$
$K_3 = 0{,}26 + 0{,}501j = 0{,}564\cdot e^{j62{,}57°}$
$\lambda_1 = 0$
$\lambda_2 = 0{,}644\cdot e^{j60{,}25°}$
$\lambda_3 = 0{,}644\cdot e^{-j60{,}25°}$

$$h[k] = 0{,}8\cdot\delta[k] + \varepsilon[k-1]\cdot\left(0{,}564\cdot e^{-j62{,}57°}\cdot 0{,}644^{k-1}\cdot e^{+j60{,}25\cdot(k-1)} + 0{,}564\cdot e^{j62{,}57°}\cdot 0{,}644^{k-1}\cdot e^{-j60{,}25\cdot(k-1)}\right) =$$

(Euler ös.)

$$\underline{\underline{h[k] = 0{,}8\delta[k] + \varepsilon[k-1]\cdot\left(1{,}128\cdot 0{,}644^{k-1}\cdot\cos(60{,}25°(k-1) - 62{,}57°)\right)}}$$

Ellenőrzés:

$k=0$ $\quad h[0] = 0{,}8\cdot\delta[0] = 0{,}8$ ✓

$k=1$ $\quad h[1] = 1\cdot(1{,}128\cdot 1\cdot\cos(-62{,}57°)) = 0{,}52$ ✓

$k=2$ $\quad h[2] = 1\cdot(1{,}128\cdot 0{,}644\cdot\cos(60{,}25° - 62{,}57°)) = 0{,}72$ ✓

$k=3$ $\quad h[3] = 1\cdot(1{,}128\cdot 0{,}644^2\cdot\cos(60{,}25°\cdot 2 - 62{,}57°)) = 0{,}244$ ✓

Erdei Bence
Z13U8Y

$\boxed{1.4}$ Diszkrét konvolúció

$$u[k] = \varepsilon[k] \cdot (-3 + 2 \cdot 0{,}75^{k})$$

Diszkrét konvolúció:

$$y[k] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} u[i] \cdot h[k-i]$$

Mivel a jel belépő, és a rendszer kauzális, elég 0-tól k-ig szummázni:

$$y[k] = \sum_{i=0}^{k} u[i] \cdot h[k-i]$$

A gerjesztés értékei:

k	$u[k]$
0	-1
1	$-1{,}5$
2	$-1{,}875$
3	$-2{,}156$
4	$-2{,}367$
5	$-2{,}525$

$k=0$ $\quad y[0] = u[0] \cdot h[0] = -1 \cdot 0{,}8 = \underline{\underline{-0{,}8}}$

$y[1] = u[0] \cdot h[1] + u[1] \cdot h[0] = -1 \cdot 0{,}52 + (-1{,}5 \cdot 0{,}8) = \underline{\underline{-1{,}72}}$

$y[2] = u[0] \cdot h[2] + u[1] \cdot h[1] + u[2] \cdot h[0] = -1 \cdot 0{,}72 + (-1{,}5 \cdot 0{,}52) + (1{,}875 \cdot 0{,}8) =$
$= \underline{\underline{-3}}$

$y[3] = u[0] \cdot h[3] + u[1] \cdot h[2] + u[2] \cdot h[1] + u[3] \cdot h[0] =$

$= -1 \cdot 0{,}244 + (-1{,}5 \cdot 0{,}72) + (-1{,}875 \cdot 0{,}52) + (-2{,}156 \cdot 0{,}8) = \underline{\underline{-4{,}02}}$

$y[4] = u[0] \cdot h[4] + u[1] \cdot h[3] + u[2] \cdot h[2] + u[3] \cdot h[1] + u[4] \cdot h[0] =$
$= -1 \cdot -0{,}143 + (-1{,}5 \cdot 0{,}244) + (-1{,}875 \cdot 0{,}72) + (-2{,}156 \cdot 0{,}52) + (-2{,}367 \cdot 0{,}8) = \underline{\underline{-4{,}587}}$

$y[5] = u[0] \cdot h[5] + u[1] \cdot h[4] + u[2] \cdot h[3] + u[3] \cdot h[2] + u[4] \cdot h[1] + u[5] \cdot h[0] =$
$= (-1 \cdot -0{,}193) + (-1{,}5 \cdot -0{,}143) + (-1{,}875 \cdot 0{,}244) + (-2{,}156 \cdot 0{,}72) + (-2{,}367 \cdot 0{,}52) + (-2{,}525 \cdot 0{,}8) = \underline{\underline{-4{,}85}}$

Erdei Bence
ZIJUF4

2.1 Átviteli karakterisztika

Az állapotváltozós leírás átírva frekvenciatartományra:

$$\overline{X_1}\cdot e^{j\vartheta} = -0{,}192\,\overline{X_3} + 0{,}6\,\overline{U}$$
$$\overline{X_2}\cdot e^{j\vartheta} = -0{,}32\,\overline{X_3} + 1\,\overline{U}$$
$$\overline{X_3}\cdot e^{j\vartheta} = \overline{X_1} + 0{,}7\,\overline{X_2} + 0{,}64\,\overline{X_3}$$
$$\overline{Y} = 0{,}4\,\overline{X_1} + 0{,}28\,\overline{X_2} + 0{,}56\cdot\overline{X_3} + 0{,}8\,\overline{U}$$

Ebből $\overline{X_1}, \overline{X_2}, \overline{X_3}$-t kiküszöbölve megkapjuk az átviteli karakterisztikát.

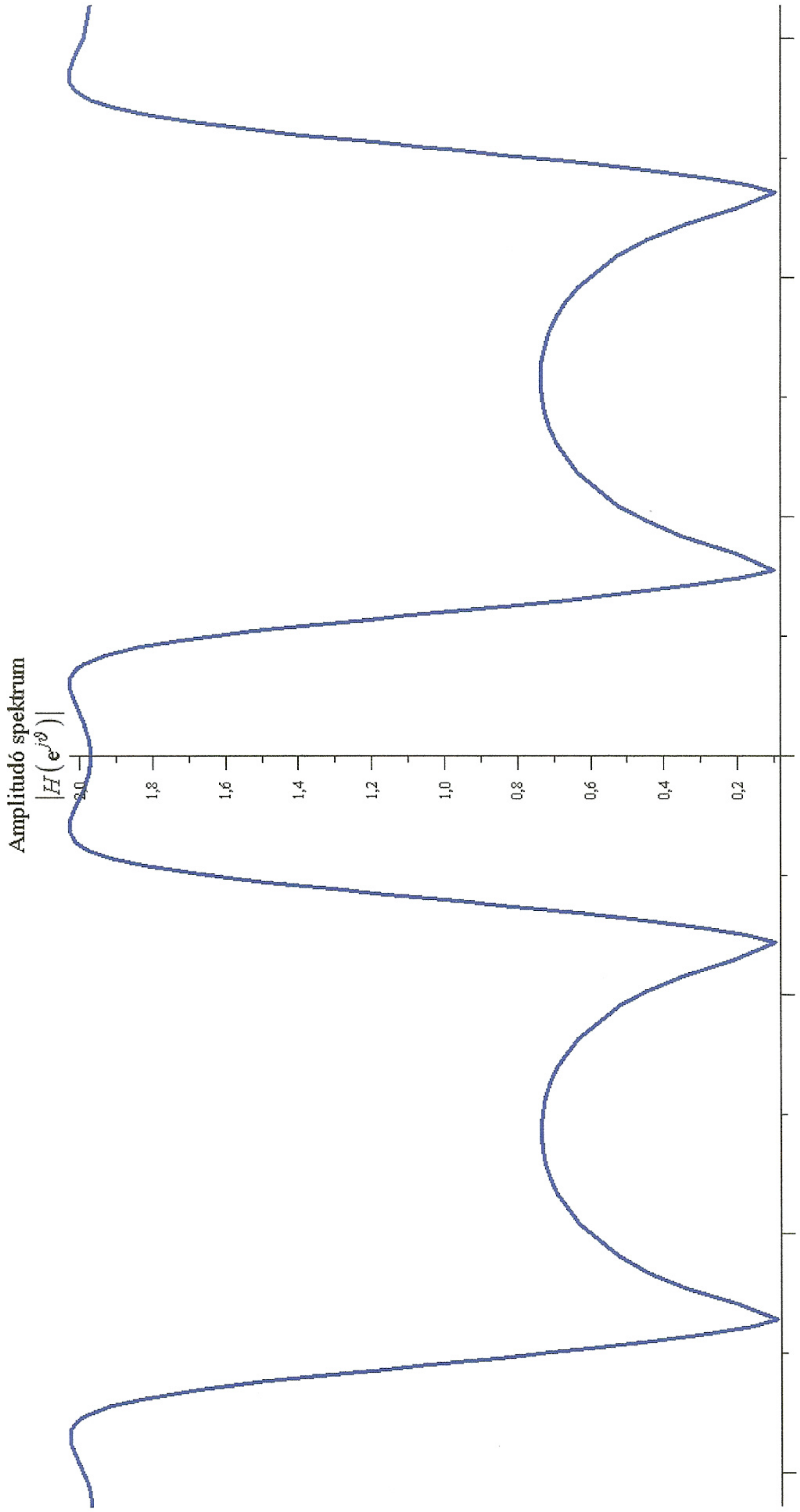
MATLAB-bal:

```
>> [sz, nev] = ss2tf(A, B, C, D)
   sz = [0,8  0,008  0,72  0]
  nev = [1  -0,64  0,416  0]
```

Az átviteli karakterisztikát ebből már felírhatjuk:

$$H(e^{j\vartheta}) = \frac{\overline{Y}}{\overline{U}} = \frac{0{,}8 + 0{,}008\cdot e^{-j\vartheta} + 0{,}72\cdot e^{-2j\vartheta}}{1 - 0{,}64\,e^{-j\vartheta} + 0{,}416\cdot e^{-2j\vartheta}}$$

Erdei Bence
Z13WMY



6

Erdei Bence
Z13UP4

2.2 Periodikus jelre adott válasz

$$u[k]=3\cdot\cos\left(\frac{2\pi}{19}k-\frac{\pi}{12}\right)$$

$$u[k]=3\cdot\cos(0{,}105\pi k-0{,}0833\pi)$$

$$\overline{U}=3\cdot e^{j0{,}0833\pi}$$

$$H(e^{j0{,}0833\pi})=\frac{0{,}8+0{,}008\cdot e^{-j0{,}0833\pi}+0{,}72\cdot e^{-2j0{,}0833\pi}}{1-0{,}64e^{-j0{,}0833\pi}+0{,}416\cdot e^{-2j0{,}0833\pi}}=\underline{2{,}02\cdot e^{-j0{,}03398}}$$

$$\overline{Y}=\overline{H}\cdot\overline{U}=3\cdot e^{j0{,}0833}\cdot 2{,}02\cdot e^{-j0{,}03395}=6{,}06\cdot e^{j(0{,}0833-0{,}03398)}=\underline{6{,}06\cdot e^{j0{,}04935}}$$

A válasz: $y_g=6{,}06\cos(0{,}105\pi k+0{,}04935)$

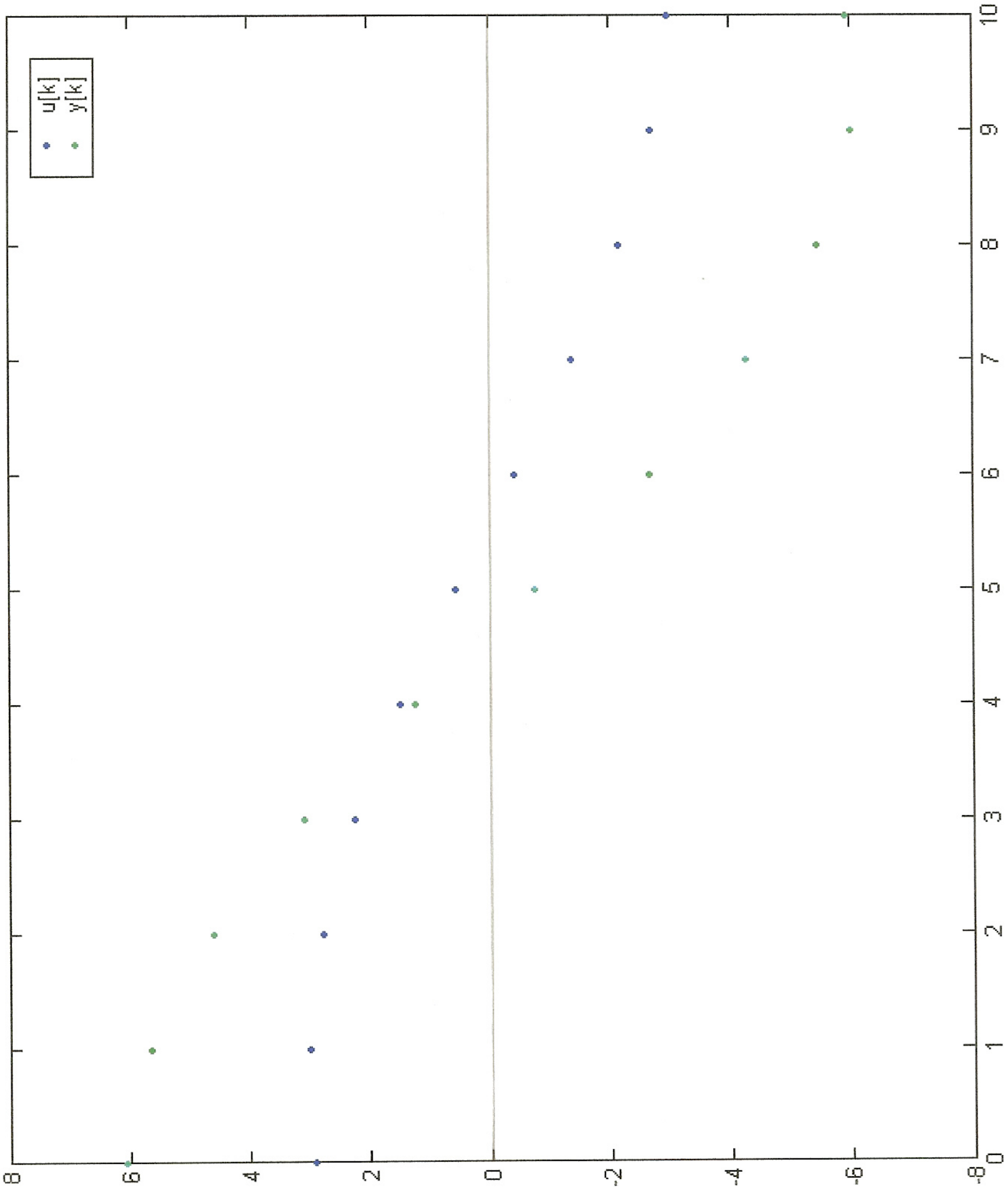
A válasz akkor periodikus, ha a gerjesztőjel körfrekvenciája π ~~egész~~ racionális többszöröse.

$$\frac{2\pi}{19}=\vartheta_0=\frac{2\pi}{L}\quad\rightarrow L=19\ \rightarrow \text{a periódus}$$

A $y_g[k]$ jelnek csak akkor van fizikai tartalma, ha a rendszer GV-stabilis, ami teljesül.

k	u[k]	$y_g[k]$
0	2,897	6,052
1	2,992	5,629
2	2,763	4,599
3	2,234	3,073
4	1,464	1,216
5	0,534	-0,742
6	-0,452	-2,678
7	-1,391	-4,294
8	-2,178	-5,447
9	-2,73	-6,013
10	-2,98	-5,931

Erdei Bence
Z13WPY



Erdei Bence
Z13UKY

2.3 Fourier sor meghatározása

k	0	1	2	3	4	5
u[k]	6	-4	-2	3	-5	7

$K=6 \quad \vartheta_0 = \frac{2\pi}{K} \Rightarrow \underline{\vartheta_0 = \frac{\pi}{3}}$

Az i-edik komplex Fourier együttható:

$$\overline{F_i} = \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} f[k] \cdot e^{-jik \cdot \vartheta_0}$$

$$\overline{F_0} = \frac{1}{6}[6-4-2+3-5+7] = 0{,}833$$

$$\overline{F_1} = \frac{1}{6}\left[6 \cdot e^{-j \cdot 1 \cdot 0 \cdot \frac{\pi}{3}} - 4e^{-j \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{\pi}{3}} - 2 \cdot e^{-j 1 \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{3}} + 3e^{-j 1 \cdot 3 \cdot \frac{\pi}{3}} - 5 \cdot e^{-j 1 \cdot 4 \cdot \frac{\pi}{3}} + 7e^{-j 5 \cdot \frac{\pi}{3}}\right] = 1{,}33 + 1{,}15j = 1{,}75e^{j0{,}71}$$

$$\overline{F_2} = 1{,}833 + 2{,}02j = 2{,}72 \cdot e^{j0{,}833}$$

$$\overline{F_3} = -1{,}16$$

$$\overline{F_4} = \overline{F_{6-4}}^* = \overline{F_2}^* = 1{,}833 - 2{,}02j = 2{,}72 \cdot e^{-j0{,}833}$$

$$\overline{F_5} = \overline{F_1}^* = 1{,}33 - 1{,}15j = 1{,}75 \cdot e^{-j0{,}71}$$

Valós együtthatók:

$F_i^A = 2\mathrm{Re}\{F_i^C\} \qquad F_i^B = -2\mathrm{Im}\{F_i^C\}$

$F_0 = 0{,}833$

$F_1^A = 2{,}66 \qquad F_1^B = -2{,}3$

$F_2^A = 3{,}66 \qquad F_2^B = -4{,}04$

$F_3^A = -1{,}16 \qquad F_3^B = 0$

Komplex alak: $u[k] = \sum_{i=0}^{K-1} \overline{F_i} \cdot e^{jki \cdot \vartheta_0}$

Valós alak: $u[k] = \sum_{i=0}^{K-1} \left(F_i^A \cos(i \vartheta_0 k) + F_i^B \sin(i \vartheta_0 k)\right)$

Komplex alak behelyettesítve:

$$u[k] = 0{,}833 + 1{,}75 \cdot e^{j0{,}71} \cdot e^{jk\frac{\pi}{3}} + 2{,}72 \cdot e^{j0{,}833} \cdot e^{jk\frac{2\pi}{3}} - 1{,}16 \cdot e^{jk\pi} + 2{,}72 \cdot e^{-j0{,}833} \cdot e^{jk\frac{4\pi}{3}} + 1{,}75 \cdot e^{-j0{,}71} \cdot e^{jk\frac{5\pi}{3}}$$

$$\underline{\underline{u[k] = 0{,}833 + 1{,}75\, e^{j0{,}71 + jk\frac{\pi}{3}} + 2{,}72 \cdot e^{j0{,}833 + jk\frac{2\pi}{3}} - 1{,}16 \cdot e^{jk\pi} + 2{,}72 \cdot e^{-j0{,}833 + jk\frac{4\pi}{3}} + 1{,}75 \cdot e^{-j0{,}71 + jk\frac{5\pi}{3}}}}$$

Valós alak:

$$\underline{\underline{u[k] = 0{,}833 + 2{,}66 \cos\left(\frac{\pi}{3}k\right) - 2{,}3 \sin\left(\frac{\pi}{3}k\right) + 3{,}66 \cos\left(\frac{2\pi}{3}k\right) - 4{,}04 \sin\left(\frac{2\pi}{3}k\right) - 1{,}16 \cos(\pi k)}}$$

Ellenőrzés: a diszkrét Fourier sor mindig <u>pontosan</u> előállítja az eredeti (gerjesztő) jelet.

Pl. $k = 0$-ban $u[k] = 6$

Valós alak:

$$u[k] = 0{,}833 + 2{,}66 + 3{,}66 - 1{,}16 = 5{,}993 \approx 6 \rightsquigarrow \text{valóban} \checkmark$$

Mérnöki alak:

$$u[k] = 0{,}833 + 3{,}51 \cos\left(\frac{\pi}{3}k + 0{,}713\right) + 5{,}45\left(\frac{2\pi}{3}k + 0{,}844\right) - 1{,}16 \cos(\pi k)$$

2.4 Periodikus gerjesztésre adott válasz

Erdei Bence
Z13UPY

k	0	1	2	3	4	5
$u[k]$	6	-4	-2	3	-5	7

Meghatározzuk az átviteli karakterisztika segítségével az átviteli értékeket a különböző frekvenciákra.

$\vartheta = 0$

$$H(e^{j\cdot 0}) = \frac{Y}{U} = \frac{0{,}8 + 0{,}008\cdot e^{-j0} + 0{,}72\cdot e^{-2\cdot 0\cdot j}}{1 - 0{,}64\cdot e^{-j0} + 0{,}416\cdot e^{-2j0}} = 1{,}97$$

$\vartheta = \frac{\pi}{3}$

$$H(e^{j\frac{\pi}{3}}) = 1{,}511\cdot e^{-j1{,}34}$$

$\vartheta = \frac{2\pi}{3}$

$$H(e^{j\frac{2\pi}{3}}) = 0{,}524\cdot e^{j0{,}267}$$

$\vartheta = \pi$

$$H(e^{j\pi}) = 0{,}735$$

$$u[k] = 0{,}833 + 3{,}51\cos\left(\frac{\pi}{3}k + 0{,}713\right) + 5{,}45\left(\frac{2\pi}{3}k + 0{,}844\right) - 1{,}16\cos(\pi k)$$

$\vartheta = 0$

$$C_1 = 0{,}833\cdot 1{,}97 = 1{,}64$$

$\vartheta = \frac{\pi}{3}$

$$C_2 = 3{,}51\cdot 1{,}511\cdot e^{-j(1{,}34+0{,}713)} = 5{,}3\cdot e^{-j\,2{,}05}$$

$\vartheta = \frac{2\pi}{3}$

$$C_3 = 5{,}45\cdot 0{,}524\cdot e^{j(0{,}267+0{,}844)} = 2{,}855\cdot e^{j(1{,}11)}$$

$\vartheta = \pi$

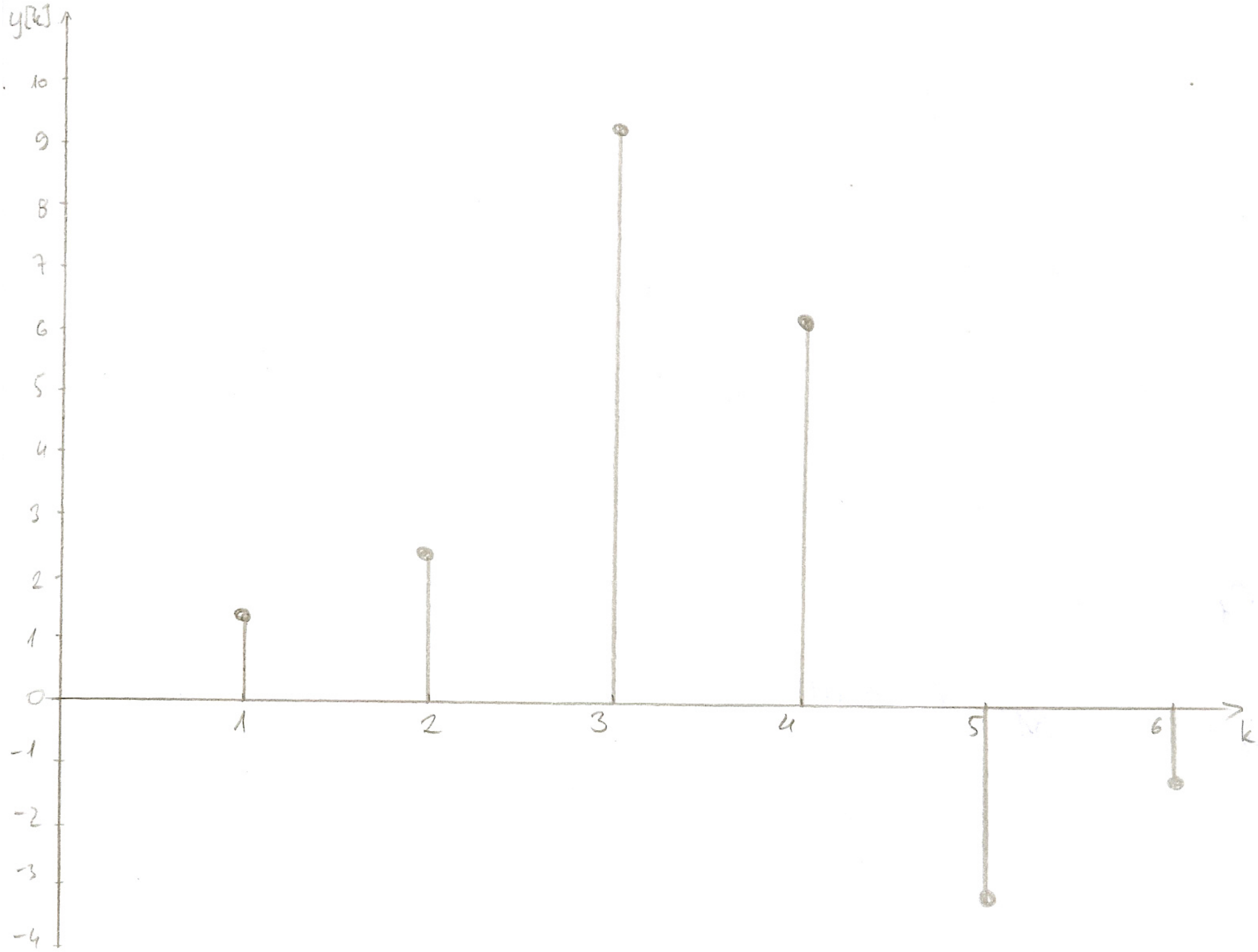
$$C_4 = 0{,}735\cdot 1{,}16 = 0{,}8526$$

A válasz tehát:

$$\underline{y[k] = 1{,}64 + 5{,}3\cos\left(\frac{\pi}{3}k - 2{,}05\right) + 2{,}855\cdot\cos\left(\frac{2\pi}{3}k + 1{,}11\right) + 0{,}8526}$$

Egy periódus értékei:

k	y[k]
0	1,318
1	2,494
2	9,367
3	6,205
4	-3,207
5	-1,222



Erdei Bence
ZI3WP4

2.5 Az impulzusválasz Fourier transzformáltja

$$h[k]=0{,}8\delta[k]+\varepsilon[k-1]\cdot\left(1{,}128\cdot 0{,}644^{k-1}\cdot\cos\left(60{,}25^\circ(k-1)-62{,}57^\circ\right)\right)$$

Addíciós tétel: $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

Ezt felhasználva a konstansok összevonása után:

$$h[k]=0{,}8\delta[k]+\varepsilon[k-1]\left(0{,}429\cdot 0{,}644^{k-1}\cdot\cos\left(60{,}25^\circ(k-1)\right)+1{,}04\cdot 0{,}644^{k-1}\sin\left(60{,}25^\circ(k-1)\right)\right)$$

Tudjuk, hogy:

$$\mathcal{F}\{\delta[k]\}=1$$

$$\mathcal{F}\{\varepsilon[k]\,a^k\cos(\vartheta k)\}=\frac{1-a\cos\vartheta\cdot e^{-j\vartheta}}{1-2a\cos\vartheta\cdot e^{-j\vartheta}+a^2e^{-j2\vartheta}}$$

$$\mathcal{F}\{\varepsilon[k]\,a^k\sin(\vartheta k)\}=\frac{a\sin\vartheta\cdot e^{-j\vartheta}}{1-2a\cos\vartheta\cdot e^{-j\vartheta}+a^2e^{-j2\vartheta}}$$

Eltolási tétel: $\mathcal{F}\{x[k-n]\}=e^{-jn\vartheta}\cdot X(e^{j\vartheta})$

$$\mathcal{F}\{\varepsilon[k-1]\cdot 0{,}429\cdot 0{,}644^{k-1}\cos\left(60{,}25^\circ(k-1)\right)\}=\frac{0{,}291\cdot e^{-j\vartheta}}{1-0{,}64e^{-j\vartheta}+0{,}414e^{-2j\vartheta}}\cdot e^{-j\vartheta}$$

$$\mathcal{F}\{\varepsilon[k-1]\cdot 1{,}04\cdot 0{,}644^{k-1}\sin\left(60{,}25^\circ(k-1)\right)\}=\frac{0{,}581\,e^{-j\vartheta}}{1-0{,}64e^{-j\vartheta}+0{,}414e^{-2j\vartheta}}\cdot e^{-j\vartheta}$$

$$\mathcal{F}\{\delta[k]\cdot 0{,}8\}=0{,}8$$

$$\underline{\underline{\mathcal{F}\{h[k]\}=0{,}8+\left(\frac{0{,}291\cdot e^{-j\vartheta}+0{,}581\cdot e^{-j\vartheta}}{1-0{,}64e^{-j\vartheta}+0{,}414e^{-2j\vartheta}}\right)\cdot e^{-j\vartheta}}}$$

Ez megegyezik az átviteli karakterisztikával, eltérések a számítási hibákból adódnak

Erdei Bence
Z13UU8Y

$\boxed{2.6}$ Rendszeregyenlet felírása az átviteli karakterisztikából

$$H(e^{j\vartheta}) = \frac{\overline{Y}}{\overline{U}} = \frac{0{,}8 + 0{,}008e^{-j\vartheta} + 0{,}72 \cdot e^{-2j\vartheta}}{1 - 0{,}64e^{-j\vartheta} + 0{,}416 \cdot e^{-2j\vartheta}}$$

$$Y - Y \cdot 0{,}64e^{-j\vartheta} + Y \cdot 0{,}416 \cdot e^{-2j\vartheta} = 0{,}8U + 0{,}008Ue^{-j\vartheta} + 0{,}72Ue^{-2j\vartheta}$$

Mivel az $e^{-nj\vartheta}$ · n-el való eltolás az időben:

$$y[k] - 0{,}64y[k-1] + 0{,}416y[k-2] = 0{,}8u[k] + 0{,}008u[k-1] + 0{,}72u[k-2]$$

$$\underline{\underline{y[k] = 0{,}8u[k] + 0{,}008u[k-1] + 0{,}72u[k-2] + 0{,}64y[k-1] - 0{,}416y[k-2]}}$$

3.1 Átviteli függvény

A z-tartománybeli egyenletek:

$$\overline{X}_1 = -0{,}192\,\overline{X}_3 z^{-1} + 0{,}6\,\overline{U} z^{-1}$$

$$\overline{X}_2 = -0{,}32\,\overline{X}_3 z^{-1} + 1\,\overline{U} z^{-1}$$

$$\overline{X}_3 = \overline{X}_1 z^{-1} + 0{,}7\,\overline{X}_2 z^{-1} + 0{,}64\,\overline{X}_3 z^{-1}$$

$$\overline{Y} = 0{,}4\,\overline{X}_1 + 0{,}28\,\overline{X}_2 + 0{,}56\,\overline{X}_3 + 0{,}8\,\overline{U}$$

Az átviteli karakterisztikából felírható az átviteli függvény, mert a rendszer kauzális, $e^{j\vartheta} = z$ behelyettesítéssel:

$$H(z) = \frac{\overline{Y}}{\overline{U}} = \frac{0{,}8 + 0{,}008 z^{-1} + 0{,}72 z^{-2}}{1 - 0{,}64 z^{-1} + 0{,}416 z^{-2}}$$

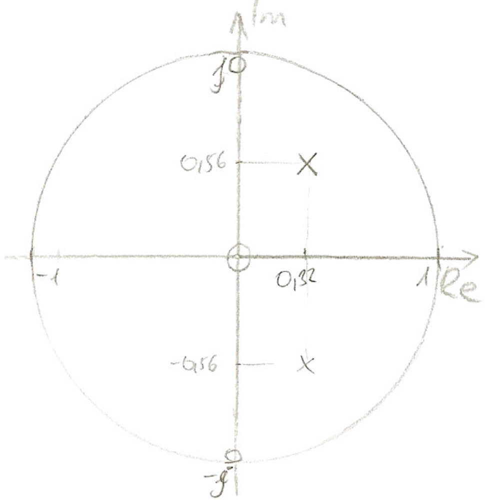
3.2 Pólus-zérus elrendezés

Pólusok: ahol a nevező 0.
MATLAB-bal: `>> roots(nev)`

$p_1 = 0$
$p_2 = 0{,}32 + 0{,}56j$
$p_3 = 0{,}32 - 0{,}56j$

Zérusok: ahol a számláló 0
`>> roots(sz)`

$s_1 = -0{,}005 + 0{,}95j$
$s_2 = -0{,}005 - 0{,}95j$
$s_3 = 0$



A rendszer GV-stabilis, mivel minden pólus az egységkörön belül található!

$$\sqrt{0{,}32^2 + 0{,}56^2} = 0{,}644 < 1$$

Erdei Bence
ZI3UKY

3.3 Inverz Z trasz formáció

$$H(z)=\frac{0{,}8z^2+0{,}008z+0{,}72}{z^2-0{,}64z+0{,}416}$$

$$Z^{-1}\{H(z)\}=h[k]$$

Először valódi törtfüggvényt csinálunk az átviteli karakterisztikából, polinomosztással.

$$(0{,}8z^2+0{,}008z+0{,}72):(z^2-0{,}64z+0{,}416)=0{,}8$$

$$\frac{-\;0{,}8z^2-0{,}512z+0{,}3328}{0{,}52z+0{,}387}$$

$$H(z)=\frac{0{,}52z+0{,}387}{z^2-0{,}64z+0{,}416}+0{,}8$$

Parciális törtekre bontunk:

$$\left(\frac{0{,}26-0{,}494j}{z-(0{,}32+0{,}56j)}+\frac{0{,}26+0{,}494j}{z-(0{,}32-0{,}56j)}\right)\cdot z\cdot z^{-1}+0{,}8$$

Tudjuk, hogy:
$$Z^{-1}\{1\}=\delta[k]$$
$$Z^{-1}\left\{\frac{z}{z-a}\right\}=a^k\cdot\varepsilon[k]$$
$$Z^{-1}\{X(z)\cdot z^{-r}\}=\varepsilon[k-r]\cdot x[k-r]\ \text{: eltolási tétel}$$

Az inverz z transzformált tehát:

$$h[k]=0{,}8\delta[k]+\varepsilon[k-1]\{(0{,}26-0{,}494j)\cdot(0{,}32+0{,}56j)^{k-1}+(0{,}26+0{,}494j)\cdot(0{,}32-0{,}56j)^{k-1}\}$$

Valós időfüggvénnyé alakítjuk: (Euler öf)

$$h[k]=0{,}8\delta[k]+\varepsilon[k-1]\{0{,}558\cdot e^{-j1{,}086}\cdot 0{,}644^{k-1}\cdot e^{j1{,}051(k-1)}+0{,}558\cdot e^{j1{,}086}\cdot 0{,}644^{k-1}\cdot e^{-j1{,}051(k-1)}\}$$

$$h[k]=0{,}8\delta[k]+\varepsilon[k-1]\{2\,\mathrm{Re}\{0{,}558\cdot e^{j-1{,}086}\cdot 0{,}644^{k-1}\}\cdot\cos(1{,}051(k-1)-1{,}086)\}$$

$$\underline{\underline{h[k]=0{,}8\delta[k]+\varepsilon[k-1]\cdot\{1{,}116\cdot 0{,}644^{k-1}\cdot\cos(1{,}051(k-1)-1{,}086\}}}$$

Az eredmény megegyezik az 1.3 feladatban kapottal, csak itt most radiánban szerepelnek a szögek, és egy kis eltérés a számítási pontatlanságokból adódik.

Ellenőrzés:

$$(0{,}8+0{,}008z^{-1}+0{,}72z^{-2}):(1-0{,}64z^{-1}+0{,}416z^{-2}) = \underline{\underline{0{,}8+0{,}52z^{-1}+0{,}7208z^{-2}+0{,}244z^{-3}-0{,}144z^{-4}-0{,}193z^{-5}}}$$

$$-\;0{,}8-0{,}512z^{-1}+0{,}332z^{-2}$$

$$0{,}52z^{-1}+0{,}388z^{-2}$$

$$-\;0{,}52z^{-1}-0{,}3328z^{-2}+0{,}216z^{-3}$$

$$0{,}7208z^{-2}-0{,}216z^{-3}$$

$$-\;0{,}7208z^{-2}-0{,}4608z^{-3}+0{,}3z^{-4}$$

$$0{,}244z^{-3}-0{,}3z^{-4}$$

$$-\;0{,}244z^{-3}-0{,}156z^{-4}+0{,}101z^{-5}$$

$$-0{,}144z^{-4}-0{,}101z^{-5}$$

$$-\;\;-0{,}144z^{-4}+0{,}09216z^{-5}-0{,}06z^{-6}$$

$$-0{,}193z^{-5}+0{,}06z^{-6}\dots$$

A kapott eredmény inverz z transzformálásával kapjuk a választ:
(felhasználva hogy $Z^{-1}\{1\}=\delta[k]$ és z^{-r} az r-el való eltolás)

$$\underline{\underline{h[k]=0{,}8\delta[k]+0{,}52\delta[k-1]+0{,}7208\delta[k-2]+0{,}244\delta[k-3]-0{,}144\delta[k-4]-0{,}193\delta[k-5]\dots}}$$

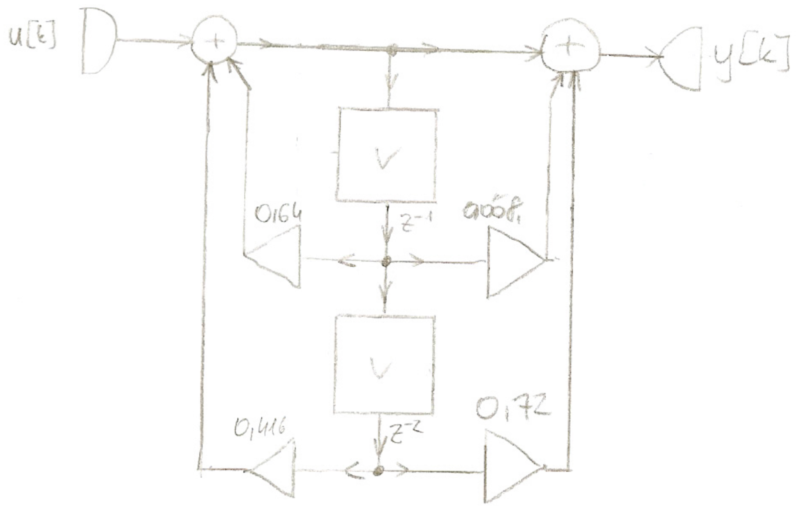
Az analitikus alakból kapott eredmények összehasonlítása:

k	analitikus	polinomosztással kapott
0	0,8	0,8
1	0,52	0,52
2	0,718	0,7208
3	0,243	0,244
4	-0,1419	-0,144
5	-0,191	-0,193

Erdei Bence
ZI3UKP4

3.5 Kanonikus hálózat

$$H(z)=\frac{0{,}8+0{,}008z^{-1}+0{,}172z^{-2}}{1-0{,}64z^{-1}+0{,}416z^{-2}}$$



Rendszeregyenlet:

$$y[k]=0{,}8u[k]+0{,}008u[k-1]+0{,}172u[k-2]+0{,}64y[k-1]-0{,}416y[k-2]$$

$\boxed{3.6}$ Fokozatos behelyettesítés a rendszeregyenletbe

$$u[k] = \varepsilon[k]\left(-3 + 2 \cdot 0{,}75^{k}\right)$$

k	u[k]	y[k]
0	-1	-0,8
1	-1,5	-1,72
2	-1,875	-3
3	-2,156	-4,02
4	-2,367	-4,58
5	-2,525	-4,85
6	-2,644	-5,03
7	-2,733	-5,23
8	-2,799	-5,41