

Kiegészítés 2.

Állítás: Pósa tételéből következik Ore tétele.

Bizonyítás:

Azt kell igazolnunk, hogy a Pósa-tétel egy gyengébb feltételből jut ugyanarra a következtetésre (hogy van Hamilton-kör), vagyis, hogy a Pósa-tételben szereplő feltétel mindig teljesül, ha az Ore-tételbeli feltétel teljesül.

Tegyük fel, hogy ez nem igaz, és legyen G olyan gráf, amire az Ore-féle feltétel teljesül, ugyanakkor a Pósa-féle nem. Ha a Pósa-féle feltétel nem teljesül, akkor $\exists k < \frac{n}{2}$, amire $d_k \leq k$. Rögzítsünk egy ilyen k -t. Mivel $d_1 \leq d_k \leq k < \frac{n}{2}$ a k legkisebb fokszámértékhez tartozó csúcsok közül bármely kettőnek a fokszámösszege kisebb, mint n . Az Ore-féle feltétel viszont teljesül, ami csak úgy lehetséges, ha ez a k csúcs páronként össze van kötve egymással. Ekkor - mivel fokszámaik nem nagyobbak k -nál, de $k - 1$ szomszédjuk már van - mindegyik legfeljebb egy további csúccsal lehet összekötve a maradék $n - k$ közül. Mivel azonban $n - k > k$ (hiszen $k < \frac{n}{2}$) a maradék $n - k$ csúcs között maradni fog olyan, amelyiknek nincs az előbbi k csúcs között szomszédja. E csúcs minden szomszédja a maradék $n - k$ csúcs közül kerül tehát ki, így a fokszáma legfeljebb $n - k - 1$. Eszerint ezen csúcs, és az első k csúcs bármelyike egyrészt összekötetlen, másrészt fokszámaik összege legfeljebb $n - k - 1 + k = n - 1$, ami ellentmond az Ore-féle feltételnek, amiről feltettük, hogy teljesül. Ez az ellentmondás bizonyítja az állítást.