ANALÍZIS(1) | **VIZSGADOLGOZAT** | **2010. jún. 1.**
Mérnök Informatikus szak | Munkaidő: 90 perc
BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

1. feladat (16 pont)

a) $a_n = \left(\dfrac{2n+1}{7n+5}\right)^n$, $\qquad b_n = \left(\dfrac{3n+1}{3n+4}\right)^{6n}$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = ?$, $\qquad \lim\limits_{n\to\infty} b_n = ?$

b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{2^{3n-1}} = ? \qquad \text{(Adja meg a sor összegét!)}$$

a.) $\underset{\downarrow\\0}{0} < a_n \le \left(\dfrac{2n+n}{7n}\right)^n = \underset{\downarrow\\0}{\left(\dfrac{3}{7}\right)^n} \Rightarrow a_n \to 0$ 6

$$b_n = \left(\frac{\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{3n}}{\left(1+\frac{4}{3n}\right)^{3n}}\right)^2 \longrightarrow \Bigg(\underbrace{\frac{e^1}{e^4}}_{e^{-3}}\Bigg)^2 = e^{-6}$$ 5

b.) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{\frac{1}{2}8^n} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{3}{8}\right)^n = 2\,\frac{-\frac{3}{8}}{1-\left(-\frac{3}{8}\right)}$$ 5

2. feladat (13 pont)

a) Adja meg $f'(x_0)$ definícióját és az inverzfüggvény deriválási szabályát!

b) A tanult módon vezesse le a $\operatorname{tg} x$ és az $\operatorname{arctg} x$ deriváltját!

a.) $x_0 \in \operatorname{int} D_f$

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$ 2

Inverz függvény deriválása

Legyen f szigorúan monoton I-ben $\Longrightarrow$ invertálható
f differenciálható I-ben $\Longrightarrow$ f folytonos I-ben
és $f'(x) \neq 0$ I-ben.

A feltételek miatt belátható, hogy $f(I)$ is intervallum. Ekkor f^{-1} differenciálható az $f(I)$ tetszőleges belső pontjában (x_0) és

$$\boxed{f^{-1'}(x_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x_0))} = \frac{1}{(f'\circ f^{-1})(x_0)} \qquad \left(f'(x_0) = \frac{1}{f^{-1'}(f(x_0))}\right)}$$ 3

an1v100601/1.

b.) $(\mathrm{tg}\,x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$ ③ $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

$(\mathrm{arctg}\,x)' = \left.\frac{1}{\cos^2 u}\right|_{u=\mathrm{arctg}\,x} = \left.\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 u}\right|_{u=\mathrm{arctg}\,x} = \frac{1}{1+x^2}$ $x \in \mathbb{R}$ ⑤

$\sin^2 u + \cos^2 u = 1 \quad |: \cos^2 u$

$\mathrm{tg}^2 u + 1 = \frac{1}{\cos^2 u}$

3. feladat (12 pont)

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{arctg}\, \dfrac{3}{x^5}, & \text{ha } x < 0 \\ 7 - \mathrm{ch}\,(3x), & \text{ha } x \geq 0 \end{cases}$$

a) $\lim_{x\to 0+0} f(x) = ?$, $\quad \lim_{x\to 0-0} f(x) = ?$

Folytonos-e a függvény $x = 0$-ban?

Differenciálható-e a függvény $x = 0$-ban?

b) Írja fel a deriváltfüggvényt, ahol az létezik!

a.) $\lim_{x\to 0+0} f(x) = f(0) = 7 - \mathrm{ch}\,0 = 6$ ② (f folytonos $[0,\infty)$-en)

$\lim_{x\to 0-0} f(x) = \lim_{x\to 0-0} \mathrm{arctg} \underbrace{\frac{3}{x^5}}_{\to -\infty} = -\frac{\pi}{2}$ ② $\quad x^5 \to -0$

$f(0+0) \neq f(0-0) \Rightarrow f$ nem folytonos $x=0$-ban. ①

$\Rightarrow f$ nem differenciálható $x = 0$-ban, hiszen nem teljesül a differenciálhatóság szükséges feltétele. ②

b.)

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+\left(\frac{3}{x^5}\right)^2} \cdot 3\,\dfrac{-5}{x^6}, & \text{ha } x<0 \quad ③ \\ -\mathrm{sh}\,3x \cdot 3, & \text{ha } x>0 \quad ② \end{cases}$$

an1v 100601/2.

4. feladat (~~10+7~~ 9+8 =17 pont)

a) Mit állíthatunk az $I = (a,\, b)$ intervallumon differenciálható, monoton növő függvény deriváltjáról? Állítását bizonyítsa be!

b)

$$f(x) = \ln\big(\operatorname{ch}(2x^4)\big)$$

Keresse meg a függvény monotonitási intervallumait!

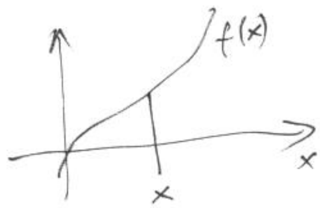
Hol és milyen jellegű lokális szélsőértéke van f-nek?

T Ha f monoton nő $I=(a,b)$-n, akkor $f'(x) \ge 0$ I-n 2

(Sőt f monoton nő I-n $\Longleftrightarrow$ $f'(x) \ge 0$ I-n)

B f monoton nő $\Longrightarrow \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} \ge 0$ ($\frac{+}{+}$ vagy $\frac{-}{-}$ alakú)

$$\Longrightarrow \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x) \ge 0$$



7

b) $f'(x) = \underbrace{\dfrac{1}{\operatorname{ch} 2x^4}}_{>0} \underbrace{\operatorname{sh} 2x^4}_{\ge 0} \cdot 8x^3 = 0 \Rightarrow x = 0$ 2

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \infty)$
f'	$-$	0	$+$
f	↘	lok. min	↗

6

5. feladat (5+8+7=20 pont)*

a) $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = ?$ b) $\displaystyle\int \arcsin(3x)\, dx = ?$

c) $\displaystyle\int \frac{4x+5}{4x^2+8}\, dx = ?$

a.) $\boxed{5}$ $\displaystyle\int_0^{1/2} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}_{f'} \underbrace{\arcsin x}_{f^1}\, dx = \frac{(\arcsin x)^2}{2}\Bigg|_0^{1/2} =$

$$= \frac{\arcsin^2 \frac{1}{2}}{2} - \frac{\arcsin 0}{2} = \frac{(\pi/6)^2}{2}$$

an1v10060113

b.) $\boxed{8}$

$$\int 1\cdot \arcsin 3x \, dx = x \arcsin 3x - \int \frac{3x}{\sqrt{1-9x^2}}\, dx = \quad (2)$$

$$\left.\begin{array}{ll} u'=1 & v=\arcsin 3x \\ u=x & v'=\frac{1}{\sqrt{1-9x^2}}\cdot 3 \end{array}\right\} (3)$$

$$= x\arcsin 3x - \frac{-1}{6}\int -18x\,(1-9x^2)^{-\frac{1}{2}}\, dx =$$

$$= x\arcsin 3x + \frac{1}{6}\,\frac{\overset{f'\,f^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{1-9x^2}}}{\frac{1}{2}} + C \quad (3)$$

c.) $\boxed{7}$

$$\int \frac{4x+5}{4x^2+8}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{2\cdot 4x}{4x^2+8}\, dx + 5\cdot\frac{1}{8}\int \frac{1}{1+\frac{x^2}{2}}\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\overset{f'/f}{\ln(4x^2+8)} + \frac{5}{8}\,\frac{\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} + C$$

6. feladat (11 pont)*

Vezesse be a $t = e^x$ új változót és határozza meg az alábbi integrált!

$$\int \frac{e^x}{(e^x+1)(e^x+4)}\, dx = I$$

$$t = e^x \Rightarrow x = \ln t \Rightarrow dx = \frac{1}{t}\, dt \quad (2)$$

$$\int \frac{t}{(t+1)(t+4)}\,\frac{1}{t}\, dt = \int \frac{1}{(t+1)(t+4)}\, dt = \int \left(\frac{A}{t+1} + \frac{B}{t+4}\right) dt$$

(2) (1)

$$\frac{1}{(t+1)(t+4)} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{t+4}$$

$$1 = A(t+4) + B(t+1)$$

$t=-1: \quad 1 = 3A \Rightarrow A = \frac{1}{3}$

$t=-4: \quad 1 = -3B \Rightarrow B = -\frac{1}{3}$

$$\frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+4}\right) dt = \frac{1}{3}\left(\ln|t+1| - \ln|t+4|\right) + C$$

(2) (3)

$$I = \frac{1}{3}\left(\ln(e^x+1) - \ln(e^x+4)\right) + C$$

(1)

7. feladat (11 pont)*

$$f(t) = \begin{cases} (t+1)^2\,, & \text{ha } t \in [0,1] \\ 4\sin\left(\dfrac{\pi}{2}t\right), & \text{ha } t > 1 \end{cases}$$

Határozza meg a

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\,, \quad x > 0$$

integrált! $F'(1) = ?$ (Indokoljon!)

Ha $x \in (0,1]$:

$$F(x) = \int_0^x (t+1)^2\,dt = \frac{(t+1)^3}{3}\Big|_0^x = \frac{1}{3}(x+1)^3 - \frac{1}{3} \qquad 3$$

Ha $x > 1$:

$$F(x) = \int_0^1 (t+1)^2\,dt + \int_1^x 4\sin\frac{\pi}{2}t\,dt =$$

$$= \frac{(t+1)^3}{3}\Big|_0^1 + 4\cdot\frac{-\cos\frac{\pi}{2}t}{\frac{\pi}{2}}\Big|_1^x = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} - \frac{8}{\pi}\left(\cos\frac{\pi}{2}x - \cos\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= \frac{7}{3} - \frac{8}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}x \qquad 5$$

Tehát

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}(x+1)^3 - \frac{1}{3}, & \text{ha } 0 < x \le 1 \\ \frac{7}{3} - \frac{8}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}x, & \text{ha } x > 1 \end{cases}$$

$F'(1) = f(1) = 4$, mert f folytonos $t=1$-ben: 3

$$f(1-0) = f(1) = 4 = f(1+0) = 4\cdot\sin\frac{\pi}{2}$$

A *-gal jelölt feladatokból legalább 15 pontot el kell érni!

Pótfeladatok (csak az elégséges és közepes vizsgajegy eléréséhez javítjuk ki):

8. feladat (10 pont)

Konvergens-e az alábbi sor?

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+3}{2n^2+5}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 2^{2n}}{3 + 6^{n+1}}$

a.) $a_n = \frac{4n+3}{2n^2+5} > \frac{4n}{2n^2+5n^2} = \frac{4}{7}\frac{1}{n}$; $\frac{4}{7}\sum^{\infty}\frac{1}{n}$ div.

$\underset{\text{min. kr.}}{\Longrightarrow} \sum^{\infty} a_n$ div.

. $0 < b_n = \frac{2^n+4^n}{3+6\cdot 6^n} \le \frac{4^n+4^n}{6\cdot 6^n} = \frac{1}{3}\left(\frac{4}{6}\right)^n = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n$;

$\frac{1}{3}\sum^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ konv. geom. sor $\left(0 < q = \frac{2}{3} < 1\right)$

$\underset{\text{maj. kr.}}{\Longrightarrow} \sum^{\infty} b_n$ konv.

9. feladat (10 pont)

$$f(x) = \operatorname{arctg}\frac{x-8}{(x-5)^2}$$

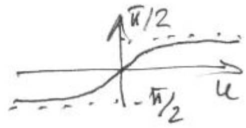
a) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = ?$, $\lim\limits_{x\to 5} f(x) = ?$,

b) $f'(x) = ?$, ha $x \neq 5$

a.) $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{arctg} \underbrace{\frac{x}{x^2}}_{=\frac{1}{x}\to 0} \underbrace{\frac{1-8/x}{\left(1-\frac{5}{x}\right)^2}}_{\to 1} = \operatorname{arctg} 0 = 0$

$\lim\limits_{x\to 5} \operatorname{arctg} \frac{x-8}{(x-5)^2} = -\frac{\pi}{2}$

$\frac{-3}{+0}$ alakú : $\to -\infty$



Ha $x \neq 5$: $f'(x) = \dfrac{1}{1+\left(\frac{x-8}{(x-5)^2}\right)^2} \cdot \dfrac{1\cdot(x-5)^2-(x-8)\cdot 2(x-5)}{(x-5)^4}$