**1. vizsga**
Pontozási útmutató

**Tanszéki általános alapelvek**

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait, és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak nem célja a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különböző megoldást is elkezd, akkor legfeljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatból nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0). Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Aritmetikai hiba esetén elszámolásonként 1-1 pont vonandó le a feladatokból. Ez alól kivétel, ha az elszámolás lényegesen egyszerűsíti vagy módosítja a feladat felépítését. Ilyen esetekben azon feladatrészekért, amik az elszámolás okán fel sem merültek, nem jár pont.

1. Két ládában vannak almáink. Az elsőben 1 romlott és 5 jó, a másodikban 3 romlott és 4 jó. Az elsőből átteszünk a másodikba egy almát. Mennyi a valószínősége, hogy ezután a második dobozból véletlenszerűen választva egy almát az jó lesz?

   **Megoldás:**

   (0 pont) Legyen $A$ az az esemény, hogy a második húzásra jó almát választunk, a kérdés tehát a $\mathbb{P}(A)$ valószínűség.

   (0 pont) Legyen $J$ az az eselmény, hogy első húzásra jó almát húzunk, $R$ pedig az, hogy rosszat (ekkor persze $R = \overline{J}$),

   (2 pont) ekkor, mivel elsőre összesen 6 almából választunk, amelyből mindössze 1 rossz, így

   $$\mathbb{P}(J) = \frac{5}{6}, \qquad \mathbb{P}(R) = \frac{1}{6}.$$

   (1 pont) $J$ és $R$ teljes eseményrendszert alkotnak,

   (2 pont) ezért alkalmazható rájuk ill. az $A$ eseményre a teljes valószínűség tétele:

   $$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \mid J)\,\mathbb{P}(J) + \mathbb{P}(A \mid R)\,\mathbb{P}(R).$$

   (2 pont) Ha elsőre jót húzunk, akkor a második ládában a második húzás előtt 3 romlott és 5 jó alma lesz, tehát

   $$\mathbb{P}(A \mid J) = \frac{5}{8}.$$

   (1 pont) Ha elsőre rosszat húzunk, akkor a második ládában a második húzás előtt 4 romlott és 4 jó alma lesz, tehát

   $$\mathbb{P}(A \mid R) = \frac{1}{2}.$$

   (2 pont) Tehát behelyettesítve

   $$\mathbb{P}(A) = \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{25}{48} + \frac{4}{48} = \frac{29}{48}.$$

2. Egy megkevert magyarkártya-pakliból húzunk 2 lapot visszatevés nélkül. Jelölje $X$ a kihúzott ászok, míg $Y$ a kihúzott piros lapok számát. Határozzuk meg az $X$ és $Y$ együttes eloszlását. (Egy magyarkártya-pakli 32 lapból áll, melyek közt pontosan darab 8 piros lap és 4 darab (különböző színű) ász van, az ászok között tehát pontosan egy piros található.)

**Megoldás:**

(1 pont) Mindkét változó lehetséges értékei 0, 1 és 2, így tehát $\mathrm{ran}X = \mathrm{ran}Y = \{0, 1, 2\}$

(1 pont) Ha két ászt húztunk, akkor nem húzhattunk két piros lapot, így tehát $\mathbb{P}(X = 2, Y = 2) = 0$

(1 pont) Ha két ászt és egy pirosat húztunk, akkor kihúztuk a piros ászt és még egyet a maradék három ászból, erre 3-féle különböző lehetőség adódik, az összes húzásra pedig $\binom{32}{2} = 16 \cdot 31 = 496$ lehetőségünk van, tehát

$$\mathbb{P}(X = 2, Y = 1) = \frac{3}{496}.$$

(1 pont) Ha két ászt húztunk, de nem húztunk pirosat, akkor a zöld, tök ill. makk ászok közül húztunk ki kettőt, ezt ismét $\binom{3}{2} = 3$-féle módon tehetjük meg, tehát

$$\mathbb{P}(X = 2, Y = 0) = \frac{3}{496}.$$

(1 pont) Ha egy ászt és két pirosat húztunk, akkor a kihúzott ász piros, és még egyet húztunk a maradék 7 piros lap közül, ez pedig 7-féleképp lehetséges, azaz

$$\mathbb{P}(X = 1, Y = 2) = \frac{7}{496}.$$

(1 pont) Ha egy ászt és egy pirosat húztunk, akkor két lehetőség van, vagy kihúztuk a piros ászt és még egyet a 21 lapból, ami nem piros és nem is ász, vagy pedig húztunk egyet a 7 piros lapból, ami nem ász, továbbá még egyet a zöld, tök és makk ászok közül. Ezek egymást kizáró események, és az első eset 21-féleképp, míg a második ismét csak $7 \cdot 3 = 21$-féleképp következhet be, így tehát

$$\mathbb{P}(X = 1, Y = 1) = \frac{21}{496} + \frac{21}{496} = \frac{42}{496}.$$

(1 pont) Ha egy ászt húztunk, de nem húztunk pirosat, akkor az egyik lap a zöld, tök és makk ászok valamelyike, a másik pedig azon 21 lap valamelyike, amelyik se nem piros, se nem ász, azaz összesen $3 \cdot 21 = 63$-féle lehetőségünk van ilyen húzásra, vagyis

$$\mathbb{P}(X = 1, Y = 0) = \frac{63}{496}.$$

(1 pont) Ha nem húztunk ászt, és két pirosat húztunk, akkor az ásztól különböző 7 piros lap közül húztunk kettőt, ezt pedig $\binom{7}{2} = 21$-féleképp tehetjük meg, azaz

$$\mathbb{P}(X = 0, Y = 2) = \frac{21}{496}.$$

(1 pont) Ha nem húztunk ászt, és egy pirosat húztunk, akkor az ásztól különböző 7 piros lapból ill. az ásztól és pirostól különböző 21 lapból is egyet-egyet húztunk, ez pedig $7 \cdot 21 = 147$-féleképp lehetséges, vagyis

$$\mathbb{P}(X = 0, Y = 1) = \frac{147}{496}.$$

(1 pont) Végül ha sem ászt, sem pedig pirosat nem húztunk, akkor az ásztól és pirostól különböző 21 lapból húztunk kettőt, ez pedig $\binom{21}{2} = 210$-féleképp lehetséges, tehát

$$\mathbb{P}(X = 0, Y = 0) = \frac{210}{496}.$$

(0 pont) Összefoglalva:

| Y \ X | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | 210/496 | 63/496 | 3/496 |
| 1 | 147/496 | 42/496 | 3/496 |
| 2 | 21/496 | 7/496 | 0 |

3. Egyenletesen véletlenszerűen választunk egy pontot az origó középpontú egységkörön. Mi a valószínűsége, hogy a választott pont az $(1;0)$, $(0;1)$, $(-1;0)$ és $(0;-1)$ csúcsok által meghatározott négyzetbe esik?

**Megoldás:**

(1 pont) Az $\Omega$ eseménytér az origó középpontú egység sugarú körlap,

(2 pont) ennek területe $T(\Omega) = \pi$.

(3 pont) Jelölje a feladatban megadott négyzetet $N$, ennek oldala $\sqrt{2}$ hosszú, így területe $T(N) = 2$.

(3 pont) A geometriai valószínűségi mezőre vontakozó képlet szerint tehát az $N$ négyzetbe való beleesés valószínűsége $\mathbb{P}(N) = \dfrac{T(N)}{T(\Omega)}$

(1 pont) $= \dfrac{2}{\pi} \approx 0{,}6366$.

4. Legyen $X$ egy olyan valószínűségi változó, melynek eloszlásfüggvénye

$$F_X(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } t \leq 2, \\ \frac{1}{2}t - 1, & \text{ha } 2 < t \leq 4, \\ 1 & \text{ha } t > 4 \end{cases}$$

Határozzuk meg az $X$ várható értékét és szórását.

**Első megoldás:**

(3 pont) A megadott eloszlásfüggvény alapján $X \sim U(2;4)$,

(3 pont) így a tanult formulák szerint $\mathbb{E}(X) = \dfrac{2+4}{2} = 3$,

(3 pont) valamint $\mathbb{D}^2(X) = \dfrac{(4-2)^2}{12} = \dfrac{1}{3}$,

(1 pont) azaz $\mathbb{D}(X) = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \approx 0{,}5774$.

**Második megoldás:**

(1 pont) Mivel a $t = 2$ és $t = 4$ pontok kivételével az $F_X$ függvény deriválható, és minden pontban folytonos,

(1 pont) így az előadáson tanult tétel alapján az $X$ változó abszolút folytonos, és az $f_X$ sűrűségfüggvénye az $F_X$ eloszlásfüggvény deriváltja, ahol a derivált létezik, és 0 különben,

(1 pont) azaz

$$f_X(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{ha } 2 < t < 4, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

(1 pont) Az $X$ várható értéke definíció szerint

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f_X(t)\,dt$$

(2 pont)

$$= \int_2^4 \frac{t}{2}\,dt = \left[\frac{t^2}{4}\right]_2^4 = \frac{16-4}{4} = \frac{12}{4} = 3.$$

(1 pont) A transzformált várható értékére vonatkozó formula szerint

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \cdot f_X(t)\, dt$$

(1 pont)

$$= \int_2^4 \frac{t^2}{2}\, dt = \left[\frac{t^3}{6}\right]_2^4 = \frac{64-8}{6} = \frac{28}{3},$$

(1 pont) így $\mathbb{D}^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{28}{3} - 9 = \frac{1}{3}$,

(1 pont) azaz $\mathbb{D}(X) = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0{,}5774$.

5. Egy faléceket készítő gép úgy van beállítva, hogy a legyártott lécek 40 cm hosszúak legyenek. A tényleges hosszak ettől való eltérése (vagyis a gép hibája) centiméterben mérve normális eloszlást követ 0 várható értékkel. Mennyi a hiba szórása, ha tudjuk, hogy 0,05 annak a valószínűsége, hogy egy léc nagyobb, mint 40,5 cm?

**Megoldás:**

(1 pont) Jelölje $X$ a hibát, ekkor a feladat szövege szerint $X \sim N(0; \sigma^2)$, a kérdés pedig $\sigma$ értéke.

(1 pont) A feladat szövege szerint $0{,}05 = \mathbb{P}(X > 0{,}5)$.

(1 pont) A komplementer eseményre áttérve

(1 pont) és az $X$ folytonosságát is felhasználva ez a valószínűség $1 - \mathbb{P}(X < 0{,}5)$,

(2 pont) ami az $X$ változó eloszlásfüggvényével felírva $1 - \Phi\left(\frac{0{,}5}{\sigma}\right)$.

(1 pont) A fenti egyelnetet átrendezve tehát a $\Phi\left(\frac{0{,}5}{\sigma}\right) = 0{,}95$ egyenletet kell megoldni.

(2 pont) A $\Phi$ függvény inverzét alkalmazva ebből

$$\frac{0{,}5}{\sigma} = \Phi^{-1}(0{,}95) \approx 1{,}64,$$

(1 pont) tehát $\sigma \approx \frac{0{,}5}{1{,}64} = \frac{25}{82} \approx 0{,}3049$.

6. Egy dobókockával 20-szor dobva az alábbi eredmények adódtak:

5, 3, 4, 4, 4, 1, 2, 6, 1, 1, 6, 1, 4, 3, 3, 3, 1, 5, 4, 3.

Határozzuk meg a mintaátlagot és a korrigált tapasztalati szórást. Írjuk fel a mintához tartozó tapasztalati eloszlásfüggvényt is.

**Megoldás:**

(1 pont) A mintaátlag

$$\overline{x} = \frac{5+3+4+4+4+1+2+6+1+1+6+1+4+3+3+3+1+5+4+3}{20} = \frac{64}{20} = 3{,}2.$$

(1 pont) A korrigált tapasztalati szórásnégyzet $s^{*\,2} = \frac{n}{n-1}s^2$, ahol $s^2$ a tapasztalati szórásnégyzet, $n$ pedig a minta elemszáma (jelen esetben 20), a tapasztalati szóránégyzet pedig az $s^2 = \overline{x^2} - \overline{x}^2$ képlettel számolható,

(1 pont) ahol

$$\overline{x^2} = \frac{5^2+3^2+4^2+4^2+4^2+1^2+2^2+6^2+1^2+1^2+6^2+1^2+4^2+3^2+3^2+3^2+1^2+5^2+4^2+3^2}{20},$$

ennek értéke pedig $\dfrac{256}{20} = 12{,}8$,

(1 pont) így tehát

$$s^{*\,2} = \frac{20}{19} \cdot (12{,}8 - 3{,}2^2) = \frac{20}{19} \cdot \frac{64}{25} = \frac{256}{95} \approx 2{,}6947.$$

(1 pont) A korrigált tapasztalati szórás tehát $s^* = \sqrt{s^{*\,2}} = \sqrt{\dfrac{256}{95}} \approx 1{,}6416$.

Ha az általános képletek nem szerepelnek, de a hibátlan helyettesítés igen, akkor a képletekért járó pont is megadandó. Ha a megoldó számológép segítségével számolja az átlagot és a korrigált tapasztalati szórást közvetlenül a mintából (tehát a fenti helyettesítéseket nem végzi el), a korrigált tapasztalati szórás és szórásnégyzet, valamint a tapasztalati szórásnégyzet képletének (vagy egy összevont képletnek), illetve az $\overline{x^2}$ értelmezésének szerepelnie kell az előző 4 pontért. Ezek bármelyikének hiányáért egyenként 1 pont levonás jár a fenti 4-ből (vagyis például egy puszta eredményközlés esetén mindössze az átlagért jár pont).

(1 pont) A rendezett minta

$$1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 3,\ 3,\ 3,\ 3,\ 4,\ 4,\ 4,\ 4,\ 4,\ 5,\ 5,\ 6,\ 6,$$

(4 pont) tehát a tapasztalati eloszlásfüggvény

$$F^*(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } t \le 1, \\ \frac{1}{4}, & \text{ha } 1 < t \le 2, \\ \frac{3}{10}, & \text{ha } 2 < t \le 3, \\ \frac{11}{20}, & \text{ha } 3 < t \le 4, \\ \frac{4}{5}, & \text{ha } 4 < t \le 5, \\ \frac{9}{10}, & \text{ha } 5 < t \le 6, \\ 1, & \text{ha } 6 < t. \end{cases}$$

(A rendezett mintának nem kell feltételnül szerepelni, az érte kapható 1 pont egy hibátlanul megadott eloszlásfüggvény esetén is jár.)