

### Vizsgadolgozat

- Írjuk fel az alábbi definíciót, illetve állítást:
  - Mit és milyen feltételek mellett mond ki a teljes valószínűség tétele? (az eseményekre vonatkozó)
  - Legyen  $(X, Y)$  együttesen folytonos valószínűségi vektorváltozó. Hogyan definiáljuk az  $Y$ -nak az  $X$ -re vett feltételes sűrűségfüggvényét?
- Egy telefonfülkéből szeretnénk hívást indítani, és várjuk, hogy az előttünk beszélő befejezze a beszélgetést. Tegyük fel, hogy az illető telefonbeszélgetésének időtartama percben mérve folytonos, örökifjú eloszlású 3 várható értékkel.
  - Mennyi annak a valószínűsége, hogy a beszélgetés összesen 6 percnél tovább tart, feltéve, hogy már több, mint 4 perce beszél az illető?
  - Ha  $t$  ideig kell várakoznunk, akkor elégedettségünk  $10 \cdot e^{-t}$ . Mennyi a valószínűsége, hogy elégedettségünk 5 alá csökken? Várhatóan mennyire leszünk elégedettek?
- Egy vizsgán 60 kérdésre kell válaszolni, minden kérdés esetén négy lehetséges válasz közül lehet választani, melyekből pontosan egy helyes. Tegyük fel, hogy egy vizsgázó minden előzetes tudás nélkül tölti ki a sort, és minden egyes kérdésnél függetlenül és véletlenszerűen tippeli meg a választ.

Közelítőleg mennyi a valószínűsége, hogy több, mint 20 helyes választ ad így?  
Mennyire változik ez a valószínűség, ha minden kérdésnél a négy lehetséges válaszból egyet ki tud zárni? (A maradék három közül továbbra is véletlenszerűen választ.)
- Legyenek  $X$  és  $Y$  valószínűségi változók. Tegyük fel, hogy az  $X$ -nek az  $Y$ -ra vett lineáris regressziója  $\frac{3}{2}Y + 2$ , míg az  $Y$ -nak az  $X$ -re vett lineáris regressziója  $\frac{1}{2}X - 1$ . Határozzuk meg az  $X$  és  $Y$  változók várható értékét, valamint a két változó korrelációs együtthatóját.
- Legyen az  $X$  és  $Y$  valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvénye

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \alpha(x + y + x^2y) & \text{ha } 0 < x < 1 \text{ és } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

valamilyen  $\alpha \in \mathbb{R}$  esetén.

- Határozzuk meg az  $\alpha$  értékét, valamint az  $\mathbb{E}(Y)$  várható értékét.
  - Határozzuk meg a  $\mathbb{P}(X^2 < Y)$  valószínűséget.
- 6.\* Egy réten  $N \geq 1$  szarvas legelészik gyanútlanul. Egymásról nem tudva  $N$  vadász lopakodik a tisztáshoz, és egyszerre tüzelnek a vadakra. Mindegyik lövés talál, és halálos. (Elvileg több vadász is lőhet ugyanabba a szarvasba, és mindegyik lövés minden szarvast azonos valószínűséggel talál el.)
- Milyen valószínűséggel marad életben egy adott szarvas?
  - Mennyi az életben maradó szarvasok számának várható értéke?

---

**Tudnivalók:** A vizsga időtartama 100 perc. Számológépet lehet használni. A számszerű megoldásokat 4 értékes jegyre kerekítjük. A teljes pontszám eléréséhez a megoldás menete is szükséges, beleértve az egyes lépéseknél felhasznált tulajdonságok és tételek jelzését. A vizsga első 30 percében nem lehet a termet elhagyni.

