ÍRÁSBELI: K ~~63~~.179
magasföldszint
8:30-tól
SZÓBELI: D 430.
12:00-tól
2016. június 21.

Szilárd testek mechanikája

1. Milyen adatokkal adható meg egyértelműen egy erő?

Az erőnek van:

- nagysága
- hatásvonala
- támadáspontja
- értelme

Megadható a kezdőpontjának és a támadáspontjának koordinátáival (3D-ben 6 koordináta)

2. Egy síkbeli szétszórt dinámrendszernek mi lehet az eredője?

Szétszórt dinámrendszer eredője lehet:

$\boldsymbol{F}_A=\mathbf{0}$ és $\boldsymbol{M}_A=\mathbf{0}$ Egyensúly
$\boldsymbol{F}_A=\mathbf{0}$ és $\boldsymbol{M}_A\neq\mathbf{0}$ Nyomaték
$\boldsymbol{F}_A\neq\mathbf{0}$ és $\boldsymbol{M}_A=\mathbf{0}$ Erő
$\boldsymbol{F}_A\neq\mathbf{0}$ és $\boldsymbol{M}_A\neq\mathbf{0}$ Erő, vagy erőpár

!!!Síkbeli esetben:

- Erő vagy erőpár: Ha az erő és a nyomaték is nullától különböző

3. Egy térbeli szétszórt dinámrendszernek mi lehet az eredője?

Szétszórt dinámrendszer eredője lehet:

- Egyensúly: $\boldsymbol{F}_A=\mathbf{0}$ és $\boldsymbol{M}_A=\mathbf{0}$
- Nyomaték: $\boldsymbol{F}_A=\mathbf{0}$ és $\boldsymbol{M}_A\neq\mathbf{0}$
- Erő: $\boldsymbol{F}_A\neq\mathbf{0}$ és $\boldsymbol{F}_A\cdot\boldsymbol{M}_A=0$
- Erőcsavar: $\boldsymbol{F}_A\cdot\boldsymbol{M}_A\neq\mathbf{0}$

!!!Térbeli esetben:

- Erőcsavar: Ha az erő és a nyomaték merőleges egymásra (**F*M** $\neq 0$)

4. Milyen egyenletekkel tudja ellenőrizni egy általános síkbeli dinámrendszer egyensúlyát?

Egyensúly esetén az erők és nyomatékok eredőjére teljesülnie kell a következő egyenleteknek:

- $(F_1, F_2, \ldots F_n) \doteq R_F=0$
- $(M_1, M_2, \ldots M_n) \doteq R_M=0$

5. Hogyan számítható egy F erő nyomatéka a tér egy tetszőleges P pontjára?

Nyomaték számítása: **M = F x r**

- |**M**| = F * r* sinα , ahol F az erő, r: az erő kezdőpontjába mutató helyvektor hossza, α: az erő hatásvonala és r által bezárt szög

6. Hogyan számítható egy F erő nyomatéka a tér egy tetszőleges t tengelyére?

F erő t tengelyre való nyomatékának számítása: **M = (F x r).e$_t$**

- |**M**$_t$| = **F**$_\perp$ * d, ahol **M**$_t$ a nyomaték t tengelyre való vetülete, **F**$_\perp$ az erő t-re merőleges komponense, d az erő kezdőpontjának t tengelytől való távolsága.

7. Mikor nevezünk egy tartószerkezetet statikailag határozottnak?

Egy tartószerkezet statikailag határozott, ha bármilyen terhelés esetén egyértelmű megoldás van.

- Statikailag határozott a szerkezet, ha az egyensúlyi egyenletrendszer egyértelműen megoldható (annyi független egyenlet, ahány ismeretlen).

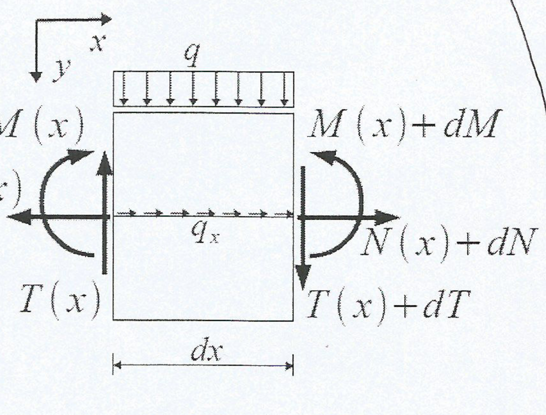
8. Mikor nevezünk egy tartószerkezetet statikailag határozatlannak?

Statikailag határozatlan a szerkezet, ha kevesebb az egyenlet, mint ahány ismeretlen.

van olyan teher, amire egyensúlyban van, de az egyensúlyi egyenlet megoldása nem egyértelmű.

9. Ismertesse a gerendatartók igénybevételei és terhei közötti differenciális összefüggéseket!

Statikailag túlhatározott tartó: van olyan teher, amire az egyensúlyi egyenletrendszernek nincs megoldása.



$$T(x) = \frac{dM(x)}{dx}$$

$$\left(q(x) = -\frac{dT(x)}{dT}\right)$$

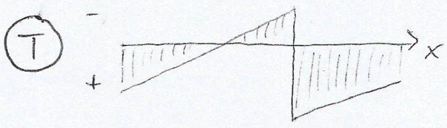
$$q(x) = -\frac{d^2M(x)}{dx^2}$$

$M(x) = \int T(x)\,dx$

ábrákban ezt használjuk

$q(x)$ = teher

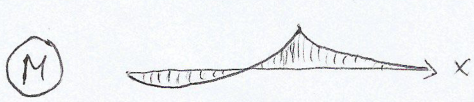
$N(x), T(x), M(x)$ } kapcsolat?



$$q_x(x) = -\frac{dN(x)}{dx}$$

$$q(x) = -\frac{d^2M(x)}{dx^2}$$

$$q_y(x) = -\frac{dT(x)}{dx}$$



A fenti ábra alapján a felírható összefüggések:

- $\sum F_{ix}: -N(x) + q_x(x)dx + N(x) + dN = 0 \longrightarrow \frac{\boldsymbol{dN(x)}}{\boldsymbol{dx}} = -\boldsymbol{q_x(x)}$
- $\sum F_{iy}: -T(x) + q_y(x)dx + T(x) + dT = 0 \longrightarrow \frac{\boldsymbol{dT(x)}}{\boldsymbol{dx}} = -\boldsymbol{q_y(x)}$
- $\sum M_x: +M(x) + Tdx - q(x)dx * \frac{dx}{2} - (M(x) + dM) =$

  $0 \longrightarrow \frac{\boldsymbol{dM(x)}}{\boldsymbol{dx}} = \boldsymbol{T_x},\ d^2x \to 0, mivel\ dx \to 0$
- $\sum F_{iy}, \sum M_{ix} \longrightarrow \frac{\boldsymbol{d^2M}}{\boldsymbol{dx^2}} = -\boldsymbol{q(x)}$

10. Mit jelentenek a következő fogalmak: feszültségvektor, feszültségállapot, feszültségtenzor?

$\boxed{p_n^2 = \sigma_n^2 + \tau_n^2}$

Feszültségvektor ($\mathbf{p_n}$):

- Az **n** normálisú elemi felület mentén megoszló erő → felületre merőleges komponens = normálfeszültség σ_n
- $\boldsymbol{p_n} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta A} = \frac{dQ}{dA}$ → felülettel párhuzamos komponens = nyírófeszültség τ_n

lineáris
síkbeli
térbeli

Feszültségállapot:

- Egy adott pontban az összes irányhoz tartozó feszültségvektor

$\boxed{\sigma_n = \varepsilon E \ ; \ \tau_n = \gamma G}$

rugalmassági modulusz

nyírási modulus

Feszültségtenzor ($\cancel{\sigma_n}$) (F)

- A feszültségállapot leírásának eszköze $\vec{p}_n = \underline{\underline{F}} \cdot \vec{n}$
- Az a σ tenzor, mellyel bármely **n** irányhoz így számolható a feszültségvektor:
  - $\mathbf{p_n = \sigma\, n}$

$\tau_{yx} =$ y normálisú síkon fellépő feszültség x irányú erő

- $\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$, ahol σ_x az x irányhoz tartozó feszültségvektor, τ_{xy} és τ_{xz}

  reciprocitás miatt $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, ...

  pedig az erre az irányra merőlegesen ható erők vektora

11. Ismertesse a feszültség- és az alakváltozástenzor fogalmát!

Alakváltozástenzor (ε)

- Adott pont környezetének deformációjának leíró eszköze
- Az eltolódásmező gradienstenzorának szimmetrikus része
- $\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{zy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$, ahol ε az adott irány normálirányú, míg γ a

  normálirányra merőleges deformációt írják le

12. Mit jelent a hidrosztatikus és a deviátoros feszültségtenzor?

A feszültségtenzor felosztható gömbi (hidrosztatikus) és deviátoros (tiszta nyírás) komponensekre ($F = F_0 + F_d$)

- Hidrosztatikus feszültségtenzor (F_0)
  - Az átlagos normálfeszültségek hatását írja le
  - $F_0 = \begin{bmatrix} \sigma_{átl} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{átl} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{átl} \end{bmatrix}$, ahol $\sigma_{átl} = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$
- Deviátoros feszültségtenzor (F_d)
  - A nyírási hatásokat írja le
  - $F_d = \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_{átl} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_{átl} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_{átl} \end{bmatrix}$

Az $\underline{\underline{F}}$ ~~[illegible]~~ tenzor nyoma eltűnik:

$\sigma_x - \sigma_{átl} + \sigma_y - \sigma_{átl} + \sigma_z - \sigma_{átl} = 0$

és a deviátoros feszültségtenzor nyoma

13. Írja fel a feszültségtenzor alakját az xyz-koordinátarendszerben felírt feszültségkomponensek segítségével!

$\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma_x} & \boldsymbol{\tau_{yx}} & \boldsymbol{\tau_{zx}} \\ \boldsymbol{\tau_{xy}} & \boldsymbol{\sigma_y} & \boldsymbol{\tau_{zy}} \\ \boldsymbol{\tau_{xz}} & \boldsymbol{\tau_{yz}} & \boldsymbol{\sigma_z} \end{bmatrix}$, ahol σ_x az x irányhoz tartozó feszültségvektor, τ_{xy} és τ_{xz} pedig az erre az irányra merőlegesen ható erők vektora

14. Hogyan számítható egy pont n normálisú metszetében a feszültségvektor, a normál- és a nyírófeszültség a feszültségtenzor ismeretében?

Feszültségvektor:

- $\begin{bmatrix} p_{nx} \\ p_{ny} \\ p_{nz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix}, vagy \boxed{\underline{p_n} = \boldsymbol{F} \cdot \underline{\boldsymbol{n}}}$
- A reciprocitás miatt $\mathbf{F}=\mathbf{F}^T$

Normálfeszültség:

- $\boxed{\sigma_n = (\boldsymbol{p_n} \cdot \boldsymbol{n})\boldsymbol{n}} = |(\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}) \cdot \boldsymbol{n}|\boldsymbol{n} = (\boldsymbol{n}^T \boldsymbol{F} \boldsymbol{n})\boldsymbol{n} = \sigma_n \boldsymbol{n}$

Nyírófeszültség:

- $\boxed{\tau_n = \boldsymbol{p_n} - \sigma_n} = F \cdot \boldsymbol{n} - \sigma_n \boldsymbol{n} = |\boldsymbol{F} - \sigma_n \boldsymbol{E}| \cdot \boldsymbol{n}$

15. Mi a mechanikai és a matematikai jelentése a főfeszültségeknek?

A főfeszültség mechanikai jelentése:

- A vizsgált test bármely pontjában található 3 olyan egymásra merőleges irány, amelyhez tartozó feszültségvektoroknak nincs nyírófeszültségi komponense (τ_n=0). Ezt a három irányt feszültségi főiránynak, a hozzájuk tartozó feszültségek nagyságát főfeszültségeknek nevezzük.

A főfeszültség matematikai jelentése:

- A főfeszültségek a vizsgált pont feszültségállapotát jellemző $\boxed{\text{feszültségtenzor}}$ sajátértékei, a feszültségi főirányok a feszültségvektor sajátvektorainak irányai.

16. Ismertesse a rugalmasságtan egyensúlyi egyenleteit!

A rugalmasságtan egyensúlyi egyenletei:

- Az egyensúlyi egyenletek a test belsejében lévő elemi hasábok egyen súlyát fejezik ki; összefüggést teremtenek a test belsejében ébredő feszültségek és a testre ható tömegerők között.
- $\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + g_x = 0$
- $\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + g_y = 0$
- $\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + g_z = 0$

$$F \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} g_x \\ g_y \\ g_z \end{bmatrix}}_{\text{tömegerők}} = 0$$

17. Írja fel a deviátoros- illetve a hidrosztatikus alakváltozástenzort!

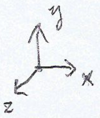
A deviátoros alakváltozástenzor:

- $F_d = \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_{átl} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_{átl} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_{átl} \end{bmatrix}$

A hidrosztatikus alakváltozástenzor:

- $F_0 = \begin{bmatrix} \sigma_{átl} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{átl} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{átl} \end{bmatrix}$, ahol $\sigma_{átl} = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$

18. Mi a mechanikai és a matematikai jelentése a főnyúlásoknak?



A főnyúlások mechanikai jelentése:

- A vizsgált test bármely pontjában található 3 olyan egymásra merőleges irány, amelyekhez tartozó deformációvektoroknak nincs szögtorzulási komponense (γ_n=0). Ezt a három irányt alakváltozási főiránynak, a hozzájuk tartozó nyúlások nagyságát főnyúlásoknak nevezzük.

A főnyúlások matematikai jelentése:

- A főnyúlások a vizsgált pont alakváltozási állapotát jellemző $\boxed{\text{alakváltozástenzor}}$ sajátértékei, az alakváltozási főirányok az alakváltozástenzor sajátvektorainak irányai.

19. Írja fel a rugalmas test geometriai egyenleteit!

A rugalmas test geometriai egyenletei:

- A geometriai egyenletek a test bármely pontjában az eltolódások és az alakváltozástenzor komponensei közötti összefüggéseket adják meg.
- $\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$
- $\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$

20. Milyen feszültségi állapot tartozhat a sík alakváltozási állapothoz?

A sík alakváltozási állapothoz tartozhat:

- A három főfeszültség közül egy zérus, kettő nem zérus
- A pont alakváltozási állapota: általános esetben térbeli, speciális esetben lehet síkbeli
- Tiszta nyírás: $\sigma_1 = -\sigma_3$; $\sigma_2 = 0$; ekkor a pont alakváltozási állapota **tiszta szögtorzulás**

21. Írja fel a sík feszültségi állapothoz tartozó alakváltozástenzor elemeit!

A sík feszültségi állapot alakváltozástenzorának elemei:

- $\varepsilon_x = \frac{du(x,y,z)}{dx}, \gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{du(x,y,z)}{dy} + \frac{dv(x,y,z)}{dx}$
- $\varepsilon_y = \frac{dv(x,y,z)}{dy}, \gamma_{yz} = \gamma_{zy} = \frac{dv(x,y,z)}{dz} + \frac{dw(x,y,z)}{dy}$
- $\varepsilon_z = \frac{dw(x,y,z)}{dz}, \gamma_{zx} = \gamma_{xz} = \frac{dw(x,y,z)}{dx} + \frac{du(x,y,z)}{dz}$

ANYAGMODELLEK:

22. Ismertesse a mechanikai anyagmodell fogalmát! Milyen rugalmas viselkedést leíró modelleket ismer?

A mechanikai anyagmodell az anyag külső hatásokra adott mechanikai válaszának megfogalmazása matematikai formában. Az anyagmodell tartalmazza a feszültség és alakváltozástenzor komponensei közötti összefüggéseket, korlátozó feltételeket.

- $\sigma = \mathbf{D}\varepsilon$; $\varepsilon = D^{-1}\sigma$, ahol a D^{-1} matrix az anyagi hajlékonysági matrix (gyakorlatilag egy operátor)

Ez alapján megkülönböztetünk:

- Időfüggés szerint

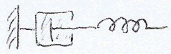
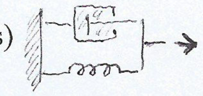
  Időfüggetlen: terhelés-tehermentesítés után visszanyeri az eredeti alakot.

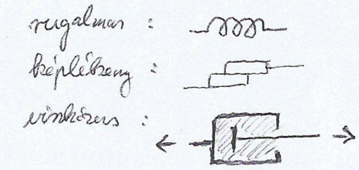
  - Statikus kapcsolatot: $\underline{\sigma} = \underline{\sigma}(\underline{\varepsilon}) \leftrightarrow \underline{\varepsilon} = \underline{\varepsilon}(\underline{\sigma})$
  - Dinamikus (időfüggő) kapcsolatot: $\underline{\sigma} = \underline{\sigma}(\underline{\varepsilon}, \dot{\underline{\varepsilon}}, t)$
- Terheléstörténet szerint:

- Rugalmas anyagmodellt: nincs maradandó alakváltozás egy terhelés-tehermentesítési ciklus után
- Rugalmatlan anyagmodellt

Rugalmas viselkedést leíró modellek:

- Hooke-modell: legáltalánosabb ($\sigma = \varepsilon E$)
  - Hajlékonysági matrix
  - $$\varepsilon = D^{-1}\sigma = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\nu\frac{1}{E} & -\nu\frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\nu\frac{1}{E} & \frac{1}{E} & -\nu\frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\nu\frac{1}{E} & -\nu\frac{1}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix},$$

    ahol v a Poisson tényező, E a Young modulus és G a nyírási modulus
- Ramber-Osgood modell
- Neo-Hookean modell (nemlineáris, hiperelasztikus) !
- Mooney-Rivlin modell (nemlineáris, hiperelasztikus)
- ✓ Maxwell modell (viszkoelasztikus) 
- ✓ Kelvin-Voigt modell (viszkoelasztikus) 



23. Melyek a legfontosabb különbségek a rugalmas és képlékeny anyag viselkedése között?

Képlékeny anyagok esetén az alakváltozás maradandó. A két különböző alakváltozás határát folyáshatárnak nevezik.

24. Milyen rugalmas-képlékeny viselkedést leíró modelleket ismer?

Képlékeny viselkedést leíró modellek:

- Huber-Mises-Henchy modell (képlékeny)
- Tresca modell (képlékeny)

25. Mit nevezünk folyási feltételnek a mechanikában?

Folyási feltétel:

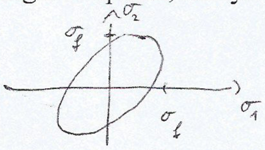
- A folyási feltétel az az összefüggés, amely a vizsgált pontban megadja az összes olyan feszültségállapotot, amelynek bekövetkeztekor az anyag képlékeny állapotba kerül. A folyási feltételt leggyakrabban egy általános alakú *f* függvénnyel adjuk meg, melynek független változói a vizsgált pont feszültségállapotát jellemző feszültségtenzor komponensei, vagy ezekből származtatott mennyiségek (pl. főfeszültségek, hidrosztatikus feszültségösszetevő). Az *f* függvény az anyagra jellemző állandókat is tartalmaz (pl. folyási feszültség).

- Az *f* függvényt úgy választjuk meg, hogy *f<0* a rugalmas állapotot, míg *f=0* a képlékeny állapotot jelentse. Tökéletesen képlékeny anyagmodell esetén az *f>0* állapot nem jöhet létre.

26. Ismertesse a Huber-Mises-Hencky-féle folyási feltételt!

Huber-Mises-Hencky féle folyási feltétel:

- $f = \frac{1}{6}\left[\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + \left(\sigma_y - \sigma_z\right)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2\right] + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 - \tau_f^2 = 0$ → képlékeny
  < 0 → rugalmas
  - ahol τ_f a tiszta nyírásra érvényes folyási határ, $\tau_f = \frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_f$
- A főfeszültségek terében ábrázolva egy olyan körhengert kapunk, melynek tengelye a hidrosztatikus tengely



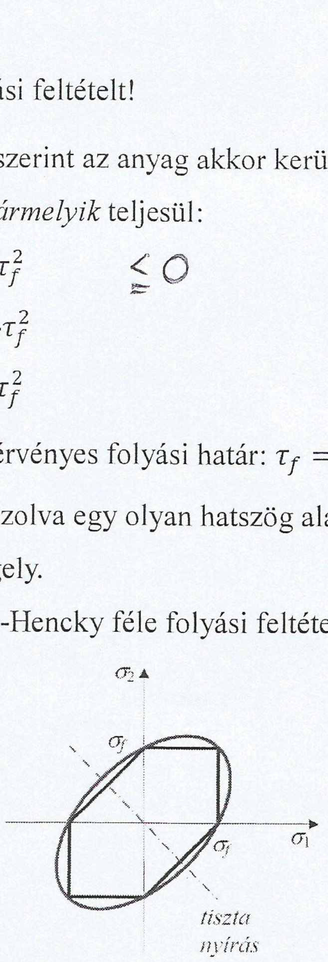
27. Ismertesse a Tresca-féle folyási feltételt!

A Tresca féle folyási feltétel szerint az anyag akkor kerül képlékeny állapotba, ha az alábbi három feltétel közül *bármelyik* teljesül:

- $f_1 = (\sigma_2 - \sigma_3)^2 - 4\tau_f^2$ ≤ 0
- $f_2 = (\sigma_1 - \sigma_3)^2 - 4\tau_f^2$
- $f_3 = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 - 4\tau_f^2$
- ahol a tiszta nyírásra érvényes folyási határ: $\tau_f = \frac{1}{2}\sigma_f$

A főfeszültségek terében ábrázolva egy olyan hatszög alapú hasábot kapunk melynek tengelye a hidrosztatikus tengely.

Összehasonlítás Huber-Mises-Hencky féle folyási feltétellel:



- Tiszta húzás, vagy nyomás esetén mindkét folyási feltétel azonos határt ad a normálfeszültségre

- Tiszta nyírás esetén a Tresca féle feltétel kisebb nyírófeszültséget enged meg.

28. Milyen mechanikai feltételek esetén kerülhet egy anyag képlékeny állapotba?

Ha a feszültségtenzor (σ) meghaladja a folyási feltétel függvénye (*f*) által adott értéket, az anyag képlékeny állapotba kerül.

Az *f* függvényt úgy választjuk meg, hogy *f<0* a rugalmas állapotot, míg *f=0* a képlékeny állapotot jelentse. Tökéletesen képlékeny anyagmodell esetén az *f>0* állapot nem jöhet létre.

29. Hogyan lehet megalkotni egy hiperelasztikus anyag (pl. érfal) anyagmodelljét?

Hiperelasztikus anyagmodellek

Energetikai megközelítés

- Alakváltozási energiasűrűség-függvény Ψ(ε),
- $\sigma_x = \frac{\partial\Psi(\varepsilon)}{\partial\varepsilon_x}, \sigma_y = \frac{\partial\Psi(\varepsilon)}{\partial\varepsilon_y}, \sigma_z = \frac{\partial\Psi(\varepsilon)}{\partial\varepsilon_z}$
- $\tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{\partial\Psi(\varepsilon)}{\partial\gamma_{xy}}, \tau_{yz} = \tau_{zy} = \frac{\partial\Psi(\varepsilon)}{\partial\gamma_{yz}}, \tau_{xz} = \tau_{zx} = \frac{\partial\Psi(\varepsilon)}{\partial\gamma_{xz}}$

Lineárisan rugalmas anyag esetén az energiafüggvény: $\Psi(\varepsilon) = \frac{1}{2}\varepsilon^T D^{-1}\varepsilon \longrightarrow \sigma = C^{-1}\varepsilon, \varepsilon = C\sigma$, ahol C az anyag paramétereit tartalmazza (C: hajlékonysági matrix, $D=C^{-1}$: merevségi matrix).

- $D=D^T$ (szimmetrikus)
- anizotróp anyagnál 21 elem
- ortotróp anyagnál 5 elem
- izotróp anyagnál 2 elem

30. Adott egy homogén, izotróp, lineárisan rugalmas anyagmodell. Mit jelentenek a megnevezésben szereplő jelzők?

Homogén

- Az anyag teljes térfogatában minden kémiai és fizikai jellemző azonos

Izotróp

- Az anyag tulajdonságai függetlenek a térbeli irányoktól. Ennélfogva az izotróp anyagokra vonatkozó fizikai egyenleteknek függetleneknek kell lenniük a választott koordináta-rendszertől. Az alakváltozási tenzor szimmetrikus tenzor.

Lineárisan rugalmas

- Az elmozdulások és alakváltozások terhelés esetén lineáris összefüggés szerint változik.

EDDIG VOLTAK AZ ANYAGMODELLEK

31. Ismertesse a virtuális erők tételét!

Virtuális erőrendszer

- A szerkezet egy tetszőleges statikailag lehetséges erőrendszerének változatlan statikai peremfeltételek mellett képzett differenciálisan kicsiny megváltozása.

Virtuális erők tétele

- A virtuális erők tétele kimondja, hogy egy elmozdulás-alakváltozás rendszer akkor és csak akkor geometriailag lehetséges, ha bármely virtuális erőrendszeren végzett munkája zérus.
    - $\delta\widetilde{W}_{k\ddot{u}ls\H{o}} + \delta\widetilde{W}_{bels\H{o}} = 0$

32. Ismertesse a virtuális elmozdulások tételét!

Virtuális elmozdulásrendszer

- A szerkezet egy tetszőleges geometriailag lehetséges elmozdulásrendszerének változatlan geometriai peremfeltételek mellett képzett differenciálisan kicsiny megváltozása

virtuális erő = egy virtuális erőrendszer a tényleges erőrendszernek egy kicsiny, de statikailag lehetséges variációja
↳ legyen egyensúly

Virtuális elmozdulások tétele

- A virtuális elmozdulások tétele kimondja, hogy egy erőrendszer akkor és csak akkor statikailag lehetséges, ha bármely virtuális elmozdulásrendszeren végzett munkája zérus.
    - $\delta\widetilde{W}_{k\ddot{u}ls\H{o}} + \delta\widetilde{W}_{bels\H{o}} = 0$
    (nincs virtuális munka)

virtuális elmozdulás = a tényleges elmozdulásrendszer egy geometriailag lehetséges variációja
↑
Tetszőlegesen kicsi (dW)

használata: erők meghatározása

33. Ismertesse a potenciális energia szélsőértéktételét! → (virtuális) elmozdulásrendszer

Teljes potenciál = külső + belső $\Pi = \Pi_{k\ddot{u}ls\H{o}} + \Pi_{bels\H{o}}$

- Külső potenciál: a vizsgált testre ható külső erők potenciális energiája
- Belső potenciál: a vizsgált testre ható belső erők potenciális energiája

A potenciális energia szélsőértéktétele:

- A geometriailag lehetséges elmozdulásrendszerek közül az a tényleges, ahol a potenciális energiának stacionaritási pontja van.
- Használata: egyensúlyi helyzet meghatározása.

34. Ismertesse a kiegészítő potenciális energia minimumtételét! → (virtuális) erőrendszer

Teljes kiegészítő potenciál = külső + belső

Kiegészítő potenciálok minimumtétele:

- A statikailag lehetséges erőrendszerek közül az a tényleges, ahol a kiegészítő potenciális energiának minimuma van.
- Használata: statikailag határozatlan szerkezetek számítása.

35. Írja fel a potenciális energia minimumtételét a funkcionál megadásával és a benne szereplő változók magyarázatával!

A potenciális energia minimumtétele:

- $\overline{\Pi} = -\bar{e}^T f - \int_{S_u} \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{q} dS - \int_V \overline{\boldsymbol{u}}^T \boldsymbol{q} dS + \frac{1}{2}\int_V \sigma^T H \sigma dV$ *, ahol*
- H: hajlékonysági matrix
- σ : feszültségvektor
- e, u: elmozdulásmezők
- g: tömegerők vektora
- e: energia (?)

36. Mi az alapvető különbség a potenciális energia szélsőértéktételének illetve a kiegészítő potenciális energia minimumtételének alkalmazása között?

< ld.: 33., 34. kérdés → használata >

37. Írja fel a teljes potenciális energia függvényét és magyarázza el a benne szereplő változók jelentését!

Húzott rúd esetén:

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_{x=0}^{x=1} EA\left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx - \int_{x=0}^{x=1} p_x(x)u(x)dx,$$

ahol

- EA(x): a rúd normálmerevsége x helyen
- u(x): a rúd x helykoordinátájú pontjának rúdirányú eltolódása
- $p_x(x)$: a rúdra ható x irányú megoszló teher intenzitása x helyen
- ε (x): a rúd x helyen lévő keresztmetszenékek bármely pontjában lévő x irányú fajlagos nyúlás ($\varepsilon(x) = \frac{du(x)}{dx}$)

38. Mi a Ritz-módszer és mire használható a mechanikai feladatoknál?

Ritz módszer

$\pi(u) = \min$ Ha a potenciális energiának minimuma van, akkor az egy stabil egyensúlyi állapot.

$u_k = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i \text{ --> } \textit{peremfeltételeket kielégítik}$

- Ha van olyan ~~[illegible]~~ irány, ahol $\Pi = max$, akkor az egy instabil egyensúlyi állapot.

$\frac{\partial \pi}{\partial c_i} = 0$

- Ha van olyan irány, ahol Π se nem maximális, se nem minimális, akkor az egy kritikus egy. állapot.

$\overline{\pi}(\underline{\sigma}) = \min$

39. Ismertesse az általános Ritz-módszer és a végeselem-módszer közötti hasonlóságokat és különbségeket!

A végeselem módszer egy speciális Ritz-módszer.

40. Mi a véges elemek módszere?

A végeselem módszer egy differenciálegyenlet megoldó eljárás. Mechanikában a potenciálfüggvény stacionaritási pontjának közelítésére használható.

41. Ismertesse a végeselemes számítási technika fontosabb lépéseit!

Végeselem módszer fontosabb lépései:

1, geometriai finitizálás : a tartomány felosztása (véges számú) elemekre

(~~2, matematikai finitizálás π(a)~~)

3, elemi mátrixok számítása : az integrálást elemenként végezzük

4, globális egyenletrendszer + peremfeltételek : összegezzük az elemi mátrixokhoz (pontokhoz) tartozó integrálokat

↓

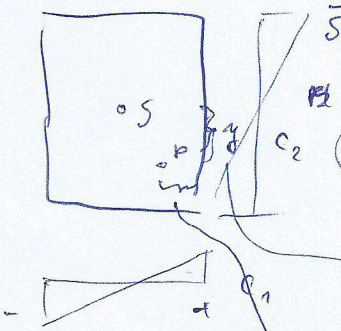
kompilálás

↓

megoldás

5, megoldás → u

(~~6, másodlagos változók számítása (ε, σ, r)~~)



$\bar{S}$; $J_x = \frac{a \cdot b^3}{12}$; M adott

$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{J_x} y \pm \frac{M_y}{J_y} x$

nincs [illegible]

$\frac{M_x}{J_x} y = C_1 \leftarrow S(x, y)$

$\frac{M_y}{J_y} x = C_2$

$(\sigma_{max} = +)$

$(\sigma_{min} = -)$