1. Zárthelyi 2010 ősz A3 90 perc

1. Adja meg az $y' = (x+y)^2$ differenciálegyenlet általános megoldását!

2. Adja meg azt az $y = y(x)$ függvényt, mely kielégíti az

$$x^5 - y^5\, y'(x) = 0 \quad (\text{más formában: } x^5\, dx - y^5\, dy = 0), \quad y(0) = -2$$

kezdeti érték problémát!

3. Oldja meg az $y' - y = e^x$, $y(0) = 1$ kezdeti érték problémát Laplace-transzformációval!

4. Határozza meg az $y^{(4)} - 5y'' + 4y = e^{3x}$ differenciálegyenlet általános megoldását!

5. Oldja meg az $\dot{x}_1 = x_1 - x_2$, $\dot{x}_2 = 2x_1 + 4x_2$ differenciálegyenlet-rendszert!
(Ponttal a t változó szerinti deriváltat jelöljük.)

6. Melyik igaz, melyik nem a differenciálegyenletekre vonatkozóan?

(a) Az elsőrendű lineáris differenciálegyenletek általános alakja a következő: $y' + f(x,y)y = g(x,y)$

(b) Tetszőleges differenciálegyenlet általános megoldása a homogén egyenlet általános megoldásának és az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldásának összege

(c) Egy lineáris differenciálegyenlet partikuláris megoldása az inhomogén egyenlet összes megoldása

(d) Az $y' = f(x,y)g(x,y)$ alakú differenciálegyenlet egzakt, ha $f_y = g_x$

(e) Az $y' + f(x)y = g(x)$ differenciálegyenlet homogén, ha $g(x) \equiv 0$

(f) Lineáris differenciálegyenlet tetszőleges két megoldásának összes lineáris kombinációja megoldása a differenciálegyenletnek.

1. Zárthelyi megoldásokkal 2010 ősz A3 90 perc

1. Adja meg az $y' = (x+y)^2$ differenciálegyenlet általános megoldását!

MO. Szeparábilisra visszavezethető (lineáris argumentumú): $u = x + y$ helyettesítés: **4p**

$u' = 1 + y' \rightsquigarrow y' = u' - 1 \rightsquigarrow u' - 1 = u^2 \rightsquigarrow u' = u^2 + 1 \rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow \int \frac{1}{1+u^2} du = \int dx \rightsquigarrow \operatorname{arctg} u = x + c \rightsquigarrow u = \operatorname{tg}(x+c) \rightsquigarrow y = \operatorname{tg}(x+c) - x$ **6p**

10p

2. Adja meg azt az $y = y(x)$ függvényt, mely kielégíti az $x^5\,dx - y^5\,dy = 0$, $y(0) = -2$ kezdeti érték problémát!

MO. $g(x,y) = x^5$, $h(x,y) = y^5$, $g_y = 0 = h_x$, továbbá g és h az egész síkon, azaz egy egyszeresen összefüggő tartományon értelmezett, tehát a diff.-egyenlet egzakt. **2p**

$F_x = g(x,y) = x^5$, $F_y = h(x,y) = -y^5 \rightsquigarrow F = x^6/6 + c(y) \rightsquigarrow c'(y) = F_y = -y^5 \rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow c(y) = -y^6/6 \rightsquigarrow F = x^6/6 - y^6/6 \rightsquigarrow x^6/6 - y^6/6 = c$.

Ennek $y = y(x)$ megoldásai az általános megoldás. **5p**

A kezdeti érték problémához: $y(0) = -2$, $0^6/6 - y(0)^6/6 = c \rightsquigarrow c = -2^6/6 \rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow x^6/6 - y^6/6 = -2^6/6 \rightsquigarrow x^6 - y^6 = -64, y \le 0 \rightsquigarrow y(x) = -\sqrt[6]{x^6+64}, x \in (-2,2)$. **3p**

10p

3. Oldja meg az $y' - y = e^x$, $y(0) = 1$ kezdeti érték problémát Laplace-transzformációval!

MO. $Y \doteq \mathsf{L}(y)$, $y(0) = 1$, $y' - y = e^x \rightsquigarrow sY - 1 - Y = \frac{1}{s-1} \rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow Y(s-1) = \frac{1}{s-1} + 1 \rightsquigarrow Y = \frac{s}{(s-1)^2}$. **4p**

Ezt kell parciális törtekre bontani: $\frac{s}{(s-1)^2} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{(s-1)^2} = \frac{A(s-1)+B}{(s-1)^2} \rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow s = A(s-1) + B \underset{s=1}{\rightsquigarrow} B = 1$ és $\underset{s=0}{\rightsquigarrow} 0 = -A + B = -A + 1 \rightsquigarrow A = 1$ **2p**

$\rightsquigarrow Y = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{(s-1)^2} \rightsquigarrow y = e^x + xe^x \rightsquigarrow y = e^x(1+x)$. **4p**

10p

4. Határozza meg az $y^{(4)} - 5y'' + 4y = e^{3x}$ differenciálegyenlet általános megoldását!

MO. (1) Homogén. Karakterisztikus egyenlet: $\lambda^4 - 5\lambda^2 + 4 = 0$.
Megoldása: $\lambda_{1,2} = \pm 1$, $\lambda_{3,4} = \pm 2$. Így a homogén egyenlet általános megoldása:

$$y_{há} = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x} + c_4 e^{-2x}.$$ **2p**

(2) Inhomogén. Megoldását $y = Ae^{3x}$ alakban keressük (mert a $3 + 0i = 3$ nem gyöke a karakterisztikus egyenletnek): **2p**

$$y' = 3Ae^{3x}, \quad y'' = 9Ae^{3x}, \quad y''' = 27Ae^{3x}, \quad y^{(4)} = 81Ae^{3x}.$$

Beírva az eredeti egyenletbe: $81Ae^{3x} - 45Ae^{3x} + 4Ae^{3x} = e^{3x} \rightsquigarrow 40A - 1 = 0$ (e^{3x} együtthatóiból)

$\rightsquigarrow A = \frac{1}{40}$. Az inhomogén egy partikuláris megoldása tehát: $y_{ip} = \frac{1}{40} e^{3x}$. **4p**

Így az inhomogén általános megoldása:

$$y_{iá} = y_{há} + y_{ip} = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x} + c_4 e^{-2x} + \frac{1}{40} e^{3x}$$ **2p**

10p

(*Folytatás a következő oldalon.*)

5. Oldja meg az $\dot{x}_1 = x_1 - x_2$, $\dot{x}_2 = 2x_1 + 4x_2$ differenciálegyenlet-rendszert! (Ponttal a t változó szerinti deriváltat jelöljük.)

MO. Az egyenletrendszer ilyen alakú: $\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{A}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, ahol $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. **1p**

Az alaprendszerhez meghatározzuk az $\underline{\underline{A}}$ sajátértékeit és sajátvektorait:

$\underline{\underline{A}} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \rightsquigarrow \lambda_{1,2} = 2, 3$. Ezek a sajátértékek, **2p**

a hozzájuk tartozó sajátvektorok meghatározása:

(a) $\lambda_1 = 2: \begin{pmatrix} 1-2 & -1 \\ 2 & 4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \underline{\underline{s_1}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

(b) $\lambda_2 = 3: \begin{pmatrix} 1-3 & -1 \\ 2 & 4-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \underline{\underline{s_2}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. **3p**

Az alaprendszer tehát: $\begin{pmatrix} e^{2t} & e^{3t} \\ -e^{2t} & -2e^{3t} \end{pmatrix}$ és ezzel az egyenletrendszer általános megoldása:

$$x_1 = c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t} \quad x_2 = -c_1 e^{2t} - 2c_2 e^{3t}$$

4p

10p

6. Melyik igaz, melyik nem a differenciálegyenletekre vonatkozóan?

(a) Az elsőrendű lineáris differenciálegyenletek általános alakja a következő: $y' + f(x,y)y = g(x,y)$

(b) Tetszőleges differenciálegyenlet általános megoldása a homogén egyenlet általános megoldásának és az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldásának összege

(c) Egy lineáris differenciálegyenlet partikuláris megoldása az inhomogén egyenlet összes megoldása

(d) Az $y' = f(x,y)g(x,y)$ alakú differenciálegyenlet egzakt, ha $f_y = g_x$

(e) Az $y' + f(x)y = g(x)$ differenciálegyenlet homogén, ha $g(x) \equiv 0$

(f) Lineáris differenciálegyenlet tetszőleges két megoldásának összes lineáris kombinációja megoldása a differenciálegyenletnek.

MO.

(a) Nem: az elsőrendű lin. diff.egyenlet alakja ez: $y' + f(x)y = g(x)$ **1p**
(mert az $Ay = y' + f(x)y$ lin. operátor) **1p**

(b) Nem: ez csak a lináris differenciálegyenletekre igaz **1p**

(c) Nem: partikuláris megoldás az egy kiszemelt megoldás **3p**

(d) Nem, minden explicit diff. egyenlet ilyen alakú
(Akkor egzakt, ha ilyen alakú: $g(x,y)\,dx + h(x,y)\,dy = 0$
és a $(g(x,y), h(x,y))$ függvénypárnak van primitív függvénye) **1p**

(e) Igaz

(f) Nem, ez csak a homogén egyenletre igaz: ha $b \neq 0$, akkor $y_1' + f(x)y_1 = b$, $y_2' + f(x)y_2 = b \rightsquigarrow$
$\rightsquigarrow (y_1 + y_2)' + f(x)(y_1 + y_2) = b + b = 2b \neq b$. **3p**

10p