ANALÍZIS(1,2) **SZIGORLAT** **2005. február. 1.**
Műszaki Informatika szak Munkaidő: 90 perc
BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

1. feladat (15 pont)
Írja le és bizonyítsa be a számsorozatokra vonatkozó rendőrelvet!

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n+2} = ?$$

Rendőrelv:
T

$$\left(\begin{array}{l} a_n \to A \\ b_n \to A \end{array} \quad \text{és} \quad \begin{array}{l} a_n \le c_n \le b_n \\ \forall n \in \mathbb{N} \end{array}\right) \implies (c_n \to A)$$

B $N(\varepsilon) := \max\{N_a(\varepsilon), N_b(\varepsilon)\}$ 1
Ha $n > N(\varepsilon)$: 1

$$2 \quad A-\varepsilon < a_n < A+\varepsilon \quad \text{és} \quad A-\varepsilon < b_n < A+\varepsilon \quad 1$$

$$\implies A-\varepsilon < a_n \le c_n \le b_n < A+\varepsilon. \quad 2$$

Tehát $c_n \to A$. ∎

$$3 \leftarrow a_n = 3 = \sqrt[n]{3^n} \overset{2}{\le} c_n = \sqrt[n]{3^n+2} \overset{2}{\le} \sqrt[n]{3^n+2\cdot 3^n} = \underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{\sqrt[n]{3}} \cdot 3 = b_n \to 3 \quad 2$$

$\Rightarrow c_n \to 3$ 1 a rendőrelv alapján. 1

2. feladat (10 pont)
a) Írja le a numerikus sorokra vonatkozó gyökkritérium mindkét alakját!
b) Konvergens-e az alábbi sor ?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+3}\right)^{2n^2+n}$$

SZ 050201/1

Gyökkritérim:

T Ha $\forall n \geq N$-re $a_n > 0$ és

a. $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1 \implies \sum_{N}^{\infty} a_n$ konv.

b. $\sqrt[n]{a_n} \geq 1 \implies \sum_{N}^{\infty} a_n$ div. (2)

T. Ha $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = c$ és

$c < 1 \implies \sum^{\infty} a_n$ konvergens.

$c > 1$ vagy $c = \infty \implies \sum^{\infty} a_n$ divergens. (2)

$$\sum_{1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+3}\right)^{n(2n+1)} = \sum_{1}^{\infty} a_n$$

$$\sqrt[n]{a_n} = \underset{(1)}{\left(\frac{n-1}{n+3}\right)^{2n+1}} = \underset{(2)}{\left(\frac{\left(1+\frac{-1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{3}{n}\right)^n}\right)^2} \underset{\to 1\ (1)}{\frac{1-\frac{1}{n}}{1+\frac{3}{n}}} \longrightarrow \underset{(2)}{\left(\frac{e^{-1}}{e^3}\right)^2 \cdot 1} = \frac{1}{e^4} = e^{-4}$$

3. feladat (8 pont)

Írja le a $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$ definícióját!

A folytonosság definíciójával bizonyítsa be, hogy az $f(x) = x^2$ függvény folytonos a $[2,3]$ intervallumban!

$\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists\, \delta(\varepsilon)$:

$|f(x) - A| < \varepsilon$, ha $0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ (2)

Folytonosság: $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists\, \delta(\varepsilon)$:

$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, ha $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$

$f(x) = x^2$ és $x_0 \in [2,3]$:

$$\underset{(1)}{|f(x) - f(x_0)|} = |x^2 - x_0^2| = \underset{(1)}{|x - x_0||x + x_0|} \underset{x, x_0 \in [2,3]}{\leq} |x - x_0| \cdot 6 < \varepsilon \quad (2)$$

$\Rightarrow |x - x_0| < \frac{\varepsilon}{6}$, tehát $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{6}$ (2)

sz 050201/2.

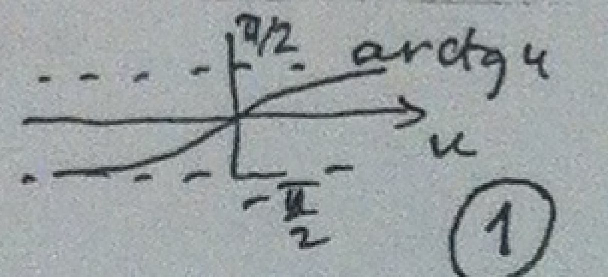
4. feladat (14 pont)

a) $\lim\limits_{x\to 2\pm 0} \operatorname{arctg} \dfrac{1-x}{x-2} = ?$

b) $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \ln(2x^2) = ?$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln 2x^2}{x^2} = ?$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3e^{4x} - e^{5x}}{4e^{5x} + e^{4x}} = ?$

a.) 

(1)

$$\lim_{x\to 2\pm 0} \operatorname{arctg} \frac{\overbrace{1-x}^{\to -1}}{\underbrace{x-2}_{\to \pm 0}} = \mp\frac{\pi}{2} \quad (1)$$

(2) $\to \mp\infty$

$\boxed{4}$

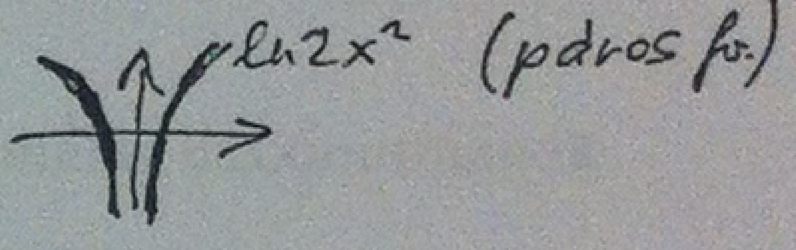
b.) $$\lim_{x\to 0} x^2 \ln 2x^2 = \lim_{x\to 0} \frac{\ln 2x^2}{\frac{1}{x^2}} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2x^2}\,4x}{\frac{-2}{x^3}} =$$

$0\cdot\infty$ (1) $\quad \frac{\infty}{\infty}$ (1) $\quad$ (2)

$$= \lim_{x\to 0}(-x^2) = 0 \quad (1)$$

$\boxed{5}$

c.) $$\lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{\ln 2x^2}^{\to -\infty}}{\underbrace{x^2}_{\to +0}} = -\infty$$



(Nem határozatlan alak)

$\boxed{2}$

d.) $$\lim_{x\to\infty} \frac{3e^{4x} - e^{5x}}{4e^{5x} + e^{4x}} = \lim_{x\to\infty} \underbrace{\frac{e^{5x}}{e^{5x}}}_{=1} \frac{3e^{-x} - 1}{4 + \underbrace{e^{-x}}_{\to 0}} = -\frac{1}{4} \quad (1)$$

(1) (1)

$\boxed{3}$

5. feladat (14 pont)

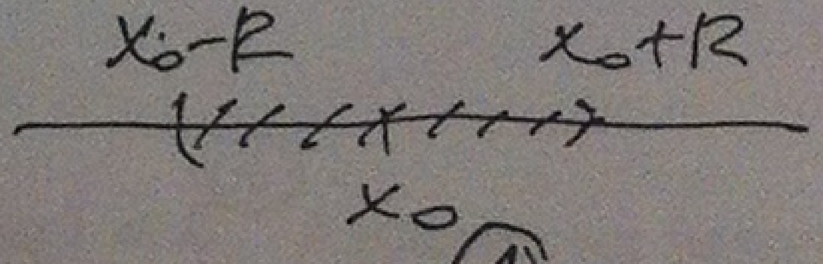
a) $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

Milyen jellegű lehet a fenti sor konvergencia tartománya?
Hogyan határozható meg a konvergencia tartomány leírására szolgáló jellemző?

b) Adja meg az alábbi sor konvergencia tartományát!

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, 2n}{6^n} (x-3)^n$$

a.) $|x - x_0| < R$ -ben konv.
$|x - x_0| > R$ -ben div
$|x - x_0| = R$?



(1)

De lehet $R = 0$: csak x_0-ban konv. a sor
$R = \infty$: $\forall$ x-re konvergens (1)

$\boxed{2}$

$\boxed{4}$

sz 050201/3

R meghatározása:

$\frac{1}{R} = \alpha = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}$ (2) vagy $\alpha = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{R}$ (2)

Ha $\alpha = 0$: $R = \infty$

$\alpha = \infty$: $R = 0$

egyébként : $R = \frac{1}{\alpha}$

b.) $x_0 = 3$

$\alpha = \overline{\lim} \sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n 2n}{6^n}\right|}$ (1) $= \lim_{n\to\infty} \frac{\underbrace{\sqrt[n]{2}}_{\to 1} \underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\to 1}}{6}$ (2) $= \frac{1}{6} = \frac{1}{R}$

$\Rightarrow R = 6$ (1)

$-3 \quad 3 \quad 9$ (1)

Végpontok:

$x = 9$: $\sum (-1)^n 2n \frac{6^n}{6^n} = \sum^{\infty} (-1)^n 2n \not\to 0$

Divergens, mert nem teljesül a szükséges feltétele a konvergenciának (általános tag nem tart nullához) (2)

$x = -3$: $\sum^{\infty} (-1)^n 2n \frac{(-6)^n}{6^n} = \sum^{\infty} 2n$ div.

(Indoklás ugyanaz) (1)

Konvergencia tartomány: $(-3, 9)$

6. feladat (15 pont)

Határozza meg az

$$f(x) = e^x\,, \qquad g(x) = \frac{1}{3+x}$$

függvények $x_0 = 0$ és $x_0 = 1$ pontok körüli Taylor sorait és azok konvergencia sugarait!

$\boxed{2}$ $\underset{x_0=0}{f(x)} = e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ (1) $x \in \mathbb{R}$ (1) $\Rightarrow R_1 = \infty$

$\boxed{4}$ $\underset{x_0=1}{f(x)} = e^x = e^{x-1+1}$ (1) $= e\, e^{x-1} = e \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n!}$ (2) $x \in \mathbb{R}$ (1) $\Rightarrow R_2 = \infty$

sz 050201/4.

$$g(x)=\frac{1}{3+x} = \frac{1}{3}\,\frac{1}{1-\frac{-x}{3}} \; (1) = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x}{3}\right)^n (2) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}x^n$$ c.)

$x_0=0$

$$K.T.: \left|\frac{-x}{3}\right| = \frac{|x|}{3} < 1 \Rightarrow |x|<3 \; (2) \Rightarrow R_3=3$$

$$\boxed{4}\; g(x)=\frac{1}{3+x} = \frac{1}{4+(x-1)} \; (1) = \frac{1}{4}\,\frac{1}{1-\frac{-(x-1)}{4}} \; (1) = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-(x-1)}{4}\right)^n (1) =$$

$x_0=1$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^{n+1}}(x-1)^n$$

$$K.T.: \left|\frac{-(x-1)}{4}\right| = \frac{|x-1|}{4} < 1 \Rightarrow |x-1| < 4 \; (1) \Rightarrow R_4=4$$

7. feladat (13 pont)

a) Írja le a lokális maximum definícióját (m dimenzióban)!

b) Adjon szükséges feltételt totálisan differenciálható függvény lokális maximumának létezésére az értelmezési tartomány belső pontjában (m dimenzióban)! Állítását bizonyítsa be!

c) Adjon elégséges feltételt differenciálható kétváltozós függvény lokális maximumának létezésére az értelmezési tartomány belső pontjában !

a.) (D) f-nek lokális maximuma van az $\underline{a} \in \mathrm{int} D_f$ pontban, ha $\exists K_{\underline{a},\delta} \subset \mathrm{int} D_f$, hogy

$f(\underline{x}) \le f(\underline{a}) \quad \forall \underline{x} \in K_{\underline{a},\delta}$-ra. (2)

(Nem szigorú szélsőértéket definiáltunk!)

b.) **Szükséges feltétel differenciálható függvény esetén lokális szélsőérték létezésére:**

(T)

$K_{\underline{a},\delta} \subset D_f$ és f totálisan deriválható $\underline{a}$-ban. Ha f-nek lokális szélsőértéke van $\underline{a}$-ban, akkor $df(\underline{a},\underline{h}) = 0 \quad \forall \; \lvert\underline{h}\rvert < \delta$-ra.

f tot. diffh.

vagy $f'_{x_i}(\underline{a})=0 \quad i=1,\dots,m.$

(B) Mivel

$$df(\underline{a},\underline{h}) = f'_{x_1}(\underline{a})\,h_1 + f'_{x_2}(\underline{a})\,h_2 + \dots + f'_{x_m}(\underline{a})\,h_m,$$

elegendő belátni, hogy a parciális deriváltak nullák $\underline{a}$-ban.

$$f_k(t) := f(a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, t, a_{k+1}, \dots, a_m)$$

f_k-nak is lokális szélsőértéke van $t=a_k$-ban, (2) ezért $\dot f_k(a_k)=0$. (1) Azonban az összetett függvény deriválási szabályát alkalmazva kapjuk, hogy (vagy a parciális derivált defje alapján) (2)

$$0 = \dot f_k(a_k) = \frac{\partial f(\underline{a})}{\partial x_1}\cdot 0 + \frac{\partial f(\underline{a})}{\partial x_2}\cdot 0 + \dots + \frac{\partial f(\underline{a})}{\partial x_k}\cdot 1 + \frac{\partial f(\underline{a})}{\partial x_{k+1}}\cdot 0 + \dots \frac{\partial f(\underline{a})}{\partial x_m}\cdot 0 =$$

$$= \frac{\partial f(\underline{a})}{\partial x_k} \qquad k=1,\dots,m$$

sz 050201/5.

c.) T Ha $f \in C^2_{K_{(x_0,y_0),\delta}}$ és

$$D(x,y) := |\underline{\underline{H}}(x,y)| \ \left(= \det \underline{\underline{H}}(x,y)\right) = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix}$$

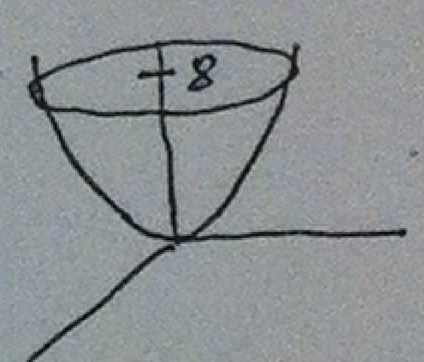
$f'_x(x_0,y_0) = 0,\ \ f'_y(x_0,y_0) = 0$ és $D(x_0,y_0) > 0$: *van* lok. szélsőérték:
($f''_{xx}(x_0,y_0) > 0$: lok. min)
$f''_{xx}(x_0,y_0) < 0$: lok. max. 3

($f'_x(x_0,y_0) = 0,\ \ f'_y(x_0,y_0) = 0$ és $D(x_0,y_0) < 0$: (x_0,y_0)-ban *nincs* lok. szélsőérték
$f'_x(x_0,y_0) = 0,\ \ f'_y(x_0,y_0) = 0$ és $D(x_0,y_0) = 0$: ? (További vizsgálat szükséges))

(¬B)

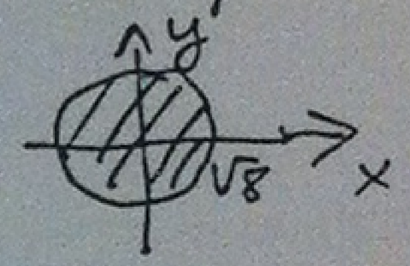
8. feladat (11 pont)
Számolja ki a $z = x^2 + y^2$ és a $z = 8$ felületek által határolt térrész térfogatát!

$\iiint_V 1 \, dV = ?$



Hengerkoordinátás transzformációval:

Vetületpontok:



$x = r\cos\varphi \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi$

$y = r\sin\varphi \qquad 0 \le r \le \sqrt{8}$ 1

$z = z \qquad r^2 \le z \le 8$ 1

$|J| = r$ 1

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{8}}\int_{r^2}^{8} r \, dz\, dr\, d\varphi \overset{2}{=} \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{8}} \underbrace{r z\Big|_{r^2}^{8}}_{8r - r^3 \ 1} \ 1 \ dr\, d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \underbrace{\left(4r^2 - \frac{r^4}{4}\right)\Big|_0^{\sqrt{8}}}_{32-16=16} \ 1 \ d\varphi = 16 \ 1 \cdot \varphi\Big|_0^{2\pi} \ 1 = 16 \cdot 2\pi = 32\pi \ 1$$

Vagy:

$$\iint\limits_{\text{▨}} \int_{x^2+y^2 \ (1)}^{8} 1 \ (1) \ dz\, dx\, dy = \iint\limits_{\text{▨}} 8 - (x^2+y^2)\, dx\, dy \ (1) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{8}} (8 - r^2)\, r \, dr\, d\varphi \ (1) \ (2)$$

$= \dots = 32\pi$ 4

sz 05020116.

Pótfeladat (csak az elégséges jegy eléréséhez javítjuk ki):

9. feladat (10 pont)

$$I := \int_0^{1/4} \left(\frac{1}{(e+x)\ln(e+x)} + \arcsin 2x \right) dx = ?$$

$$\boxed{4}\quad I_a = \int_0^{1/4} \frac{1}{(e+x)\ln(e+x)}\,dx = \int_0^{1/4} \frac{\frac{1}{e+x}}{\ln(e+x)}\,dx = \qquad \frac{f'}{f}$$

$$= \ln\ln(e+x)\Big|_0^{1/4} \; (2)\,(1) = \ln\ln\left(e+\tfrac{1}{4}\right) - \underbrace{\ln \underbrace{\ln e}_{=1}}_{=0} = \ln\ln\left(e+\tfrac{1}{4}\right) \; (1)$$

$$\boxed{6}\quad I_b = \int_0^{1/4} 1\cdot \arcsin 2x \; dx \qquad = x \arcsin 2x\Big|_0^{1/4} - \underbrace{\int_0^{1/4} \frac{2x}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx}_{-\left(-\frac{1}{4}\right)\int_0^{1/4} -8x\,(1-4x^2)^{-\frac{1}{2}}dx} \quad (3)$$

$$f'f^{-\frac{1}{2}}$$

$$u' = 1 \qquad v = \arcsin 2x$$

$$u = x \qquad v' = \frac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}}\cdot 2$$

$$\int_a^b u'v\,dx = u\cdot v\Big|_a^b - \int_a^b uv'\,dx$$

$$I_b = \frac{1}{4}\arcsin\frac{1}{2} - 0 + \frac{1}{4}\,\frac{(1-4x^2)^{1/2}}{\frac{1}{2}}\Bigg|_0^{\frac{1}{4}} \; (2) =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}\left(\sqrt{1-\frac{1}{4}} - 1\right) \left(= \frac{\pi}{24} + \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)\right) \quad (1)$$