1. Alapfogalmak

A valószínűség fogalmát a Kolmogorov-axiómák segítségével formalizálhatjuk

Def: Legyen Ω egy tetszőleges halmaz, ekkor:

- Eseménytér: Ω
- Kimenetel: az eseménytér egy eleme $\omega\in\Omega$
- Események: az eseménytér "kitüntetett" $A\subseteq\Omega$ részhalmazai
- Valószínűség: egy eseményhez hozzárendelt $P(A)$-val jelölt 0 s 1 között valós szám.

Olyan helyzetek melyekben szerepe van annak, hogy mi esemény s mi nem esemény:

(1) Geometriai valószínűség esetén területtel definiáljuk a valószínűséget. Azonban ha minden részhalmazra szeretnénk értelmes terület fogalmat definiálni az nem fog sikerülni, ellentmondásokba futunk. Emiatt definiáljuk hogy mit nevezünk eseménynek

(2) Megfigyelhetőségen is alapulhat hogy mit nevezünk eseménynek

(3) Folyamatok, vagyis időben változó véletlen mennyiségek esetén az idő múlásával változhat, hogy mit tudunk megfigyelni s emiatt mit tartunk eseménynek, lásd Markov láncok

Mivel az események halmazok, így értelmezve van az $A\cup B$, $A\cap B$ s a Ω-ra vett komplementere $\overline{A}$

Két esemény különbsége: $A\setminus B=A\cap\overline{B}$

Két esemény kizáró: $A\cap B=\emptyset$

Biztos esemény: Ω

Lehetetlen esemény: $\emptyset$

De-Morgan azonosságok: $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$ és $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i}=\bigcap_{i=1}^{\infty}\overline{A_i} \quad\text{és}\quad \overline{\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i}=\bigcup_{i=1}^{\infty}\overline{A_i}$$

Az összes eseményt tartalmazó halmazt eseményalgebrának nevezik

$\mathcal{F}\subseteq\mathcal{P}(\Omega)=2^{\Omega}$

$\mathcal{F}$ eseményalgebrának σ-algebrának kell lennie:

(1) $\Omega\in\mathcal{F}$

(2) ha $A\in\mathcal{F}\Rightarrow\overline{A}\in\mathcal{F}$

(3) ha $A_1,A_2\dots A_i\dots\in\mathcal{F}$ akkor $\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\in\mathcal{F}$

Ha $\mathcal{F}$-re úgy gondolunk, mint a megfigyelhető események halmazára, akkor a feltételek szerint meg kell tudnunk figyelni azt ami biztosan bekövetkezik (1), hogy egy esemény nem történik meg (2), illetve, ha az eseményeket külön-külön meg tudjuk figyelni, akkor azt is el tudjuk mondani, hogy az összesből egy bekövetkezett-e (3)

A σ-algebrának több tulajdonsága is adódik a definícióból.

- $\emptyset\in\mathcal{F}$
- ha $A,B\in\mathcal{F}\Rightarrow A\cup B,\ A\cap B,\ A/B\in\mathcal{F}$
- ha $A_1,A_2\dots A_i\in\mathcal{F}\Rightarrow\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i\in\mathcal{F}$

Az (1) tulajdonság miatt $\Omega\in\mathcal{F}$, így (2) miatt $\emptyset=\overline{\Omega}\in\mathcal{F}$

Legyen $A_1=A$ s $A_2=B$ illetve $\forall i\geq 3$ esetén $A_i=\emptyset$, ekkor (3) miatt $A\cup B=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\in\mathcal{F}$. (2) miatt $\overline{A},\overline{B}\in\mathcal{F}$, $\overline{A}\cup\overline{B}\in\mathcal{F}$ illetve $\overline{A}\cup\overline{B}=\overline{A\cap B}$, tehát $\overline{A\cap B}\in\mathcal{F}$ innen (2) miatt $A\cap B\in\mathcal{F}$

$A_i\in\mathcal{F}$ miatt $\overline{A_i}\in\mathcal{F}$, ezután (3) miatt $\bigcup_{i=1}^{\infty}\overline{A_i}\in\mathcal{F}$ ez pedig éppen $\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i$ komplementere

Def: Legyen $\mathcal{F}$ egy σ-algebra az Ω tetszőleges halmazon. Ekkor $P:\mathcal{F}\to[0,1]$ függvényt valószínűségi mértéknek nevezzük, ha $P(\Omega)=1$ s teljesül a következő: Ha $A_1,A_2\dots A_i\dots\in\mathcal{F}$ olyan eseménysorozat melyre $\forall i\neq j$ esetén $A_i\cap A_j=\emptyset$ akkor $P(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)$

Páronként kizáró eseménysorozat uniójának valószínűsége az események valószínűségeinek összege, ezt a tulajdonságot σ-additivitásnak nevezzük

Def: Egy $(\Omega,\mathcal{F},P)$ hármast (Kolmogorov-féle) valószínűségi mezőnek hívunk, ha $\mathcal{F}$ σ-algebra az Ω halmazon s P valószínűségi mérték

Valami klasszikus valószínűségi mező ha $P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}$ ($|A|$ a kimenetelek száma A-ban)

Állítás: Ha A s B kizáró, akkor $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

Biz: Használjuk a σ-additivitást $A_1=A$, $B=A_2$ illetve $A_i=\emptyset$ $\forall i\geq 3$-ra. Ekkor.

$$P(A\cup B)=P(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)=P(A)+P(B)+\sum_{i=3}^{\infty}P(\emptyset)$$

Köv: Tetsz $A,B\in\mathcal{F}$ eseményekre:

(1) $P(A)+P(\overline{A})=1$

(2) $P(A\cap B)+P(A\cap\overline{B})=P(A)$

(3) ha $B\subseteq A$ akkor $P(B)\leq P(A)$

Hogyan lehet kiszámolni az unió valószínűségét, ha az események nem feltétlen kizáróak? A válasz a Poincaré formula (Szita)

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)$$

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\sum P(\bigcap A_i)$$

Bonferroni-egyenlőtlenségek

Legyenek $A_1,A_2\dots A_n\in\mathcal{F}$ egyenlőtlenségek és $1\leq m_1,m_2\leq n$ egészek, ahol m_1 ptlan és m_2 ps $\Rightarrow$

$$P(\bigcup_{j=1}^{n}A_j)\leq\sum_{k=1}^{m_1}(-1)^{k+1}\sum_{J\subseteq[n]}P(\bigcap_{i\in J}A_i) \text{ és } P(\bigcup_{j=1}^{n}A_j)\geq\sum_{k=1}^{m_2}(-1)^{k+1}\sum_{J\subseteq[n]}P(\bigcap_{i\in J}A_i)$$

Köv: Boole egyenlőtlenség

Legyenek $A_1,A_2\dots A_n\in\mathcal{F}$ események $\Rightarrow$

$$P(\bigcup_{j=1}^{n}A_j)\leq\sum_{j=1}^{n}P(A_j) \quad\text{és}\quad P(\bigcup_{j=1}^{n}A_j)\geq 1-\sum_{j=1}^{n}P(\overline{A_j})$$

2. A valószínűség tulajdonságai

Def: A s B független ha $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$

Áll: Ha A s B függetlenek $\Rightarrow$ A s $\overline{B}$ is függetlenek

$P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap\overline{B})$

$P(A\cap\overline{B})=P(A)-P(A\cap B)=P(A)-P(A)P(B)=P(A)(1-P(B))=P(A)P(\overline{B})$

Def: Az $A_1\dots A_n$ események együttesen függetlenek, ha $\forall J\subseteq[n]$ részhalmazra

$$P(\bigcap_{i\in J}A_i)=\prod_{i\in J}P(A_i)$$

Def: Legyenek $A,B\in\mathcal{F}$ események. $P(A)>0$ akkor B esemény A-ra vett valószínűsége

$$P(B|A)\overset{def}{=}\frac{P(B\cap A)}{P(A)}$$

A s B pontosan akkor függetlenek ha $P(B|A)=P(B)$

Áll: Legyen $A\in\mathcal{F}$ rögzített esemény mire $P(A)>0$ ekkor $B\to P(B|A)$ is egy valószínűségi értékés

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i|A)=\frac{P(\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i\cap A)}{P(A)}=\frac{P(\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i\cap A)}{P(A)}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{P(B_i\cap A)}{P(A)}=\sum_{i=1}^{\infty}P(B_i|A)$$

Áll: Legyenek $A_1\dots A_n\in\mathcal{F}$ páronként kizáró események melyre $\bigcup_{i=1}^{n}A_i=\Omega$ és $\forall i$-re $P(A_i)>0$. Ekkor:

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(B|A_i)\cdot P(A_i) \quad\text{(Teljes valószínűség tétele)}$$

Def. $A_1,A_2\dots A_n\in\mathcal{F}$ páronként kizáró eseményekből álló sorozatot teljes eseményrendszernek hívunk ha $\bigcup_{i=1}^{n}A_i=\Omega$

Áll: Legyenek $A_1\dots A_n\in\mathcal{F}$ események melyre $\forall i$-re $P(A_i)>0$ ekkor

$$P(\bigcap_{i=1}^{n}A_i)=\prod_{i=1}^{n}P(A_i|\bigcap_{k=1}^{i-1}A_k) \quad\text{(Szorzási szabály)}$$

Pl.: $P(K_1)P(D_2|K_1)P(B_3|D_2\cap K_1)$

Karger algoritmus: Egy $G(V,E)$ gráfhoz keresünk egy globális minimális vágást. G irányítatlan hurokél mentes gráf legyen.

Az algoritmusban sorra választunk egy élt, majd "egyesítjük" a két végpontját, ezt addig ismételjük amíg 2 pont marad, ekkor megkapjuk egy lehetséges vágás nagyságát, ezt sokszor ismételve potenciálisan optimális megoldást találunk

Áll: A Karger Algoritmus egyszeri futtatása esetén legalább $\frac{2}{n^2}$ eséllyel optimális megoldást találunk.

Ez kicsi de ha $\ln n$-szer futtatjuk az algoritmust akkor a sikertelenség esélye a függetlenség miatt már csak $(1-\frac{2}{n^2})^{\frac{n^2}{2}\ln n}<\frac{1}{e^{\ln n}}=\frac{1}{n}$

Biz: Legyen F egy min vágás, az algoritmus azt akkor találja meg, ha F egy élét sem húzza össze. Legyen $|E|=m$ s $|F|=k$, s legyen A_i az, hogy az i. lépésben nem F-beli élt húztunk össze. Ekkor szorzási szabály miatt:

$$P(\text{siker})=P(\bigcap_{i=1}^{n-2}A_i)\geq\prod_{i=1}^{n-2}P(A_i|\bigcap_{j=1}^{i-1}A_j)$$

Az i. lépés előtt $n-(i-1)$ csúcsa van a gráfnak, mivel $|F|=k$ ezért $\forall$ csúcs foka legalább k $\Rightarrow$ az i. lépés előtt a gráfnak legalább $\frac{k(n-i+1)}{2}$ éle van. Tehát.

$$P(A_i|\bigcap_{j=1}^{i-1}A_j)\geq 1-\frac{k}{\frac{k(n-i+1)}{2}}=1-\frac{2}{n-i+1}$$

$$P(\text{siker})\geq(1-\frac{2}{n})(1-\frac{2}{n-1})\dots(1-\frac{2}{n-(n-3)})\geq\frac{(n-2)(n-3)\dots(3-2)}{n(n-1)\dots3}=$$

$$=\frac{2}{n(n-1)}>\frac{2}{n^2}$$

Áll: Legyenek $A,B\in\mathcal{F}$ események melyekre $P(B)>0$, $P(A)>0$. Ekkor:

$$P(A|B)=\frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} \quad\text{(Egyszerű Bayes tétel)}$$

Áll: Legyenek $B,A_1,A_2\dots A_n\in\mathcal{F}$ események melyekre $P(B)>0$ s $\forall i$-re $P(A_i)>0$ és $A_1,A_2\dots A_n$ teljes eseményrendszer. Ekkor

$$P(A_1|B)=\frac{P(B|A_1)P(A_1)}{\sum_{i=1}^{n}P(B|A_i)P(A_i)} \quad\text{(Bayes tétel)}$$

Biz: Ha felírjuk az egyszerű Bayes tételt s kifejtjük a nevezőt a teljes valószínűség tétellel éppen a megoldást kapjuk.

3. Diszkrét valószínűségi változók

Def: Legyen $X:\Omega\to\mathbb{R}$ függvény. Adott $x\in\mathbb{R}$ valós számra jelölje

$$\{X<x\}\overset{def}{=}\{\omega\in\Omega\mid X(\omega)<x\}$$

vagyis azon kimenetelek halmazát amikor X kisebb x. Ezeket a halmazokat az X nívóhalmazainak hívjuk. Az X fgv-t valószínűségi változónak nevezzük, ha minden $x\in\mathbb{R}$-re

$$\{X<x\}\in\mathcal{F}$$

azaz röviden X nívóhalmazai események

Def: Indikátor valószínűségi változó:

$$1_A(\omega)=\begin{cases}1 & \text{ha } A=\omega\\ 0 & \text{ha } A\neq\omega\end{cases}$$

Def: Egy X valószínűségi változó egyszerű, ha csak véges sok értéket vehet fel. Egy egyszerű valószínűségi változó várható értéke:

$$E(X)\overset{def}{=}\sum_{k\in Ran(X)}k\cdot P(X=k)$$

Tudjuk, hogy a képletben szerepel a k szerző ... ugyanis $\sum_{k \in Ran(X)} P(X=k) = 1$ bármely egyszerű X változó esetén

Áll: Legyenek X és Y valószínűségi változók. Ekkor $E(X+Y) = EX + EY$

Biz: Jelölje a $Ran(X+Y)$ halmazt M, $Ran(X)$-et K és $Ran(Y)$-t L. Ekkor

$$E(X+Y) = \sum_{m \in M} m\, P(X+Y=m) = \sum_{m\in M} m \cdot P\Big(\bigcup_{\substack{k\in K, l \in L \\ k+l=m}} \{X=k, Y=l\}\Big) = \sum_{m \in M} \sum_{\substack{k\in K, l\in L \\ k+l=m}} (k+l) P(X=k, Y=l) =$$

$$= \sum_{k\in K} \sum_{l \in L} (k+l) P(X=k, Y=l) = \sum_{k\in K} k \cdot P\Big(\bigcup_{l\in L}\{X=k, Y=l\}\Big) + \sum_{l \in L} l \cdot P\Big(\bigcup_{k\in K}\{X=k, Y=l\}\Big) =$$

$$= \sum_{k\in K} k \cdot P(X=k) + \sum_{l\in L} l \cdot P(Y=l) = EX + EY$$

Az egyes valószínűségi változók várható értékének meghatározásához elég volt a $P(X=k)$ értékeket ismernünk. Ezen valószínűségek összességét hívjuk az egyszerű valószínűségi változó eloszlásának.

Def: Egy X valószínűségi változó binomiális eloszlású ($n \in N$, $p \in [0,1]$) ha:

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \qquad k \in \{0,1,2,\dots,n\}$$

Jelölése: $X \sim B(n,p)$

Általánosan, ha független kísérleteket végzünk amelyeknek azonos a sikerességi esélyük, akkor n kísérletből a sikerek száma binomiális eloszlású n és p paraméterekkel.

Ha $X \sim B(n,p)$ akkor: $E(X) = E(1_{A_1} + \dots + 1_{A_n}) = P(A_1) + \dots + P(A_n) = n \cdot p$

Def: Egy X valószínűségi változó egyenletes eloszlású egy n elemű $S \subseteq R$ halmazon, ha
$P(X=k) = \frac{1}{n}$
minden $k \in S$ esetén

Ha $S = \{1,2 \dots n\}$ akkor a valószínűségi változó értéke $\frac{1+2+\dots+n}{n} = \frac{n+1}{2}$

Randomized Quicksort algoritmus, input: egy $x_1, x_2, \dots x_n$ különböző elemekből álló tömb ($n \geq 1$). Output: sorbarendezve a tömb. Válasszunk egy p elemet random módon a listából, majd a listát két halmazra bontjuk, p-nél nagyobbak, kisebbek, majd ezt rekurzívan alkalmazzuk. Legrosszabb esetben $\binom{n}{2}$ összehasonlítást kell végeznünk, ha már sorba van a tömb s mindig az első elemet választjuk.

Áll: Ha p-t random választjuk, jelölje X_n a quicksortban elvégzett összehasonlítások (véletlen) számát, ha n elemet rendezünk. Ekkor $E(X_n) \leq 2n \ln n$

Biz: Legyen $y_1 \dots y_n$ a rendezett tömb. Legyen X_{ij} pontosan akkor 1, ha össze lett hasonlítva y_i-t y_j-vel az algoritmus futása alatt. Mivel minden összehasonlítás legfeljebb egyszer végződik el így

$$X_n = \sum_{i<j} X_{ij}$$

Vegyük észre, hogy az X_{ij}-k nem függetlenek. De ettől még teljesül, hogy

$$EX_n = E\Big(\sum_{i<j} X_{ij}\Big) = \sum_{i<j} EX_{ij}$$

Tehát elég meghatároznunk az $EX_{ij} = P(X_{ij}=1)$ mennyiségeket.

Az $X_{ij}=1$ pontosan akkor teljesül, ha az $y_i, \dots y_j$ közül először y_i vagy y_j lesz pivot. Annak az esélye, hogy először y_i vagy y_j-t választjuk pivot elemnek $\frac{2}{j-i+1}$. Tehát

$$EX_n = \sum_{i<j} EX_{ij} = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{2}{j-i+1} = \sum_{k=2}^{n} (n-k+1)\frac{2}{k} = -2(n-1) + (n+1)\sum_{k=2}^{n}\frac{2}{k} = -4n + (2n+2)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

Belátható, hogy $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq \ln n + 1$ így $EX_n \leq -4n + (2n+2)(\ln n + 1) \leq 2n \ln n$

Def: Legyen X egy kizárólag nemnegatív értékeket felvevő valószínűségi változó. Definiáljuk ekkor a várható értéket:

$$E(X) \stackrel{def}{=} \sup_{\substack{Z \text{ egyszerű} \\ Z \leq X}} E(Z)$$

ami vagy egy nemnegatív valós szám vagy $+\infty$. Vagyis az X-nél nem nagyobb egyszerű valószínűségi változók várható értékeinek a szuprémuma.

Áll: Legyen X olyan nemnegatív valószínűségi változó, aminek értékkészlete $Ran(X) = \{k_1 \dots\}$ megszámlálhatóan végtelen. Ekkor

$$E(X) = \sum_{j=1}^{\infty} k_j P(X = k_j).$$

Def: Egy valószínűségi változó diszkrét ha értékkészlete megszámlálható.

4. Folytonos valószínűségi változók

Amikor X egy diszkrét valószínűségi változó akkor őt le tudjuk írni az eloszlásával vagyis a $P(X=k_1), P(X=k_2) \dots$ 0 és 1 közötti számokkal ahol $\{k_1, k_2 \dots\}$ X lehetséges értékei. Legyen X most egy egyenletesen véletlen szám a $[0,1]$ intervallumból. Ez azt jelenti, hogy $P(X \leq t) = t$, ekkor $P(X=k)=0$ $\forall k$ esetén.

Ha X egy egyenletesen véletlen szám $[0,1]$ és $Y = X^2 \Rightarrow P(Y \leq \frac{1}{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Def: Legyen X valószínűségi változó. Ekkor az

$F_X: R \to [0,1] \quad F_X(x) = P(X < x)$

függvényt eloszlásfüggvénynek hívjuk.

Vegyük észre, hogy $\{X<x\}$ elemi esemény (tehát esemény)

$F_X(b) - F_X(a) = P(X<b) - P(X<a) = P(a \leq X < b)$

Áll: Egy $F: R \to [0,1]$ függvény akkor s csak akkor eloszlásfüggvénye valamilyen valószínűségi változónak ha:

(1) F (nem feltétlenül szigorúan) monoton növő

(2) F balról folytonos

(3) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ és $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$

Biz: Legyen X valószínűségi változó és $x<y$. Lássuk be a három tulajdonságot.

F_X monoton növő hisz $\{X<x\} \subseteq \{X<y\}$ ezért

$F_X(x) = P(X<x) \leq P(X<y) = F_X(y)$

Az F_X balról folytonossága azt jelenti, hogy tetszőleges monoton növő (x_n) sorozatra amire $x_n \neq x$ és $x_n \to x$ teljesülnie kell, hogy $\lim_{n\to\infty} F_X(x_n) = F_X(x)$. Megmutatjuk hogy ez teljesül, ugyanis:

$$\lim_{n\to\infty} F_X(x_n) = \lim_{n\to\infty} P(X<x_n) = P(X<x_0) + \lim_{n\to\infty} P\Big(\bigcup_{k=1}^{n}\{x_{k-1} \leq X < x_k\}\Big)$$

felhasználva a valószínűség additivitását, illetve, hogy $\{X<x_n\} = \{X<x_0\} \cup \{x_0 \leq X < x_n\} = \{X<x_0\} \cup \bigcup_{k=1}^{n}\{x_{k-1} \leq X < x_k\}$

$$\lim_{n\to\infty} P\Big(\bigcup_{k=1}^{n}\{x_{k-1} \leq X < x_k\}\Big) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} P(x_{k-1} \leq X < x_k) = P(x_0 \leq X < x)$$

felhasználva a valószínűség σ additivitását, illetve, hogy $\bigcup_{k=1}^{\infty}\{x_{k-1} \leq X < x_k\} = \{x_0 \leq X < x\}$. Ezt visszahelyettesítve azt kapjuk hogy $\lim_{n\to\infty} F_X(x_n) = P(X<x_0) + P(x_0 \leq X < x) = P(X<x) = F_X(x)$. Hasonlóan ellenőrizhető a harmadik feltétel is

Visszafelé: legyen adott F, ehhez keresünk egy megfelelő X valószínűségi változót amire $F = F_X$. Legyen U egy egyenletesen véletlen szám a $[0,1]$ intervallumból. Definiáljuk az X-et mint

$X = \inf\{y \in R \mid U < F(y)\}$

Ekkor az X infimum definíciója miatt

$P(X<x) = P(\inf\{y\in R \mid U < F(y)\} < x) = P(\text{van } y \in R \text{ amire } y<x \text{ és } U<F(y))$

Belátható, hogy ilyen y pontosan akkor létezik, ha $U < F(x)$. Ha van ilyen y akkor $U < F(y) < F(x)$, mivel F mon. növő. Megfordítva ha $U < F(x) \Rightarrow F$ balról folytonossága miatt van x-hez elég közel egy y amire $U < F(y)$ szintén teljesül kicsit kisebb.

$P(X<x) = P(U < F(x)) = F(x)$

hiszen $0 \leq F(x) \leq 1$ és a példában láttuk, hogy $P(U<z) = z$ bármely $0 \leq z \leq 1$ szám esetén. Ezzel az állítást beláttuk.

Def: Egy X valószínűségi változót folytonosnak nevezünk ha létezik olyan nemnegatív valós $f_X: R \to R$ függvény amire az $\int_{-\infty}^{x} f_X(z)dz$ improprius Riemann integrál véges, s $\forall x \in R$ esetén

$\int_{-\infty}^{x} f_X(z)dz = F_X(x)$

Áll: Ha F_X folytonos s véges sok pont kivételével mindenhol deriválható akkor X folytonos valószínűségi változó és az

$$f(x) = \begin{cases} F_X'(x) & \text{ha } F_X \text{ deriválható } x\text{-ben} \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases} \qquad (x \in R)$$

függvény sűrűségfüggvénye X-nek

Áll: Legyen X folytonos valószínűségi változó. Ekkor $\forall a<b$ $a,b \in R$ esetén

$P(a<X<b) = \int_a^b f(x)\,dx$

Biz: A valószínűség additivitása miatt

$P(a<X<b) = P(X<b) - P(X<a) - P(X=a) = \int_{-\infty}^{b} f_X(x)dx - \int_{-\infty}^{a} f_X(x)dx - 0 = \int_a^b f(x)dx$

ahol felhasználtuk, hogy az integrálás additív az integrálási intervallumban

Áll: Egy nemnegatív $f: R \to R$ függvényhez akkor s csak akkor létezik X folytonos valószínűségi változó aminek az f sűrűségfüggvénye, ha f Riemann integrálható és

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

Áll: Legyenek X s Y nemnegatív valószínűségi változók. Ekkor $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

Def: Legyen X tetszőleges valószínűségi változó. Jelölje $X^+ = \max(X, 0)$ az X pozitív részét s $X^- = \max(-X, 0)$ az X negatív részét. Ekkor X^+, X^- nemnegatív valószínűségi változók, továbbá $X = X^+ - X^-$. Ha $E(X^+) < \infty$ vagy $E(X^-) < \infty$ akkor legyen

$E(X) \stackrel{def}{=} E(X^+) - E(X^-)$

Ami vagy egy valós szám vagy $+\infty$ vagy $-\infty$. Ha $E(X^+) = E(X^-) = \infty$, akkor a várható értéket nem értelmezzük.

Áll: Legyen X folytonos valószínűségi változó amire

$\int_{-\infty}^{\infty} |t| \cdot f_X(t)dt < \infty$

Ekkor

$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} t f_X(t)\,dt.$

Def: Egy X valószínűségi változó egyenletes eloszlású az (a,b) intervallumon, ha sűrűségfüggvénye

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{ha } a<x<b \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

Jele: $X \sim U(a,b)$

Ez valóban sűrűségfüggvény hisz

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_a^b \frac{1}{b-a} dx = \left[\frac{x}{b-a}\right]_a^b = \frac{b-a}{b-a} = 1$

Egy egyenletes eloszlású valószínűségi változó várható értéke

$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx = \int_a^b \frac{x}{b-a}dx = \left[\frac{x^2}{2(b-a)}\right]_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$

Állítás: Legyen X valószínűségi változó és $g: R \to R$ függvény. Tegyük fel, hogy $E(g(X))$ létezik.

Ha X diszkrét akkor

$E(g(X)) = \sum_{j=1}^{\infty} g(k_j)\, P(X=k_j)$

ahol $Ran(X) = \{k_1, k_2 \dots\}$. Ha pedig X folytonos akkor

$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, f_X(x)\,dx$

5. Nevezetes Valószínűségi Eloszlások

Def: Egy X valószínűségi változó geometriai eloszlású p paraméterrel (ahol $p \in [0,1]$) ha

$P(X=k) = (1-p)^{k-1} p$

minden k pozitív egész esetén. Jele. $X \sim Geo(p)$

Példa: Kockával dobás, mindig 1/6 esélyünk van hatosra $\Rightarrow$ várható érték: $\frac{1}{p}$

Def: Egy Z valószínűségi változó exponenciális eloszlású λ paraméterrel ($\lambda > 0$ valós) ha

$$f_Z(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{ha } x>0 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases} \quad \text{azaz} \quad F_Z(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{ha } x>0 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

Jele: $Z \sim Exp(\lambda)$

Várható értéke: $\frac{1}{\lambda}$

Def: Nevezzünk egy X valószínűségi változót örökifjúnak a $G \subseteq R$ halmazon, ha tetsz. $s,t \in G$ esetén

$P(X > t+s \mid X > s) = P(X>t)$

Ha s-ig nem következett be a kérdéses, akkor ugyanakkora eséllyel kell még t időt várnunk, mintha most kezdtük volna el a várakozást (ha az X az idő)

Áll: Legyen X nemkonstans örökifjú valószínűségi változó a G halmazon

(1) Ha $G = \{1,2,3 \dots\}$ akkor X eloszlása geometriai

(2) Ha $G = [0, \infty)$ akkor X eloszlása exponenciális

Biz: $P(X > t+s) = P(X>t)\,P(X>s) \quad (\forall s,t \in G)$

(1) Jelölje $P(X=1)$-et p. Ekkor $s=1$ esetén tetsz. t-pozitív egészre:

$P(X>t+1) = P(X>t)P(X>1) = P(X>t)(1-p) = P(X>t-1)(1-p)^2 = \dots = (1-p)^{t+1}$

Innen adódik a változó diszkrét eloszlása

$P(X=t) = P(X>t-1) - P(X>t) = (1-p)^{t-1} - (1-p)^t = (1-(1-p))(1-p)^{t-1} = p(1-p)^{t-1}$

Problémát okoz $p \in \{0,1\}$ esetén van, ha $p=0 \Rightarrow P(X=t)=0$ $\forall t \in \{1,2,\dots\}$ esetén amely egyenlőtlen így nem határozzák meg X eloszlását viszont X örökifjúság definíciójában feltettük, hogy X értéke G-be esik mely ellentmondás

(2) Jelöljük $g(t)$-vel az $\ln P(X>t)$-t. Ezt értelmezzük kivéve, ha $X=0$ valójában kizárjuk.

$g(t+s) = \ln P(X>t+s) = \ln P(X>t) + \ln P(X>s) = g(t) + g(s)$

tehát g additív. Tudjuk továbbá, hogy g mon. csökkenő

Lemma: Ha $g: [0,\infty) \to R$ mon. csökkenő lesz ami additív $\Rightarrow$ tetsz $s,t \in [0,\infty)$ esetén, akkor $g(t) = -\lambda t$ ahol $\lambda = -g(1) \geq 0$

A lemma miatt $\ln P(X>t) = g(t) = -\lambda t$. ahol $\lambda = -\ln P(X>1)$ emiatt.

$P(X \leq t) = 1 - P(X>t) = 1 - e^{-\lambda t}$

ahol $\lambda \neq 0$ különben $P(X>t) = 1$ minden t-re teljesülne, ami lehetetlen. Nézzük $P(X<t)$-re van szükségünk. Vegyük észre, hogy $t \to P(X \leq t)$ folytonos ezért $P(X<t) = \lim_{s \nearrow t} P(X \leq s) = P(X \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$, ami épp az exponenciális eloszlás eloszlásfüggvénye.

Áll: Ha az X val. változó exponenciális eloszlású λ paraméterrel akkor $\lceil X \rceil$ geometriai eloszlású $1-e^{-\lambda}$ paraméterrel

Biz: Világos, hogy $P(\lceil X \rceil = 0) = P(-1 < X \leq 0) = 0$ továbbá tetsz k pozitív egész esetén

$P(\lceil X \rceil = k) = P(k-1 < X \leq k) = F_X(k) - F_X(k-1) = (1-e^{-\lambda k}) - (1 - e^{-\lambda(k-1)}) = e^{-\lambda(k-1)} - e^{-\lambda k} =$

$= e^{-\lambda(k-1)}(1-e^{-\lambda})$

ami a $p = 1-e^{-\lambda}$ jelöléssel éppen $(1-p)^{k-1}p$ vagyis $\lceil X \rceil$ geom. eloszlású $1-e^{-\lambda}$ paraméterrel

Def: Az X Poisson-eloszlású λ paraméterrel ($\lambda > 0$) ha

$P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

minden nemnegatív egész k-ra. Jele $X \sim Poi(\lambda)$

$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda} = \lambda \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} = \lambda$

Rengeteg kis valószínűségű független esemény bekövetkezéséről szól az eloszlás

Áll: Legyen n poz. egész, $\lambda \in (0,\infty)$, és jelölje p_n $\frac{\lambda}{n}$-et. Ekkor tetszőleges $k \in \{0,1,2 \dots\}$ esetén

$\lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

Biz: fix $k \leq n$ esetén

$\binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!\, n^k} \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}$

$\frac{\lambda^k}{k!}$ nem fog változni: $n \to \infty$ míg $\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \to e^{-\lambda}$ és $\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \to 1$

$\frac{n!}{(n-k)!\, n^k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n\, n \dots n}$ ahol a tagok mind 1-hez tartanak

6. Valószínűségi változók kapcsolata

Def: Legyenek X és Y valószínűségi változók az $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűségi mezőn. Azt mondjuk, hogy X és Y függetlenek, ha minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén az $\{X<x\}$ és $\{Y<y\}$ események függetlenek.

Áll: Két diszkrét valószínűségi változó pontosan akkor független, ha $\forall x, y$ esetén az $\{X=x\}$ és $\{Y=y\}$ események függetlenek, azaz
$P(\{X=x\} \cap \{Y=y\}) = P(X=x)P(Y=y)$

Áll: Ha X és Y független valószínűségi változók és $E(XY), E(X), E(Y)$ léteznek, akkor
$E(XY) = E(X)E(Y)$

Biz: Csak arra az esetre, amikor X és Y egyszerű val. változók. Először legyenek X és Y indikátor változók, azaz $X = 1_A$ és $Y = 1_B$ valamely A, B eseményre:
$E(1_A 1_B) = E(1_{A\cap B}) = P(A\cap B) = P(A)P(B) = E(1_A)E(1_B)$
itt tehát teljesül az állítás.
Ha X és Y egyszerű val. változó, akkor X és Y felírható indikátor val. változók lineáris kombinációjaként:
$X = \sum_{k\in Ran(X)} k \cdot 1_{\{X=k\}}$ és $Y = \sum_{l \in Ran(Y)} l \cdot 1_{\{Y=l\}}$
Az előző állítást és a várható érték additivitását felhasználva kapjuk:
$E(XY) = E\left(\sum_{k\in Ran(X)} k\, 1_{\{X=k\}} \sum_{l\in Ran(Y)} l \cdot 1_{\{Y=l\}}\right) = \sum_{k\in Ran(X)} \sum_{l \in Ran(Y)} kl\, E(1_{\{X=k\}} 1_{\{Y=l\}}) =$
$= \sum_{k\in Ran(X)} \sum_{l\in Ran(Y)} kl\, E(1_{\{X=k\}})E(1_{\{Y=l\}}) = E\left(\sum_{k\in Ran(X)} k\, 1_{\{X=k\}}\right) E\left(\sum_{l\in Ran(Y)} l\, 1_{\{Y=l\}}\right)$
Ez épp az $E(X)E(Y)$ belátandó állítás.

Def: Legyenek X és Y egyszerű val. változók. Ha adott X és Y együttes eloszlása, vagyis a $P(X=k, Y=l)$ valószínűség $\forall k \in Ran(X)$ és $l \in Ran(Y)$ esetén, akkor X és Y eloszlásait az együttes eloszlás marginális eloszlásainak nevezzük.
A marginális eloszlásokat a következőképp számíthatjuk ki:
$P(X=k) = \sum_{l\in Ran(Y)} P(X=k, Y=l)$ és $P(Y=l) = \sum_{k\in Ran(X)} P(X=k, Y=l)$
Az X és Y valószínűségi változók kovarianciáját a következőképp definiáljuk:

Def: $cov(X,Y) = E((X-EX)(Y-EY))$
feltéve, hogy a várható értékek léteznek és végesek.

Áll: Ha $cov(X,Y)$ értelmes, akkor $cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

Biz: A definíciót kibontva:
$E((X-EX)(Y-EY)) = E(XY) - E(E(X)Y) - E(XE(Y)) + E(E(X)E(Y)) = E(XY) + (-1-1+1)E(X)E(Y) =$
$= E(XY) - E(X)E(Y)$

Köv: Legyen X és Y val. változó, melyekre $cov(X,Y)$ értelmes.
(1) Ha Y konstans $\Rightarrow cov(X,Y) = 0$
(2) Ha X és Y függetlenek $\Rightarrow cov(X,Y) = 0$
(3) Attól, hogy $cov(X,Y) = 0$ nem teljesül, hogy X és Y független

Biz: (1) Vegye Y konstans értéket $c \in \mathbb{R}$. Ekkor:
$cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = E(Xc) - E(X)c = 0$
(2) $cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0$
(3) Legyen $Ran(X) = \{-1, 0, 1\}$ amely értékeket $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}$ és $\frac{1}{4}$ valószínűségekkel veszi fel X. Legyen $Y = |X|$. Kiszámolható, hogy $cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0 - 0 \cdot \frac{1}{2} = 0$ pedig a változók nem függetlenek, hisz $P(X=0)P(Y=1) = \frac{1}{2}\frac{1}{2}$, míg $P(X=0, Y=1) = 0$

Def: Egy X valószínűségi változó szórásnégyzete, vagy más néven varianciája
$cov(X,X) = E((X-EX)^2) = E(X^2) - E(X)^2$
Jele: $D^2(X)$ vagy $Var(X)$
X szórásnégyzete az X-nek átlagos értékétől vett négyzetes eltérése

Áll: Ha X és Y függetlenek, akkor $D^2(X+Y) = D^2(X) + D^2(Y)$

Biz: A szórásnégyzet definícióját kibontva:
$D^2(X+Y) = E((X+Y)^2) - (E(X+Y))^2 = E(X^2) + E(Y^2) + 2E(XY) - E(X)^2 - E(Y)^2 - 2E(X)E(Y) =$
$= D^2(X) + D^2(Y) + 2cov(X,Y) = D^2(X) + D^2(Y)$

Áll: Ha $D(X)$ létezik és véges, akkor tetsz. $c \in \mathbb{R}$ esetén
$D(X+c) = D(X)$ és $D(cX) = |c|\, D(X)$
azaz a szórás eltolás invariáns és abszolút homogén

Biz: A szórásnégyzet definícióját kibontva:
$D^2(X+c) = E((X+c-E(X+c))^2) = E((X-EX)^2) = D^2(X)$
$D^2(cX) = E((cX - E(cX))^2) = E(c^2(X-EX)^2) = c^2 D^2(X)$
Ezen egyenletekből gyökvonással kijön az állítás.

Def: Legyenek X és Y val. változók. Ha $cov(X,Y)$, $D(X)$ és $D(Y)$ értelmes, akkor X és Y korrelációja:
$$corr(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{D(X)D(Y)}$$

Áll: Legyenek X és Y val. változók. Ha $corr(X,Y) \in \{-1, 1\}$ akkor az $Y = aX + b$ állítás 1 valószínűséggel teljesül valamely a és b valós számokra, ahol az a előjele megegyezik a $corr(X,Y)$ előjelével.

7. Folytonos együttes eloszlás és konvolúció

Def: Legyenek $X_1, X_2 \dots X_n$ valószínűségi változók valamilyen n pozitív egész esetén. Ekkor $\underline{X} = (X_1, X_2 \dots X_n): \Omega \to \mathbb{R}^n$ függvényt valószínűségi vektorváltozónak hívjuk. Az $\underline{X}$ együttes eloszlásfüggvénye az:
$F_X: \mathbb{R}^n \to [0,1]$ $\quad F_X(x_1 \dots x_n) = P(X_1 < x_1, X_2 < x_2 \dots X_n < x_n)$
vektorváltozós valós értékű függvény

Def: Legyen $\underline{X} = (X_1 \dots X_n)$ valószínűségi vektorváltozó. Egy $f_X: \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ függvény az $\underline{X}$ együttes sűrűségfüggvénye, ha f_X-nek létezik az improprius Riemann-integrálja $\mathbb{R}^n$-en és
$$\int_{-\infty}^{x_n} \dots \int_{-\infty}^{x_1} f_X(z_1 \dots z_n)\, dz_1 \dots dz_n = F_X(x_1 \dots x_n)$$
tetszőleges $x_1 \dots x_n \in \mathbb{R}$ esetén. $\underline{X}$-et folytonosnak hívjuk, ha létezik együttes sűrűségfüggvénye.

Áll: Legyen $f: \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$. Ekkor:
$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1 \dots x_n)\, dx_1 \dots dx_n = 1$$
$\Updownarrow$
pontosan akkor teljesül, ha létezik $\underline{X} = (X_1 \dots X_n)$ valószínűségi vektorváltozó, aminek f sűrűségfüggvénye

Áll: Legyen $\underline{X} = (X_1 \dots X_n)$ valószínűségi vektorváltozó. Ha $\underline{X}$ folytonos, akkor az alábbi függvény az $\underline{X}$ sűrűségfüggvénye:
$$f_X(x_1 \dots x_n) = \begin{cases} \partial_{x_1} \dots \partial_{x_n} F_X(x_1 \dots x_n) & \text{ha ez létezik} \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

Áll: Legyen $H \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-mérhető halmaz és $\underline{X} = (X_1 \dots X_n)$ valószínűségi vektorváltozó. Ekkor:
$$P(X \in H) = \int_H f_X(x)\, dx$$

Def: Ha $\underline{X} = (X_1 \dots X_n)$ val. vektorváltozó, akkor az X_i val. változó eloszlását az $\underline{X}$ i-edik marginális eloszlásának (vagy peremeloszlásának) hívjuk.

Áll: Ha $\underline{X}$ folytonos val. vektorváltozó, akkor X_i is folytonos, sűrűségfüggvénye:
$$f_{X_i}(x_i) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x_1 \dots x_n)\, dx_1 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_n \quad (\forall x_i \in \mathbb{R})$$

Def: Az $X_1 \dots X_n$ val. változók együttesen függetlenek, ha az
$\{X_1 < x_1\} \dots \{X_n < x_n\}$
események függetlenek $\forall x_i \in \mathbb{R}$ esetén.

Áll: Az $X_1 \dots X_n$ val. változók pontosan akkor függetlenek, ha
$F_{(X_1 \dots X_n)}(x_1 \dots x_n) = F_{X_1}(x_1) \dots F_{X_n}(x_n)$

Áll: Legyenek $X_1 \dots X_n$ folytonos val. változók. Ezek pontosan akkor függetlenek, ha $(X_1 \dots X_n)$ folytonos val. vektorváltozó és:
$f_{(X_1 \dots X_n)}(x_1 \dots x_n) = f_{X_1}(x_1) \dots f_{X_n}(x_n)$
$\forall x_i \in \mathbb{R}$ esetén

Áll: Legyenek X és Y független diszkrét val. változók, amik értékei nemnegatív egész számok. Ekkor:
$P(X+Y=k) = \sum_{i=0}^{k} P(X=i)P(Y=k-i)$
$\forall k \in \mathbb{N}$ esetén

Áll: Legyenek X és Y független folytonos val. változók. Ekkor a
$z \to \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\, dx$
függvény az X+Y sűrűségfüggvénye

Def: Legyenek X és Y független val. változók. Ekkor X+Y eloszlását az X és Y eloszlásai konvolúciójának hívjuk.

8. Normális eloszlás

Def: Egy Y val. változó normális eloszlású μ és σ^2 paraméterekkel, ha Y folytonos val. változó, és sűrűségfüggvénye
$$f_Y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$
Jele: $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$
Ha $\mu = 0$ és $\sigma^2 = 1$ $\Rightarrow$ az eloszlás neve standard normális eloszlás, sűrűségfüggvényét φ jelöli:
$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Áll: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} = \sqrt{2\pi}$

Biz: Vizsgáljuk az integrál négyzetét:
$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy\right) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\, dy\, dx$$
Ezt polárkoordinátákra való áttéréssel számolhatjuk: legyenek $x = r\cos(\alpha)$ és $y = r\sin(\alpha)$
$$\lim_{R\to\infty} \int_0^{2\pi}\int_0^R e^{-\frac{r^2}{2}} r\, dr\, d\alpha = \int_0^{2\pi} \left[-e^{-\frac{r^2}{2}}\right]_0^R d\alpha = \int_0^{2\pi} \left(-e^{-\frac{R^2}{2}} + 1\right) d\alpha = 2\pi\left(1 - e^{-\frac{R^2}{2}}\right)$$
Ami a helyes állítás, hisz $R \to \infty$ esetén $e^{-\frac{R^2}{2}} \to 0$ és 2π a $\sqrt{2\pi}$ négyzete

Lemma: Legyen $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ és legyen X folytonos val. változó, melynek sűrűségfüggvénye f_X. Ekkor $Y = \sigma X + \mu$ sűrűségfüggvénye:
$$f_Y(x) = \frac{1}{\sigma} f_X\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

Biz: Azt kell belátnunk, hogy f_Y nemnegatív, és hogy $\int_{-\infty}^{a} f_Y = F_Y(a)$
$$\int_{-\infty}^{a} \frac{1}{\sigma} f_X\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) dx \overset{z = \frac{x-\mu}{\sigma}}{=} \int_{-\infty}^{\frac{a-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sigma} f_X(z)\, \sigma\, dz = F_X\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) = P\left(X < \frac{a-\mu}{\sigma}\right) = P(\sigma X + \mu < a) =$$
$P(Y<a) = F_Y(a)$
felhasználva, hogy $\int_{-\infty}^{b} f_X(z)\, dz = F_X(b) = P(X<b)$ tetsz. valós b esetén

Köv: Legyen $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$ és $\sigma > 0$. Egy Y val. változó pontosan akkor $N(\mu, \sigma^2)$ eloszlású, ha létezik $X \sim N(0,1)$ amire $Y = \sigma X + \mu$

Biz: Ha $X \sim N(0,1)$ és $Y = \sigma X + \mu$. Lemma miatt f_Y kiszámolható $f_X (= \varphi)$ felhasználásával:
$$f_Y(x) = \frac{1}{\sigma} f_X\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$
vagyis Y valóban $N(\mu, \sigma^2)$ eloszlású.
Visszafelé ha $Y \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow$ legyen $X = \frac{1}{\sigma}(Y - \mu)$. A lemmában alkalmazva az $x = \sigma x + \mu$ helyettesítést
$$f_X(z) = \sigma f_Y(\sigma z + \mu) = \sigma \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(\sigma z + \mu - \mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

A standard normális eloszlás függvényét Φ jelöli, tehát
$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(z)\, dz$
Erre egy fontos azonosság: $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ mely abból adódik: $\varphi(x) = \varphi(-x)$

Áll: Legyen $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$. Ekkor $E(Y) = \mu$ és $D^2(Y) = \sigma^2$

Biz: Létezik X melyre $Y = \sigma X + \mu$ korábbiak miatt:
$E(Y) = E(\sigma X + \mu) = \sigma E(X) + \mu$ és $D^2(Y) = D^2(\sigma X + \mu) = D^2(\sigma X) = \sigma^2 D^2(X)$
Tehát elég csak a standard normális eloszlásra kiszámolni, hogy $E(X) = 0$ és $D^2(X) = 1$
$$E(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(0-0) = 0$$
$$E(X^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[x(-e^{-\frac{x^2}{2}})\right]_{-\infty}^{\infty} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (-e^{-\frac{x^2}{2}})\, dx = 0 + 1 = 1$$
Következésképp $D^2(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 1 - 0 = 1$

Tétel: Legyen $p \in (0,1)$ és $S_n \sim B(n,p)$. Ekkor $\forall$ valós $a < b$ számokra
$$\lim_{n\to\infty} P\left(a < \frac{S_n - E(S_n)}{D(S_n)} < b\right) = \int_a^b \varphi(x)\, dx = \Phi(b) - \Phi(a)$$
Ahol a binomiális eloszlás miatt $E(S_n) = np$ és $D(S_n) = \sqrt{np(1-p)}$

9. Határeloszlás-tételek

Áll: Markov egyenlőtlenség: Legyen X nemnegatív értékű val. változó. Ekkor minden $a > 0$ esetén
$$P(X > a) \le \frac{E(X)}{a}$$

Biz: Legyen $Y = a$ ha $X \ge a$, és 0 egyébként, mivel X nemnegatív így $Y \le X \Rightarrow E(Y) \le E(X) \Rightarrow$
$\Rightarrow E(X) \ge E(Y) = 0 \cdot P(Y=0) + a P(Y=a) = a P(X \ge a) \quad / a$
$P(X > a) \le \frac{E(X)}{a}$

Köv: Csebisev egyenlőtlenség: Legyen X val. változó amire $D^2(X)$ véges. Ekkor $\forall a > 0$ esetén $\Rightarrow$
$$P(|X - E(X)| \ge a) \le \frac{D^2(X)}{a^2}$$

Biz: A bal oldal átrendezése után alkalmazzuk a Markov egyenlőtlenséget az $(X - E(X))^2$ val. változóra
$$P(|X - E(X)| \ge a) = P((X - E(X))^2 \ge a^2) \le \frac{E(X - E(X))^2}{a^2} = \frac{D^2(X)}{a^2}$$

Köv: Paraméteres Csebisev egyenlőtlenség: Legyen X val. változó. Ekkor $\forall t > 0$ esetén
$$P(X \ge a) \le \frac{E(e^{tX})}{e^{ta}}$$

Biz: Tetszőleges t esetén e^{ta} monoton nő, így a Markov egyenlőtlenség miatt
$$P(X \ge a) = P(e^{Xt} \ge e^{at}) \le \frac{E(e^{Xt})}{e^{at}}$$

Tétel: Legyen $X_1, X_2 \dots X_n \dots$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók egy sorozata. Ha $EX_n = \mu$ és $D(X_n) = \sigma$ minden n-re, ahol $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$ rögzített. Jelölje $\overline{X}_n$ az $\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$ átlagot.
Nagy számok gyenge törvénye: Tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén $\lim_{n\to\infty} P(|\overline{X}_n - \mu| \ge \varepsilon) = 0$
Nagy számok erős törvénye: $P(\lim_{n\to\infty} \overline{X}_n = \mu) = 1$

Biz: Nagy számok gyenge törvényének bizonyítása: Az $\overline{X}_n$ átlag várható értéke is μ, így alkalmazhatjuk a Csebisev-egyenlőtlenséget
$$P(|\overline{X}_n - \mu| \ge \varepsilon) = P(|\overline{X}_n - E(\overline{X}_n)| \ge \varepsilon) \le \frac{D^2(\overline{X}_n)}{\varepsilon^2}$$
Mivel $X_1 \dots X_n$ függetlenek így D^2
$$D^2(\overline{X}_n) = D^2\left(\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}(D^2(X_1) + D^2(X_2) + \dots + D^2(X_n)) = \frac{n}{n^2}\sigma^2$$
A jobb oldal 0-hoz tart $n \to \infty$ esetén

Def: Legyen $X_1, X_2 \dots X_n$ val. változók egy sorozata, jelölje F_{X_n} az X_n eloszlásfüggvényét és hasonlóan F_Z a Z eloszlásfüggvényét. Az $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat eloszlásban konvergál egy Z val. változóhoz ha
$F_{X_n}(x) \to F_Z(x) \quad (n \to \infty)$
minden olyan $x \in \mathbb{R}$ esetén ahol F_Z folytonos. Jele: $X_n \xrightarrow{d} Z$

Tétel: Centrális határeloszlás-tétel (CHT): Legyen $X_1, X_2 \dots X_n$ független azonos eloszlású val. változók egy sorozata. Ha $D^2 X_1 < \infty$. Legyen $Z \sim N(0,1)$. Ekkor:
$$P\left(\frac{X_1 + \dots + X_n - nE(X_1)}{\sqrt{n}\, D(X_1)} < a\right) \to \Phi(a) \quad \forall a \in \mathbb{R} \text{ ha } n \to \infty$$
$$\frac{X_1 + \dots + X_n - n(X_1)}{\sqrt{n}\, D(X_1)} = \frac{\overline{X}_n - E(\overline{X}_n)}{D(\overline{X}_n)}$$

Def: X val. változó momentumgeneráló függvénye
$M_X(t) = E(e^{tX})$
ott értelmezve ahol a jobb oldal véges

Áll: Legyenek Y, Z illetve $X_1, X_2 \dots$ val. változók. Ha $M_Y(t)$ és $M_Z(t)$ $\forall t \in \mathbb{R}$ esetén értelmezett
1) Ha $M_Y(t) = M_Z(t)$ $\forall t \in \mathbb{R}$ esetén $\Rightarrow$ Y és Z azonos eloszlásúak
2) Ha $\lim_{n\to\infty} M_{X_n}(t) = M_Z(t)$ $\forall t \in \mathbb{R}$ esetén akkor $X_n \xrightarrow{d} Z$

10. Lineáris regresszió

Néhány diszkrét val. változóra definiált képlet folytonos esetben is működik:
$D^2(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - E(X)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\, dx - \left(\int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\, dx\right)^2$
$cov(X,Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y))) = E(XY) - E(X)E(Y)$

Áll: Legyen $\underline{X} = (X_1, X_2 \dots X_n)$ folytonos val. változó és legyen $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ olyan fgv melyre $\exists E(g(X_1, X_2 \dots X_n))$
$$E(g(X_1, X_2 \dots X_n)) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} g(x_1, x_2 \dots x_n) f_X(x_1, x_2 \dots x_n)\, dx_1 dx_2 \dots dx_n$$
$E(g(X_1, X_2 \dots X_n))$ létezik, de értéke esetleg $+\infty$
Ha g folytonos és nemnegatív $\Rightarrow E(g(X_1, X_2 \dots X_n))$ létezik

Lemma: Legyen (X,Y,Z) val. vektorváltozó, ekkor teljesülnek az alábbiak feltéve, hogy a lemmák szereplő mennyiségek értelmezettek:
1) Ha $c\in\mathbb{R} \Rightarrow D(X+c)=D(X)$ s $D(cX)=|c|D(X)$
2) Ha $D^2(X+Y)=D^2(X)+D^2(Y)+2\operatorname{cov}(X,Y)$
3) $D^2(X)=0$ pontosan akkor teljesül ha $P(X=c)=1$ valamilyen $c\in\mathbb{R}$-re
4) Ha X s Y független $\Rightarrow \operatorname{cov}(X,Y)=0$, speciálisan $D^2(X+Y)=D^2(X)+D^2(Y)$
5) (bilineáris) Ha $b,c\in\mathbb{R} \Rightarrow \operatorname{cov}(X,bY+cZ)=b\operatorname{cov}(X,Y)+c\operatorname{cov}(X,Z)$

Lemma: Ha X s Y független val. változók, s g,h folytonos valós függvények $\Rightarrow g(X)$ s $h(Y)$ is függetlenek

Def: Az $\underline{X}=(X_1,X_2\dots X_n)$ val. vektorváltozó kovariancia mátrixa az alábbi $n\times n$-es mátrix

$$\operatorname{cov}(\underline{X})=\begin{pmatrix}\operatorname{cov}(X_1,X_1) & \operatorname{cov}(X_1,X_2) & \dots & \operatorname{cov}(X_1,X_n)\\ \operatorname{cov}(X_2,X_1) & \operatorname{cov}(X_2,X_2) & \dots & \operatorname{cov}(X_2,X_n)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \operatorname{cov}(X_n,X_1) & \operatorname{cov}(X_n,X_2) & \dots & \operatorname{cov}(X_n,X_n)\end{pmatrix}$$

azaz $\operatorname{cov}(\underline{X})_{ij}=\operatorname{cov}(X_i,X_j)$ $\forall\, 1\le i,j\le n$ esetén

Áll: Legyen $\underline{X}=(X_1,X_2\dots X_n)$ val. vektorváltozó $\Rightarrow$
1) $\operatorname{cov}(\underline{X})$ szimmetrikus
2) $\operatorname{cov}(\underline{X})$ pozitív szemidefinit mátrix azaz $\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_i\operatorname{cov}(X_i,X_j)a_j\geq 0$ $\forall\,(a_1\dots a_n)\in\mathbb{R}^n$ esetén
és pontosan akkor 0 ha $\sum_{i=1}^n a_iX_i$ 1 valószínűséggel konstans azaz $P(\sum_{i=1}^n a_iX_i=c)=1$ valamely $c\in\mathbb{R}$-re

Biz: Ha $\sum_{i=1}^n a_iX_i$ 1 valószínűséggel konstans val. változó szórásnégyzete 0 s a lemma 5 miatt:
a lemma 3-as miatt $D^2(\sum_{i=1}^n a_iX_i)=\operatorname{cov}(\sum_{i=1}^n a_iX_i,\sum_{j=1}^n a_jX_j)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_i\operatorname{cov}(X_i,X_j)a_j$
így amivel a bal oldal 0 a jobb is az, illetve a bal oldal nemnegatív, így a jobb sem az

Def: Legyenek X s Y val. változók. Ekkor Y-nak az X-re vett lineáris regressziója azt a $\beta X+\alpha$ val. változót értjük ahol $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ és az
$E((Y-(\beta X+\alpha))^2)$
mennyiség minimális

Áll: Legyenek X s Y olyan val. változók amire $D^2(X)$ s $D^2(Y)$ és $\operatorname{cov}(X,Y)$ véges továbbá $D^2(X)\neq 0$, ekkor a definícióban szereplő várható érték akkor minimális ha
$$\beta=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{D^2(X)}\qquad \alpha=E(Y)-\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{D^2(X)}E(X)$$

Def: Az Y val. változó X-re vett regressziós egyenese az
$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid y=\beta x+\alpha\}$
egyenes a síkon ahol α s β a fenti állításban szerepel
Elegendő: kell választanunk $\beta X+\alpha$-t hogy várható értéke s kovarianciája megegyezzen Y-al
$E(Y)=E(\beta X+\alpha)=\beta E(X)+\alpha$ és $\operatorname{cov}(X,Y)=\operatorname{cov}(X,\beta X+\alpha)=D^2(X)\beta+0$
melyekből egyértelműen kiszámítható β s α
A korrelációval is van egy hasonló állítás
$$\frac{(\beta X+\alpha)}{D(Y)}=\frac{X-E(X)}{D(X)}\operatorname{corr}(X,Y)\qquad \left(\operatorname{corr}(X,Y)=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{D(X)D(Y)}\right)$$
A legutóbbi állítás bizonyítása:

Biz: A következő fgv-t kell minimalizálni:
$$u(\alpha,\beta)=E((Y-(\beta X+\alpha))^2)=E(Y^2+\beta^2X^2+\alpha^2-2\beta XY-2\alpha Y+2\alpha\beta X)=E(Y^2)+\beta^2E(X^2)+\alpha^2-2\beta E(XY)-2\alpha E(Y)+2\alpha\beta E(X)$$
A két parciális deriváltja minimumot adnak a fgv természetéből adódóan:
β szerint: $2\beta E(X^2)-2E(XY)+2\alpha E(X)$ $\quad$ α szerint: $2\alpha-2E(Y)+2\beta E(X)$
A közös nullhelyet megadó egyenletek:
$\alpha E(X)+\beta E(X^2)=E(XY)$ és $\alpha+\beta E(X)=E(Y)$
ennek megoldása a kívánt eredmény

Áll: Legyen az Y val. változó X-re vett lin. regressziója $\beta X+\alpha$, ekkor az eltérés szórásnégyzete
$$D^2(Y-(\beta X+\alpha))=D^2(Y)-\frac{\operatorname{cov}(X,Y)^2}{D^2(X)}$$

Biz: A szórásnégyzet korábban felsorolt tulajdonságai és $\beta=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{D^2(X)}$ miatt:
$$D^2(Y-(\beta X+\alpha))=D^2(Y-\beta X)=D^2(Y)+\beta^2D^2(X)-2\operatorname{cov}(Y,\beta X)=D^2(Y)+\frac{\operatorname{cov}(X,Y)^2}{(D^2(X))^2}D^2(X)-2\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{D^2(X)}\operatorname{cov}(X,Y)=D^2(Y)-\frac{\operatorname{cov}(X,Y)^2}{D^2(X)}$$

Másképp ugyanez felírva
$D^2(Y-(\beta X+\alpha))=D^2(Y)(1-\operatorname{corr}(X,Y)^2)$

11. Feltételes várható érték

Def: Legyen Y val. változó s A olyan esemény hogy $P(A)>0$. Ekkor az Y-nak az A-ra vett feltételes várható értéke az Y változó $P(.\mid A)$ valószínűségi mérték szerinti várható értéke. Jelölés: $E(Y\mid A)$

Lemma: Legyen Y egyszerű val. változó s A esemény melyre $P(A)>0$, ekkor:
$$E(Y\mid A)=\sum_{k\in\operatorname{Ran}(Y)}k\,P(Y=k\mid A)$$

Áll: Legyen Y val. változó s $P(A)>0$. Ekkor $E(Y\mid A)=\frac{1}{P(A)}E(Y\mathbb{1}_A)$

Def: Legyenek X s Y val. változók, ahol X diszkrét. Jelölje S_X az X lényeges értékeinek halmazát
$S_X=\{x\in\mathbb{R}\mid P(X=x)>0\}$
Tekintsük a $g:S_X\to\mathbb{R}$ $g(x)=E(Y\mid X=x)$ valós fgvt. Ekkor Y-nak az X-re vett (diszkrét) regressziója a $g(X)$ val. változó. Jele: $E(Y\mid X)$

Áll: Legyen X diszkrét val. változó. Tfh. hogy $P(X<x)>0$ s $E(Y)$ véges. Ekkor:
$E(g(X)\mid X<x)=E(Y\mid X<x)$

Biz:
$$E(g(X)\mid X<x)=\sum_{k\in\operatorname{Ran}(X)}g(k)P(X=k\mid X<x)=\sum_{k<x}g(k)\frac{P(X=k)}{P(X<x)}=\sum_{k<x}E(Y\mid X=k)\frac{P(X=k)}{P(X<x)}=$$
$$=\sum_{k<x}\frac{E(Y\mathbb{1}_{\{X=k\}})}{P(X=k)}\frac{P(X=k)}{P(X<x)}=\frac{1}{P(X<x)}\sum_{k<x}E(Y\mathbb{1}_{\{X=k\}})=\frac{1}{P(X<x)}E(Y\mathbb{1}_{\{X<x\}})=E(Y\mid X<x)$$

Def: Legyenek X s Y val. változók. Az Y-nak az X-re vett regressziója az a $g(X)$ alakú valószínűségi változó amire
$E(g(X)\mid X<x)=E(Y\mid X<x)$
minden olyan $x\in\mathbb{R}$-re melynél $P(X<x)>0$, a $g(X)$ jelölése: $E(Y\mid X)$
A g függvény jelölése $x\to E(Y\mid X=x)$ elnevezése regressziós függvény

Def: Legyen (X,Y) folytonos val. vektorváltozó s jelölje együttes sűrűségfüggvényét $f_{X,Y}$. Ekkor Y-nak az X-re vett feltételes sűrűségfüggvénye
$$f_{Y\mid X}(y\mid x)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{\int_{-\infty}^{\infty}f_{X,Y}(x,u)\,du}$$
olyan helyekre értelmezve ahol $f_X(x)\neq 0$

Áll: Legyen (X,Y) folytonos valószínűségi változó. Ekkor
$E(Y\mid X=x)=\int_{-\infty}^{\infty}y\,f_{Y\mid X}(y\mid x)\,dy$
az Y-nak X-re vett regressziós függvénye, olyan $x\in\mathbb{R}$ helyeken értelmezve ahol $f_X(x)\neq 0$

Biz: Legyen $x\in\mathbb{R}$ olyan amire $P(X<x)>0$ továbbá tetszőleges $z\in\mathbb{R}$ esetén legyen
$$g(z)=\begin{cases}\int_{-\infty}^{\infty}y\,f_{Y\mid X}(y\mid z)\,dy & \text{ha } f_X(z)>0\\ 0 & \text{egyébként}\end{cases}$$
Ellenőriznünk kell, hogy g-re teljesül-e az $E(g(X)\mid X<x)=E(Y\mid X<x)$
$E(g(X)\mid X<x)=\frac{1}{P(X<x)}E(g(X)\mathbb{1}_{\{X<x\}})$ ahol:
$E(g(X)\mathbb{1}_{\{X<x\}})=\int_{-\infty}^{\infty}g(z)\mathbb{1}_{\{z<x\}}f_X(z)\,dz=\int_{-\infty}^{x}g(z)f_X(z)\,dz$
Ha $f_X(z)>0$ akkor $g(z)$ definíciója szerint
$$g(z)f_X(z)=\int_{-\infty}^{\infty}y\,f_{Y\mid X}(y\mid z)\,dy\,f_X(z)=\int_{-\infty}^{\infty}y\frac{f_{X,Y}(z,y)}{f_X(z)}f_X(z)\,dz=\int_{-\infty}^{\infty}y\,f_{X,Y}(z,y)\,dy$$
A fenti három egyenletet összevetve:
$$E(g(X)\mid X<x)=\frac{1}{P(X<x)}\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{\infty}y\,f_{X,Y}(z,y)\,dy\,dz=\frac{1}{P(X<x)}E(Y\mathbb{1}_{\{X<x\}})=E(Y\mid X<x)$$

Áll: Legyenek X,Y,Z val. változók. Ekkor teljesülnek a következők
1) Tetszőleges $a,b\in\mathbb{R}$ esetén $E(aY+bZ\mid X)=aE(Y\mid X)+bE(Z\mid X)$
2) Tetszőleges h folytonos függvény esetén $E(h(X)Y\mid X)=h(X)E(Y\mid X)$
3) Ha X s Y függetlenek $\Rightarrow E(Y\mid X)=E(Y)$

Áll: Tfh $E(Y^2)$ véges ekkor $E((Y-g(X))^2)$ várható érték pontosan akkor minimális g-n ha $g(X)$ s $E(Y\mid X)$ 1 valószínűséggel megegyeznek

Áll: Legyenek $Z_1\dots Z_n$ független normális eloszlású val. változók, $X=\sum_{i=1}^n a_iZ_i$ és $Y=\sum_{i=1}^n b_iZ_i$ valamilyen $a_1\dots a_n$, $b_1\dots b_n$ valós számokra, ekkor $E(Y\mid X)$ megegyezik az Y változó X-re vett lineáris regressziójával

Tétel: Teljes várható érték tétele
Legyen X s Y val. változó, amikre $E(X)$ s $E(Y)$ véges. Ekkor $E(E(Y\mid X))=E(Y)$
A teljes várható érték tételének diszkrét esete
Legyen X diszkrét val. változó. X értékkészlete $\{x_1\dots x_n\dots\}$. Ekkor:
$E(Y)=\sum_{i=1}^{\infty}E(Y\mid X=x_i)P(X=x_i)$

Áll: Legyen $A_1\dots A_n$ teljes eseményrendszer Ω-n, Y val. változó, amire $E(Y)$ véges. Ekkor
$E(Y)=\sum_{i=1}^n E(Y\mid A_i)P(A_i)$

Áll: Legyen X folytonos val. változó s jelölje sűrűségfüggvényét f_X. Ekkor:
$E(Y)=\int_{-\infty}^{\infty}E(Y\mid X=x)f_X(x)\,dx$
ahol $E(Y\mid X=x)$ az Y-nak X-re vett regressziós függvénye.

12. Feltételes valószínűségek s többdimenziós eloszlások

Def: Legyen X val. változó s A esemény, ekkor A-nak az X-re vett feltételes valószínűsége az $x\to E(\mathbb{1}_A\mid X=x)$ regressziós függvény. Jele: $P(A\mid X=x)$

Tétel: Teljes valószínűség tétele
Legyen X folytonos val. változó s A esemény. Ekkor
$P(A)=\int_{-\infty}^{\infty}P(A\mid X=x)f_X(x)\,dx$
ahol f_X az X sűrűségfüggvénye

Def: Az $\underline{X}=(X_1\dots X_m)$ valószínűségi vektorváltozó polinomiális eloszlású, $n\in\mathbb{N}$ s $(p_1\dots p_m)\in[0,1]^m$ paraméterekkel, ha $p_1+\dots+p_m=1$ s
$$P(X_1=k_1,\dots,X_m=k_m)=\frac{n!}{k_1!k_2!\dots k_m!}p_1^{k_1}p_2^{k_2}\dots p_m^{k_m}$$

Def: Legyenek Y_1,Y_2,Y_3 együttesen független val. változók ahol $Y_i\sim Exp(\lambda_i)$, $(i=1,2,3)$. Az $\underline{X}$ Definiáljuk az $\underline{X}=(X_1,X_2)$ vektorváltozót: $X_1=\min(Y_1,Y_3)$ s $X_2=\min(Y_2,Y_3)$. Az $\underline{X}$ eloszlását Marshall–Olkin-féle kétváltozós exponenciális eloszlásnak hívják

Áll: Ha (X,Y) folytonos val. változó mely forgásszimmetrikus ($f_{X,Y}(x,y)=h(x^2+y^2)$ s X s Y koordinátái függetlenek ($f_{X,Y}(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$) akkor $f_{X,Y}(x,y)=e^{a(x^2+y^2)-c}$ valamilyen $a,c\in\mathbb{R}$ $a<0$ esetén

Biz: Helyettesítsünk $y=0$-t a practikusabb egyenletbe:

$f_Y(y)=\frac{1}{f_X(0)}h(y^2)$ $y\in\mathbb{R}$. Visszahelyettesítve
$h(x^2+y^2)=f_X(x)f_Y(y)=\frac{1}{f_Y(0)}h(x^2)\frac{1}{f_X(0)}h(y^2)$
Jelöljük ezt át a következőképp: $u=x^2$, $v=y^2$ s $c=\ln(f_X(0)f_Y(0))$, ekkor az egyenletet logaritmusa:
$\ln h(u+v)=\ln h(u)+\ln h(v)-c$
Legyen $G(u)=\ln h(u)-c$. Az utolsó egyenletből c-t levonva: $G(u+v)=G(u)+G(v)$
Segédlemma: g mon. csökkenő g fgv-re amire $g(t+s)=g(t)+g(s)\Rightarrow g=-\lambda t$ ahol $\lambda=-g(1)\geq 0$
$G(u)=ua$ valamilyen $a\in\mathbb{R}$-re. Tehát $h(u)=e^{au-c}\Rightarrow f_{X,Y}(x,y)=e^{a(x^2+y^2)-c}$ valamely $a,c\in\mathbb{R}$-re. Ha $a\geq 0$ lenne akkor nem lehetne $f_{X,Y}$ integrálja 1

Def: Az $\underline{X}=(X_1\dots X_n)$ valószínűségi változó n-dimenziós standard normális eloszlású ha folytonos s együttes függvénye
$$f_{\underline{X}}(x_1,x_2\dots x_n)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

Def: Az $\underline{Y}=(Y_1,\dots Y_n)$ valószínűségi vektorváltozó többdimenziós normális eloszlású ha létezik $\underline{\underline{A}}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ $\underline{\mu}\in\mathbb{R}^n$ s $\underline{X}$ n-dimenziós standard normális eloszlású valószínűségi vektorváltozó amire
$\underline{Y}=\underline{\underline{A}}\,\underline{X}+\underline{\mu}$
Az $\underline{Y}$ eloszlása nemelfajuló ha $\underline{\underline{A}}$ választható nemelfajuló mátrixnak azaz $\det(A)\neq 0$

Def: Egy $\underline{Y}=(Y_1\dots Y_n)$ val. vektorváltozó várható érték vektora az $(EY_1\dots EY_n)$ $\mathbb{R}^n$-beli vektor. Jelölés $E\underline{Y}$
A kovarianciamátrix is könnyen kifejezhető $\operatorname{cov}(\underline{Y})=E((\underline{Y}-E\underline{Y})(\underline{Y}-E\underline{Y})^T)\in\mathbb{R}^{n\times n}$

Áll: Legyen $\underline{X}=(X_1\dots X_n)$ standard normális eloszlású val. vektorváltozó s $\underline{Y}=\underline{\underline{A}}\,\underline{X}+\underline{\mu}$
ekkor $E\underline{Y}=\underline{\mu}$ s $\operatorname{cov}(\underline{Y})=\underline{\underline{A}}\cdot\underline{\underline{A}}^T$

Áll: Legyen $\underline{Y}$ nemelfajuló n-dimenziós normál eloszlású vektorváltozó. Jelölje a várható érték vektorát $\underline{\mu}$, a kovarianciamátrixát $\underline{\underline{\Sigma}}$. Ekkor $\underline{Y}$ sűrűségfüggvénye
$$f_{\underline{Y}}(x_1\dots x_n)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\det(\underline{\underline{\Sigma}})^{\frac{1}{2}}}e^{-\frac{1}{2}(\underline{x}-\underline{\mu})^T\underline{\underline{\Sigma}}^{-1}(\underline{x}-\underline{\mu})}$$

$$\underline{\underline{\Sigma}}=\begin{pmatrix}a & b\\ b & c\end{pmatrix}\Rightarrow \underline{\underline{\Sigma}}^{-1}=\frac{1}{\det(\underline{\underline{\Sigma}})}\begin{pmatrix}c & -b\\ -b & a\end{pmatrix}\qquad \det(\underline{\underline{\Sigma}})=ac-b^2$$

$a=D^2(Y_1)\quad b=\operatorname{cov}(Y_1,Y_2)\quad c=D^2(Y_2)$

Egy nemelfajuló normális eloszlást meghatároz az $\underline{\mu}$ várható érték vektora s a $\underline{\underline{\Sigma}}$ kovariancia mátrixa. Az n dimenziós normális eloszlást az $N(\underline{\mu},\underline{\underline{\Sigma}})$ jelöli
Speciálisan a standard normális eloszlást az $N(\underline{0},\underline{\underline{I}})$ jelöli (I = egységmátrix)

Áll: Legyen $\underline{Y}\sim N(\underline{\mu},\underline{\underline{\Sigma}})$, ahol $\underline{\mu}\in\mathbb{R}^n$ s $\underline{\underline{\Sigma}}\in\mathbb{R}^{n\times n}$. Ekkor $Y_i\sim N(\mu_i,\Sigma_{i,i})$

Köv: Legyen $(Y_1,Y_2)\sim N(\underline{\mu},\underline{\underline{\Sigma}})$ kétdimenziós normális eloszlású valószínűségi változó. Ekkor:
1) tetszőleges $c_1,c_2\in\mathbb{R}$ esetén $c_1Y_1+c_2Y_2$ egydimenziós normális eloszlású, vagy konstans
2) ha $\operatorname{corr}(Y_1,Y_2)=0$, akkor Y_1 s Y_2 függetlenek
3) az $E(Y_2\mid Y_1)$ regresszió megegyezik az Y_2-nek Y_1-re vett lineáris regressziójával, azaz
$$E(Y_2\mid Y_1)=\frac{b}{a}Y_1+\left(\mu_2-\frac{b}{a}\mu_1\right)\text{ ahol }\underline{\mu}=\begin{pmatrix}\mu_1\\ \mu_2\end{pmatrix},\ \underline{\underline{\Sigma}}=\begin{pmatrix}a & b\\ b & c\end{pmatrix}$$