Sztochasztika mintavizsga

2012. tavasz

Felsőbb matematika tárgy, villamosmérnök MSc

Munkaidő: 100 perc

A vizsgán 5 azaz öt feladat lesz, ezek mindegyike 10 pontot fog érni. Ebbe nem fér bele minden feladattípusból $1-1$, ezért az 5 feladat véletlenszerűen lesz kiválasztva az alábbi típuspéldákhoz nagyon hasonló feladatok közül.

1. Egy pékségben az edénybe, amiben 5000 mazsolás keksz masszáját keverik, 20000 mazsolát öntenek.
   (a) Mi a valószínűsége, hogy egy véletlenül választott kekszben legalább 3 mazsola lesz?
   (b) Három kekszet kiválasztottunk, ebből az első kettőben pont 3-3 mazsola volt. Mi a valószínűsége annak, hogy a harmadikban is pont 3 lesz?

2. Egy bányász a bánya egy termében rekedt. A teremből öt ajtó nyílik: az első ajtó 2 órányi út végén a szabadba vezet. A második ajtó egy alagútba nyílik, mely 1 órányi séta után visszavezet ugyanebbe a terembe a harmadik ajtón keresztül. A negyedik ajtó szintén egy alagútba nyílik, mely 3 órányi séta után vezet vissza ugyanebbe a terembe az ötödik ajtón keresztül. A bányász találomra választ egy ajtót, majd minden alkalommal, amikor a terembe visszaér, elfelejti az addigi választásait, és az öt ajtó közül választ egyet egyenlő valószínűséggel, az előző választásoktól függetlenül.

   Határozzuk meg a szabadba érés idejének generátorfüggvényét. Határozzuk meg a szabadba érés idejének várható értékét.

3. Egy fagyisnál minden gyerek kiszolgálása pontosan 1 percig tart. Ezalatt új gyerekek állhatnak be a sorba. Minden gyerek kiszolgálása alatt az újonnan beállók száma pesszimista geometriai eloszlású $p = 0,75$ paraméterrel (vagyis $X \sim Geom(p)$, ha $\mathbf{P}(X = k) = (1-p)^k p$, $k = 0, 1, \dots$) és független az előzményektől.

   Definíció: A fagyis bácsi foglaltsági periódusa az első gyerek érkezési pillanatában kezdődik és akkor ér véget, amikor először nincs kiszolgálnivaló gyerek.

   (a) Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy a foglaltsági periódus véges hosszú.
   (b) Nevezzük *első generáció*nak az első gyerek kiszolgálása alatt érkező gyerekeket, (lehet, hogy egy sincs ilyen), második generációnak pedig az első generáció kiszolgálása alatt érkezőket. Mi annak a valószínűsége, hogy a „második generáció” átvizsgálása alatt nem érkezik több gyerek (vagyis hogy a harmadik generáció már üres)?

(c) Legyen N az összes kiszolgált gyerek száma, beleértve a kezdőt is, egy foglaltsági periódus alatt. Határozzuk meg N generátorfüggvényét és várható értékét.

4. Legyen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ független kockadobás-eredmények sorozata (vagyis minden X_i egyenletes az $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ halmazon. Legyen $n = 10000$ és $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Ha valamilyen $K \in (10000; 60000)$-re a $\mathbb{P}(S_n < K)$ valószínűséget a centrális határeloszlás tétellel közelítjük, legfeljebb mekkora lehet a közelítás hibája a Berry-Esséen tétel szerint? (Vigyázat: a tétel legegyszerűbb formájában *nulla várható értékű* val.változókról szól, és a kockadobás eloszlása *nem ilyen.*) (A Berry-Esséen tételben szereplő C konstans egy 2010-es eredmény szerint választható $C = 0.4784$-nek.)

5. Egy kommunikációs csatornán videókat szeretnének átküldeni. Kétféle, azonos felhasználói élményt adó változó bitrátájú kódolás közül lehet választani.

   (a) Az 1. típusúban a videók átlagosan 2,8 Mbps bitrátájúak, és az átlagtól való eltérés felfelé és lefelé maximum 1,5 Mbps.

   (b) Az 2. típusúban a videók átlagosan 2,9 Mbps bitrátájúak, és az átlagtól való eltérés felfelé és lefelé maximum 0,5 Mbps.

   Tudjuk, hogy csúcsidőben maximum 10000 videóra lehet számítani. Határozzunk meg egy olyan a kapacitást, amelyet a videók összes sávszélesség igénye legfeljebb 10^{-8} valószínűséggel lép túl – külön az egyik, illetve másik kódolás használata esetén. Ezek alapján melyik kódolást érdemes választani?

6. (a) Legyen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ független $\lambda = 3$ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változók sorozata. Legyen $n = 10000$ és $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Becsüljük meg a $\mathbb{P}(S_n > 32000)$ valószínűséget a Cramer tétel segítségével. (Segítség: a λ paraméterű Poisson eloszlás Cramer féle rátafüggvénye $I(x) = x \ln \frac{x}{\lambda} - x + \lambda$.)

   (b) Legyen most Y_1 egy $\mu = 30000$ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó. Legyen $U = Y_1$, és nézzünk U-ra úgy, mint egy Y_i-kből álló $m = 1$ tagú összegre. A Cramer tétel ilyenre is érvényes. Becsüljük hát meg vele így a $\mathbb{P}(U > 32000)$ valószínűséget!

   Vigyázat: a Cramer tétel alkalmazásánál nagyon csínján kell bánni a menet közbeni kerekítésekkel.

7. A Sóder kft. biztosítást köt a munka során bekövetkező balesetekből eredő kár fedezésére. A biztosító az ügyfeleit négy kategóriába sorolja (1, 2, 3, 4), és a besorolást minden hónap végén felülvizsgálja. Ha egy hónapban történik baleset, akkor a következő hónapban 1-gyel magasabb kategóriába kerülnek (illetve ha a 4-esben voltak, akkor ottmaradnak); ha nem történik

baleset, akkor 1-gyel alacsonyabb kategóriába kerülnek (illetve ha az 1-esben voltak, akkor ottmaradnak). A sóder Kft-nél minden hónapban $\frac{1}{3}$ valószínűséggel történik baleset, az előzményektől függetlenül.

(a) Modellezzük a rendszert Markov lánccal. Adjuk meg az átmenetvalószínűségeket és számítsuk ki a stacionárius eloszlást.

(b) Megközelítőleg mi a valószínűsége annak, hogy a 30. hónapban az 1. kategóriában van a biztosítás?

(c) Számítsuk ki, hogy mennyi az átlagos havi biztosítási díjuk, ha a biztosítási díj az egyes kategóriákra rendre 30000, 50000, 80000 és 120000 forint havonta.

8. Mérnök Mari újszülött gyermeke az édesanyja megfigyelése szerint háromféle állapotban lehet: 1 – „sír”; 2 – „alszik”; 3 – „eszik”. A gyermek időnként véletlenszerűen ugrik át egyik állapotból a másikba, az előzményektől (a jelenre, mint feltételre nézve feltételesen) függetlenül, vagyis ő egy háromállapotú, folytonos idejű Markov lánc. Jelölje $X(t)$ a gyerek állapotát t időben. A beágyazott Markov-lánc Q átmenetvalószínűség mátrixa a következő:

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0,8 & 0,2 & 0 \end{bmatrix}$$

Az állapotsorrend 1,2,3 balról-jobbra és felülről-lefelé. Feltesszük, hogy az 1-es állapotban marad $Exp(10)$ ideig, a 2-es állapotban $Exp(1)$ ideig és a 3-asban $Exp(6)$ ideig. (Mari az időt órában méri.)

(a) Az idő hány százalékában van az 1-es, 2-es, 3-as állapotokban?

(b) Két hét után éjfélkor megnézzük a gyereket. Mi a valószínűsége, hogy éppen sír?

(c) Ha a gyerek az 1-es állapotban van, Marinak óránként 100 hajszála hullik ki. Hasonlóan a 2-es állapotban 5, a 3-as állapotban 20 hajszálat veszít óránként. Hány hajszála hullik ki Mérnök Marinak, mire a gyermek eléri a négyhetes kort?

(d) Mi a valószínűsége annak, hogy egyhónapos szülinapján a gyerek déltől kettőig folyamatosan alszik?

9. Egy bankban átlagosan 6 percenként érkezik egy ügyfél a pénztárakhoz. A pénztárakhoz tartozó ügyféltérben legfeljebb 4 ügyfél tartózkodhat egyszerre, beleértve a pénztáraknál állókat is. Ha 4 ügyfél van bent, akkor a biztonsági őr a további érkezőket kiszolgálás nélkül küldi el.

Az ügyféltérben 2 pénztár működik. Egy pénztár átlagosan 3 perc alatt szolgál ki egy ügyfelet. Ha valakit kiszolgálnak, és van bent várakozó ügyfél, akkor az egyből beáll a felszabaduló pénztárhoz. Ha valaki olyankor érkezik, amikor éppen nem tartózkodik más ügyfél az ügyféltérben, akkor az találomra beáll valamelyik pénztárhoz.

Legyen $X(t)$ az ügyféltérben lévő ügyfelek száma a t időpillanatban, $t \geq 0$.

(a) Modellezzük a rendszert folytonos idejű Markov lánccal. Mik az állapotok? Írjuk fel $(X(t), t \geq 0)$ generátorát.

(b) Tegyük fel, hogy egy bizonyos időpontban éppen kettő vevő tartózkodik az ügyféltérben. Mekkora a valószínűsége, hogy előbb kiszolgálják valamelyiküket, minthogy újabb ügyfél érkezne?

(c) Határozzuk meg $(X(t), t \geq 0)$ stacionárius eloszlását. (Szabad észrevenni, hogy X véges állapotterű születési-halálozási folyamat.)

(d) Hosszú távon hány ügyfél tartózkodik átlagosan az ügyféltérben?

(e) Az idő hány százalékában van teli az ügyféltér?

(f) Átlagosan az idő mekkora része telik tétlenül az 1-es pénztárban ülő pénztáros számára?

10. Hatelemű (független) mintát vettünk az

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} x^{\frac{1}{\theta}-1} & \text{, ha } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{, ha nem} \end{cases}$$

sűrűségfüggvényű eloszlásból, ahol $\theta \in (0, \infty)$ ismeretlen paraméter. A mintavétel eredménye 0.02; 0.01; 0.16; 0.45; 0.01; 0.43. Adjunk maximum likelihood becslést a θ paraméterre.

11. Kétfajta instant kávé oldódási idejét tesztelték, melyekből minden alkalommal azonos mennyiséget tettek 1 dl forrásban lévő vízbe. A mért oldódási időket (percben) az alábbi táblázat tartalmazza:

Mokka Makka	0,82	0,50	0,68	0,67	0,58	0,73	0,64	0,78
Koffe In	0,51	0,42	0,34	0,37	0,61	0,47		

Korábbi kísérletekből tudjuk, hogy mindkét kávé oldódási ideje normális eloszlású, és a szórásuk azonos.

A Mokka Makka gyártója azt állítja, hogy terméke semmivel sem oldódik lassabban, mint a Koffe In. Vizsgáljuk meg ezt az állítást 95%-os szinten!

12. (a) Definiálja a mozgó-átlag folyamat és az autoregressziós folyamat fogalmát. Mikor lesz egy autoregressziós folyamat stacionárius folyamat?

(b) Definiálja a lineáris szűrő fogalmát. Mutassa meg, hogy hat a kiindulási folyamat spektrumára a szűrő.

(c) Példák gyengén stacionárius folyamatok szűrésére. Hogy lehet kiszűrni periódusokat? Mutasson példát magas/alacsony frekvenciákat kiemelő szűrőre.