

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	Σ

1. *Igaz-Hamis (I/H)* Mely válasz(ok) helyes(ek), mely(ek) nem az alábbi kérdésekre? (hibás vagy hiányzó válasz -1 pont, negatív pont nem kapható)

a) Legyen az $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{5 \times 4}$ mátrix rangja 3. (2 pont)

- (a) Az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszernek ∞ sok megoldása van bármely $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^5$ vektorra.
- (b) Transzponáltja nullterének dimenziója 1.
- (c) Van \mathbb{R}^4 -nek olyan 3-dimenziós altere, melyet \mathbf{A} kölcsönösen egyértelmű módon képez \mathbb{R}^5 -be.

b) Melyek helyesek az alábbi mátrixműveletekre vonatkozó tulajdonságok közül?

- (a) Ha $\mathbf{AC} = \mathbf{BC}$ és $\mathbf{C} \neq \mathbf{O}$, akkor $\mathbf{A} = \mathbf{B}$.
- (b) Ha $\mathbf{AB} = \mathbf{O}$, akkor vagy $\mathbf{A} = \mathbf{O}$, vagy $\mathbf{B} = \mathbf{O}$.
- (c) Ha \mathbf{A} és \mathbf{B} négyzetes valós mátrixok és $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$, akkor $\mathbf{BA} = \mathbf{I}$ is fennáll.

2. Mit tudunk önadjungált, unitér és nilpotens mátrix sajátértékeiről? (3 pont)

3. Mit értünk valós mátrix Schur-felbontásán? (2 pont)

4. Sorolja fel ortogonális mátrixok két legfontosabb geometriai tulajdonságát (adja meg ezeket képletekkel is)! (2 pont)

5. Mit mond ki a Cayley-Hamilton-tétel? (1 pont)

6. Mért (x_i, y_i) adatokra $(i = 1, 2, \dots, n)$ kell illeszteni egy harmadfokú görbét a legkisebb négyzetek elve szerint. Írja föl azt a lineáris egyenletrendszert, melynek megoldása e görbe együtthatóit adja! (2 pont)

7. Adjuk meg az

$$x - y + z - w = 3$$

$$x + y - z - w = 2$$

$$x + 3y - 3z - w = 1$$

egyenletrendszer (a) minimális abszolút értékű megoldását, (b) összes megoldását \mathbb{F}_5 fölött! (6 pont)

8. Adjuk meg az alábbi mátrix LU felbontását, majd ennek segítségével oldjuk meg az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszert, ahol (5 pont)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 6 \\ -6 & 0 & -16 \\ 0 & 8 & -17 \end{bmatrix} \text{ és } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 17 \end{bmatrix}.$$

9. Írjuk fel \mathbb{R}^3 standard bázisában annak a lineáris leképezésnek a mátrixát, mely az $(1, -1, 1)$ vektor egyenesére tükröz! (3 pont)

10. Diagonalizálja az alábbi mátrixot, és adja meg a spektrálfelbontást is: (6 pont)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

11. Adja meg a következő mátrix QR-felbontását, majd ennek segítségével számítsa ki a mátrix pszeudoinverzét: (6 pont)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$