

Bevezető matematika B, 1. zárthelyi dolgozat, A csoport

2022. október 13.

Munkaidő: 90 perc. A dolgozat megírásához semmilyen segédeszköz nem használható.

Név: _____ Neptun-kód: _____ Csoport: _____

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	Σ

Feladatok

1. (6 pont) Egy számtani sorozat második és hatodik elemének az összege 30, harmadik és nyolcadik elemének az összege 42. Mennyi az első 10 tag összege?

2. (7 pont) Hozza a lehető legegyszerűbb alakra az alábbi kifejezést:

$$\left(\frac{a^3 - ab^2}{ab + b^2} + a \right) : \frac{a^2(a^2 - b^2)}{b(a^2 - 2ab + b^2)}$$

3. (6 pont) Hozza a lehető legegyszerűbb alakra az alábbi kifejezést: $\frac{(x^2 \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{y \cdot \sqrt[4]{y}})^{16}}{(x^6 \cdot y^{-1})^5}$

4. (6 pont) Számítsa ki a következő kifejezések pontos értékét:

a) $\left(\frac{5}{\sqrt{5}} \right)^{\log_5 100}$ b) $9^{\log_3 2 - \log_9 5}$

5. (6 pont) Egy egyoldalas szöveget Kamilla 10 perc alatt, Beáta pedig 15 perc alatt tud begépelni. Ha ketten együtt dolgoznak, hány perc alatt végeznek 50 oldal begépelésével?

6. (6 pont) Mely x értékre lesz az $f(x) = 2x^2 - 6x + 9$ függvény értéke minimális, és mennyi a minimum értéke?

7. (6 pont) Hogyan válasszuk meg a p valós paraméter értékét, hogy az alábbi egyenletnek két különböző valós gyöke legyen?

$$x^2 + (p - 2)x + p + 1 = 0$$

8. (7 pont) Oldja meg az alábbi egyenlőtlenséget a valós számok halmazán:

$$x - 5 + \frac{6}{x + 2} > 0$$

Bevezető matematika B, 1. zárthelyi dolgozat, B csoport

2022. október 13.

Munkaidő: 90 perc. A dolgozat megírásához semmilyen segédeszköz nem használható.

Név: _____ Neptun-kód: _____ Csoport: _____

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	Σ

Feladatok

1. (6 pont) Egy számtani sorozat harmadik és ötödik elemének az összege 34, negyedik és kilencedik elemének az összege 59. Mennyi az első 10 tag összege?

2. (7 pont) Hozza a lehető legegyszerűbb alakra az alábbi kifejezést:

$$\frac{x^2(x^2 - y^2)}{y(x^2 - 2xy + y^2)} : \left(\frac{x^3 - xy^2}{xy + y^2} + x \right)$$

3. (6 pont) Hozza a lehető legegyszerűbb alakra az alábbi kifejezést: $\frac{(a^4 \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{b \cdot \sqrt[3]{b}})^6}{(a^5 \cdot b^{-2})^3}$

4. (6 pont) Számítsa ki a következő kifejezések pontos értékét:

$$\text{a) } 4^{\log_2 3 - \log_4 5} \quad \text{b) } \left(\frac{2}{\sqrt{2}} \right)^{\log_2 9}$$

5. (6 pont) Egy egyoldalas szöveget Andrea 6 perc alatt, Sára pedig 12 perc alatt tud begépelni. Ha ketten együtt dolgoznak, hány perc alatt végeznek 40 oldal begépelésével?

6. (6 pont) Mely x értékre lesz az $f(x) = -2x^2 + 10x - 7$ függvény értéke maximális, és mennyi a maximum értéke?

7. (6 pont) Hogyan válasszuk meg a p valós paraméter értékét, hogy az alábbi egyenletnek ne legyen valós gyöke?

$$x^2 + (p - 2)x + p + 1 = 0$$

8. (7 pont) Oldja meg az alábbi egyenlőtlenséget a valós számok halmazán:

$$x + 3 - \frac{6}{x - 2} < 0$$

Eredmények

1. A

A számtani sorozat adatainak megadása:

$$a_2 + a_6 = (a_1 + d) + (a_1 + 5d) = 2a_1 + 6d = 30$$

$$a_3 + a_8 = (a_1 + 2d) + (a_1 + 7d) = 2a_1 + 9d = 42 \quad (2p)$$

$$\Rightarrow a_1 = 3, d = 4 \quad (1p)$$

$$a_{10} = a_1 + 9d = 39 \quad (1p)$$

$$\text{Az összegképlet felírása és a végeredmény: } S_{10} = \frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10 = 210 \quad (2p)$$

1. B

A számtani sorozat adatainak megadása:

$$a_3 + a_5 = (a_1 + 2d) + (a_1 + 4d) = 2a_1 + 6d = 34$$

$$a_4 + a_9 = (a_1 + 3d) + (a_1 + 8d) = 2a_1 + 11d = 59 \quad (2p)$$

$$\Rightarrow a_1 = 2, d = 5 \quad (1p)$$

$$a_{10} = a_1 + 9d = 47 \quad (1p)$$

$$\text{Az összegképlet felírása és a végeredmény: } S_{10} = \frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10 = 245 \quad (2p)$$

2.

Szorzatokká alakítás és reciprokkal való szorzás: **4p**

Közös nevezőre hozás: **1p**

Helyes végeredmény: **2p**

$$\text{A csoport: } \left(\frac{a^3 - ab^2}{ab + b^2} + a \right) : \frac{a^2(a^2 - b^2)}{b(a^2 - 2ab + b^2)} = \frac{a - b}{a + b}$$

$$\text{B csoport: } \frac{x^2(x^2 - y^2)}{y(x^2 - 2xy + y^2)} : \left(\frac{x^3 - xy^2}{xy + y^2} + x \right) = \frac{x + y}{x - y}$$

3.

Az egyes tényezők hatványkitevős alakban való felírása: **2p**

A számlálóban és a nevezőben az azonos alapú hatványok szorzatára vonatkozó azonosság alkalmazása: **2p**

Végeredmény: **2p**

$$\text{A csoport: } \frac{\left(x^2 \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{y} \cdot \sqrt[4]{y} \right)^{16}}{(x^6 \cdot y^{-1})^5} = x^{10} y^{15}$$

$$\text{B csoport: } \frac{\left(a^4 \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt[3]{b} \right)^6}{(a^5 \cdot b^{-2})^3} = a^{12} b^{10}$$

4.

A csoport: a) $\left(\frac{5}{\sqrt{5}}\right)^{\log_5 100} = 10$ (3p) **b)** $9^{\log_3 2 - \log_9 5} = \frac{4}{5}$ (3p)

B csoport: a) $4^{\log_2 3 - \log_4 5} = \frac{9}{5}$ (3p) **b)** $\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^{\log_2 9} = 3$ (3p)

5.

Ismeretlen bevezetése, külön-külön az egységnyi idő alatt elvégzett munkák kiszámítása: **2p**

Egyenes arányosság alapján az egyenlet felírása: **2p**

Az egyenlet megoldása: **1p**, helyes válasz: **1p**

A csoport:

Kamilla: 10 perc alatt gépel be 1 oldalt \Rightarrow 1 perc alatt $\frac{1}{10}$ oldalt gépel be

Beáta: 15 perc alatt gépel be 1 oldalt \Rightarrow 1 perc alatt $\frac{1}{15}$ oldalt gépel be

Kamilla és Beáta együtt: 1 perc alatt $\frac{1}{10} + \frac{1}{15}$ oldalt gépelnek be

Kamilla és Beáta együtt: x perc alatt 1 oldalt gépelnek be

$$\Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{10} + \frac{1}{15} \Rightarrow x = 6 \Rightarrow 50 \text{ oldalt } 6 \cdot 50 = 300 \text{ perc alatt gépelnek be.}$$

B csoport: $\frac{1}{x} = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} \Rightarrow x = 4 \Rightarrow 40 \text{ oldalt } 4 \cdot 40 = 160 \text{ perc alatt gépelnek be.}$

6.

Teljes négyzetté alakítás: **4p**

(főegyüttható kiemelése és a teljes négyzet felírása: 2p, $a(x+b)^2 + c$ alak: 2p)

A szélsőérték helye és a szélsőérték megadása: **2p**

A csoport: $f(x) = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{2} \Rightarrow f$ -nek minimuma van az $x = \frac{3}{2}$ helyen és a minimum értéke $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{2}$

B csoport: $f(x) = -2\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{11}{2} \Rightarrow f$ -nek maximuma van az $x = \frac{5}{2}$ helyen és a maximum értéke

$$f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{11}{2}$$

7.

A csoport:

Az egyenletnek pontosan akkor van két különböző valós gyöke, ha $D > 0$: **1p**

Diszkrimináns felírása: $D = (p-2)^2 - 4(p+1) = p(p-8)$ **2p**

Diszkrimináns gyökei: $p_1 = 0$, $p_2 = 8$ **1p**

A p -re vonatkozó egyenlőtlenség megoldása: $p < 0$ vagy $p > 8$ **2p**

B csoport:

Az egyenletnek pontosan akkor nincs valós gyöke, ha $D < 0$: **1p**

Diszkrimináns felírása: $D = (p - 2)^2 - 4(p + 1) = p(p - 8)$ **2p**

Diszkrimináns gyökei: $p_1 = 0$, $p_2 = 8$ **1p**

A p -re vonatkozó egyenlőtlenség megoldása: $0 < p < 8$ **2p**

8.

Közös nevezőre hozás, a számláló szorzattá alakítás: **2p**

A számláló előjele: **2p**

A nevező előjele: **1p**

Az egyenlőtlenség megoldása: **3p**

A csoport: $x - 5 + \frac{6}{x+2} = \frac{(x-4)(x+1)}{x+2} > 0$

A számláló pozitív, ha $x < -1$ vagy $x > 4$ és negatív, ha $-1 < x < 4$.

A nevező pozitív, ha $x > -2$ és negatív, ha $x < -2$.

A megoldás: $-2 < x < -1$ vagy $x > 4$

B csoport: $x + 3 - \frac{6}{x-2} = \frac{(x-3)(x+4)}{x-2} < 0$

A számláló pozitív, ha $x < -4$ vagy $x > 3$ és negatív, ha $-4 < x < 3$.

A nevező pozitív, ha $x > 2$ és negatív, ha $x < 2$.

A megoldás: $x < -4$ vagy $2 < x < 3$.