1. előadás

Logikai műveletek. Bizonyítási módszerek: direkt bizonyítás, indirekt bizonyítás, teljes indukció, skatulyaelv.

Logikai műveletek, kvantorok

Az **állítás** vagy kijelentés olyan kijelentő mondat, amelyről egyértelműen eldönthető, hogy **igaz (i)** vagy **hamis (h)**, ezt a mondat **logikai értékének** nevezzük.

Kijelentésekből **logikai műveletek** segítségével újabb kijelentéseket állíthatunk össze, amelyeket értéktáblázatok segítségével is megadhatunk.

1) "nem" (negáció, tagadás): az A állítás tagadása pontosan akkor igaz, ha A hamis. Jele: $\neg A$.

A	¬ A
i	h
h	i

2) "és" (konjunkció): az "A és B" állítás pontosan akkor igaz, ha az A és a B állítás is igaz. Jele: $A \wedge B$.

3) "vagy" (diszjunkció): az "A vagy B" állítás pontosan akkor igaz, ha az A és a B állítás közül legalább az egyik igaz. Jele: $A \vee B$.

4) "ha akkor" (implikáció): a "ha A, akkor B" állítás pontosan akkor igaz, ha az A és a B állítás is igaz, illetve ha az A állítás hamis és a B állítás tetszőleges. Jele: $A \Longrightarrow B$ (vagy $A \longrightarrow B$).

5) "akkor és csak akkor" (ekvivalencia): a "ha A, akkor és csak akkor B" állítás pontosan akkor igaz, ha az A és a B állítás közül egyszerre mindkettő igaz vagy mindkettő hamis. Jele: $A \Longleftrightarrow B$ (vagy $A \longleftrightarrow B$).

A	B	A ∨ B	A ∧ B	A ⟹ B	A ⟺ B
i	i	i	i	i	i
i	h	i	h	h	h
h	i	i	h	i	h
h	h	h	h	i	i

Szükséges és elégséges feltétel

Az $A \Longrightarrow B$ állítás esetében, azaz ha az A teljesülése esetén biztosan teljesül B is, azt mondjuk, hogy **az *A* állítás a *B* állításnak elégséges feltétele**, illetve **a *B* állítás az *A* állításnak szükséges feltétele**.

Más szóhasználattal: A implikálja B-t. A maga után vonja B-t. Ahhoz, hogy A teljesüljün, szükséges, hogy B fennálljon. Ahhoz, hogy B teljesüljön, elegendő, hogy A fennálljon. Az A csak akkor teljesül, ha B is teljesül.

Az $A \Longleftrightarrow B$ állítás esetében (azaz $A \Longrightarrow B$ és $B \Longrightarrow A$ is teljesül) azt mondjuk, hogy **az *A* állítás a *B* állításnak szükséges és elégséges feltétele.**

Kvantorok

Használatos a **“minden”** szóra a $\forall$, a **“létezik”** vagy **“van olyan”** kifejezésre a $\exists$ jelölés is, ezeket **kvantoroknak** nevezzük.

A “minden A-ra igaz B” ($\forall\ A: B$) tagadása: “van olyan A, amelyre nem igaz B” ($\exists\ A: \neg B$).
A “van olyan A, amelyre igaz B” ($\exists\ A: B$) tagadása: “minden A-ra nem igaz B”, vagy “egyik A-ra sem igaz B” ($\forall\ A: \neg B$).

Például: Állítás: Minden nap esik az eső. Tagadás: Van olyan nap, amikor nem esik az eső.
Állítás: Van olyan nap, amikor tévét nézek. Tagadás: Egyik nap sem nézek tévét.

Az $A \Longrightarrow B$ állítás **“ha akkor”** helyett a **“minden”** szóval is megfogalmazható.

Például: Állítás: Ha péntek van, akkor moziba megyek. Ugyanezt jelenti: Minden pénteken moziba megyek.
Tagadás: Van olyan péntek, amikor nem megyek moziba. Ugyanezt jelenti: Péntek van és nem megyek moziba.

Feladatok

1. Értéktáblázatok segítségével igazoljuk a következő azonosságokat:

a) $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$, illetve $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
b) De Morgan-azonosságok: $\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$, illetve $\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$
c) $A \Longrightarrow B = \neg A \vee B$
d) $A \Longleftrightarrow B = (A \Longrightarrow B) \wedge (B \Longrightarrow A)$

2. Tagadjuk a következő állításokat.

a) Minden ablak nyitva van.
b) Minden emeleten van olyan ablak, ami nyitva van.
c) Minden épületben van olyan emelet, ahol minden ablak nyitva van.
d) Ha süt a nap, akkor túrázni megyek.
e) Akkor és csak akkor megyek nyaralni, ha telitalálatom lesz a lottón.
f) Minden pozitív ε számhoz van olyan δ pozitív szám, hogy bármely x valós számra, ha $|x-a| < \delta$, akkor $|f(x)-f(a)| < \varepsilon$.

3. Adjunk meg (i) szükséges, de nem elégséges
(ii) elégséges, de nem szükséges
(iii) szükséges és elégséges
feltételt ahhoz, hogy az N szám osztható legyen 6-tal.

4. Adjunk meg (i) szükséges, de nem elégséges
(ii) elégséges, de nem szükséges
(iii) szükséges és elégséges
feltételt ahhoz, hogy egy négyszög téglalap legyen.

Megoldások

1. Például a c) feladat megoldása:

A	B	¬ A	¬ A ∨ B	A ⟹ B
i	i	h	i	i
i	h	h	h	h
h	i	i	i	i
h	h	i	i	i

2. a) Van olyan ablak, ami csukva van.
b) Van olyan emelet, ahol minden ablak csukva van.
c) Van olyan épület, ahol minden emeleten van olyan ablak, ami csukva van.
d) Legyen A: süt a nap, B: túrázni megyek. Az $A \Longrightarrow B = \neg A \vee B$ implikáció tagadása a De Morgan-azonosság segítségével: $\neg(A \Longrightarrow B) = \neg(\neg A \vee B) = \neg(\neg A) \wedge \neg B = A \wedge \neg B$,
így az állítás tagadása: Süt a nap és megyek túrázni.
e) Legyen A: nyaralni megyek, B: talitalálatom lesz a lottón. Az $A \Longleftrightarrow B = (A \Longrightarrow B) \wedge (B \Longrightarrow A)$ ekvivalencia tagadása, felhasználva a De Morgan-azonosságot és az $\neg(A \Longrightarrow B) = A \wedge \neg B$ azonosságot:

$$\neg(A \Longleftrightarrow B) = \neg((A \Longrightarrow B) \wedge (B \Longrightarrow A)) = \neg(A \Longrightarrow B) \vee \neg(B \Longrightarrow A) = (A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg A)$$

Így az állítás tagadása: Nyaralni megyek és nem lesz telitalálatom vagy telitalálatom lesz és nem megyek nyaralni.
f) Létezik olyan pozitív ε szám, hogy bármely δ pozitív számhoz található olyan x szám, hogy $|x - a| < \delta$, de $|f(x) - f(a)| \geq \varepsilon$.

3. (i) szükséges, de nem elégséges: például osztható 2-vel; osztható 3-mal; 0-ra végződik; 4-re végződik.
(ii) elégséges, de nem szükséges; például osztható 12-vel; osztható 18-cal; 4-re végződik és osztható 3-mal.
(iii) szükséges és elégséges: például osztható 2-vel és 3-mal; felírható $N = 6k$ alakban, ahol k egész szám.

4. (i) szükséges, de nem elégséges: például van egy párhuzamos oldalpárja; a szemközti oldalai párhuzamosak; az átlói felezik egymást; van derékszöge; van két derékszöge; a négyszög húrnégyszög; a négyszög középpontosan szimmetrikus; a négyszög tengelyesen szimmetrikus; a négyszög paralelogramma.
(ii) elégséges, de nem szükséges: például a négyszög négyzet; a négyszög átlói merőlegesek és felezik egymást.
(iii) szükséges és elégséges: például a négyszög minden szöge derékszög; a négyszög húrnégyszög, melynek két szomszédos szöge derékszög; a négyszög paralelogramma, melynek van derékszöge; a négyszög szemközti oldalai egyenlők, és van derékszöge; a négyszög szemközti oldalai párhuzamosak, és van derékszöge; van két szimmetriatengelye, melyek az oldalakra merőlegesek.

További feladatok: Babcsányi I. példatár 3. fejezet (a pdf fájl 16. oldalától): https://math.bme.hu/jegyzetek/075001_Babcsanyi_Matematikai_Feladatgyujtemeny_I..pdf

Bizonyítási módszerek

Direkt bizonyítás

A direkt bizonyításnál **igaz** állításból kiindulva helyes matematikai lépéseken keresztül jutunk el a bizonyítandó állításhoz.

Példa: A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség

Tétel: Bármely $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ nemnegatív valós számok esetén $\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$, és egyenlőség csak abban az esetben teljesül, ha $a_1 = a_2 =. .. = a_n$.

Bizonyítás $n = 2$ esetén: Ekvivalens átalakításokkal

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2} \iff (a_1 + a_2)^2 \geq 4 a_1 a_2 \iff a_1^2 - 2 a_1 a_2 + a_2^2 \geq 0 \iff (a_1 - a_2)^2 \geq 0,$$

ami mindig teljesül, és egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $a_1 = a_2$.

Indirekt bizonyítás

Az indirekt bizonyításnál feltesszük, hogy a bizonyítandó állítás tagadása igaz, ez az indirekt feltevés. Az indirekt feltevésből kiindulva helyes matematikai lépéseken keresztül ellentmondásra jutunk, ami azt jelenti, hogy az indirekt feltevés hamis, tehát az eredeti állítás igaz.

Feladatok:

1. Bizonyítsuk be, hogy egy társaságban, ahol az ismeretségek kölcsönösek, mindig található két ember, akiknek ugyanannyi ismerőse van.

Bizonyítás: Indirekt módon tegyük fel, hogy nincs két ilyen ember, azaz egy n tagú társaságban mindenkinek különböző számú ismerőse van. Egy ember ismerőseinek száma $0, 1, 2, \ldots, n - 1$

lehet, így ennek az n darab számnak mind elő kell fordulnia. Ez azonban nem lehetséges, hiszen ha valaki $n-1$ embert ismer, azaz mindenkit, akkor a kölcsönös ismeretségek miatt nem lehet olyan ember, akinek egyetlen ismerőse sincs.

2. Bizonyítuk be, hogy a $\sqrt{3}$ szám irracionális.

Bizonyítás: Indirekt módon tegyük fel, hogy a $\sqrt{3}$ racionális, ekkor felírható két egész szám hányadosaként, azaz $\sqrt{3} = \frac{a}{b}$ alakban, ahol a, b egészek és $b \neq 0$. Négyzetre emelve és b^2-tel szorozva azt kapjuk, hogy $3\,b^2 = a^2$. Vizsgáljuk meg a két oldalon álló szám prímtényezős felbontásában a 3 kitevőjét. Mivel egy négyzetszám prímtényezős felbontásában minden kitevő páros, ezért a jobb oldalon a 3 páros kitevőjű hatványa áll, a bal oldalon pedig páratlan. Ez azonban ellentmond a számelmélet alaptételének, tehát a $\sqrt{3}$ nem racionális.

3. Bizonyítsuk be, hogy végtelen sok prímszám van.

Bizonyítás: Indirekt módon tegyük fel, hogy csak véges sok prímszám van, legyenek ezek $p_1, p_2, \ldots, p_k$. Szorozzuk össze ezeket a számokat, és a szorzatukhoz adjunk hozzá 1-et, azaz legyen

$$n = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k + 1$$

Ekkor az n szám nem osztható a $p_1, p_2, \ldots, p_k$ prímszámok egyikével sem, hiszen az osztási maradék mindig 1 lesz. Ezért az n vagy egy újabb prímszám, vagy olyan összetett szám, amelynek van a felsorolt k darab prímszámtól különböző prímtényezője. Abból indultunk ki tehát, hogy pontosan k darab prímszám van, majd arra a következtetésre jutottunk, hogy kell lennie még legalább egy prímszámnak, ami ellentmondás. Így az indirekt bizonyítás alapján látható, hogy végtelen sok prímszám van.

Teljes indukció

Jelöljön az $A(n)$ olyan állítást, amely az n egész számtól függ. A bizonyítás két lépésből áll. Először megmutatjuk, hogy van olyan n_0 egész szám, amelyre az $A(n_0)$ állítás igaz. Azután feltesszük, hogy valamely n egész számra $A(n)$ igaz, s ennek alapján bebizonyítjuk, hogy $A(n+1)$ is igaz. Ezekből már következik, hogy $A(n)$ igaz minden $n \geq n_0$ esetén.

Feladatok:

Bizonyítsuk be, hogy a következő állítások igazak, ha az n pozitív egész szám nagyobb vagy egyenlő valamely n_0 pozitív egész számnál (adjuk meg a legkisebb ilyen n_0-t).

1. $\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

2. $\sum_{k=1}^{n} (2\,k - 1) = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2\,n - 1) = n^2$

3. $\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

4. $\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \dfrac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$

5. $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \ldots + n\cdot(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

6. $\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$

7. $3^n > 2^n + 7n$

8. Keressük meg a hibát a következő bizonyításban: Bebizonyítjuk, hogy minden egész szám egyenlő. Ehhez megmutatjuk, hogy minden egész szám egyenlő a rákövetkező egész számmal. Tegyük fel, hogy az állítás igaz az n egész számra, azaz $n = n + 1$. Adjunk 1-et az egyenlet mindkét oldalához, ekkor azt kapjuk, hogy $n + 1 = n + 2$, tehát a tulajdonság öröklődik.

9. Igazoljuk, hogy a) 4 osztója $5^n - 1$-nek;
b) 7 osztója $11^n - 4^n$-nek;
c) 3 osztója $2\cdot 7^n + 1$-nek;
d) 9 osztója $100^n - 1$-nek.

Emlékeztető: Az a, b természetes számok esetén az a számot a b osztójának nevezzük, ha van olyan q természetes szám, melyre $a\,q = b$. Ekkor azt mondjuk, hogy b osztható a-val. Jelölés: $a \mid b$.

További feladatok: Babcsányi I. példatár 1. fejezet (a pdf fájl 8. oldalától): https://math.bme.hu/jegyzetek/075001_Babcsanyi_Matematikai_Feladatgyujtemeny_I..pdf

Skatulyaelv

1. Ha n darab dobozban legalább $n + 1$ tárgyat akarunk elhelyezni, akkor legalább egy dobozba legalább két tárgyat kell tennünk.

2. Ha n darab dobozban legalább $n\,k + 1$ tárgyat akarunk elhelyezni, akkor legalább egy dobozba legalább k darab tárgyat kell tennünk.

Feladatok

1. Válasszunk ki 6 különböző egész számot 1-től 10-ig. Bizonyítsuk be, hogy van közöttük kettő, melyek összege 11.

2. Bizonyítsuk be, hogy három egész szám között mindig van kettő, amelyek összege osztható 2-vel.

3. Bizonyítsuk be, hogy négy egész szám között mindig van kettő, amelyek összege osztható 3-mal.

4. Bizonyítsuk be, hogy öt 10-nél nagyobb prímszám között mindig van kettő, amelyek különbsége osztható 10-zel.

5. Egy terem padlóját tetszőlegesen kifestettük kékre vagy sárgára. Mutassuk meg, hogy van legalább két ugyanolyan színű pont, amelyek távolsága 1 méter.

6. Bizonyítsuk be, hogy ha egy 2 egység oldalú négyzet belsejében vagy a határán kiválasztunk 5 tetszőleges pontot, akkor mindig lesz két olyan pont, amelyek távolsága legfeljebb $\sqrt{2}$.

7. Egy egységsugarú kör alakú céltáblát 7 találat ér. Bizonyítsuk be, hogy a találatok között van kettő, amelyek távolsága legfeljebb 1 egység.

8. Egy 15 méter oldalú szabályos háromszög alakú virágoskertben elültettünk 10 rózsatövet. Mutassuk meg, hogy van közöttük kettő, amelyek távolsága legfeljebb 5 méter.

9. Mutassuk meg, hogy egy 209 fős évfolyamon biztosan van 5 hallgató, akiknek ugyanazon a héten van a születésnapjuk.

10. Legalább hány hallgató jár egy tankörbe, ha biztosan vannak közöttük négyen, akiknek ugyanabban a hónapban van a születésnapjuk?

11. Egy dobozban van 20 sárga, 30 piros és 40 kék golyó. Legalább hány golyót kell visszatevés nélkül találomra kivenni a dobozból, hogy biztosan legyen köztük 5 sárga és 20 piros?

Megoldások

1. Tekintsük a következő 5 számpárt: (1, 10), (2, 9), (3, 8), (4, 7) és (5, 6). Minden számpár esetében a számok összege 11. A skatulyaelv szerint (ahol ezek a számpárok a “skatulyák”), 6 különböző egész számot választva 1-től 10-ig, lesz közöttük kettő, amely ugyanazon számpárhoz tartozik, tehát az összegük 11.

2. Három egész szám között biztosan van kettő, amelyek azonos paritásúak (azaz mindkettő páros vagy mindkettő páratlan), így az összegük biztosan páros.

3. Az egész számok 3-mal való osztási maradéka 3-féle lehet: 0, 1, 2. Így a skatulyaelv miatt négy egész szám között biztosan lesz kettő, amelyek 3-mal osztva ugyanazt az m maradékot adják. Azaz vannak olyan k_1 és k_2 egészek, melyekre e két szám $a = 3\,k_1 + m$ és $b = 3\,k_2 + m$ alakú, így $a - b = 3\,(k_1 - k_2)$, tehát a különbségük osztható 3-mal.

4. A 10-nél nagyobb prímek végződése csak 1, 3, 7, 9 lehet, így az öt prímszám között van két azonos jegyre végződő. Ezek különbsége osztható 10-zel.

5. Vegyünk egy 1 m oldalú szabályos háromszöget. A skatulyaelv miatt a csúcsai között lesz két azonos színű.

6. A 2 egység oldalú négyzetet osszuk fel négy, egységnyi oldalú kis négyzetre úgy, hogy a szemközti oldalak felezőpontjait összekötjük. Ha a nagy négyzetben 5 tetszőleges pontot kiválasztunk, akkor a skatulyaelv miatt biztosan van közöttük kettő, amelyik ugyanabba a kis négyzetbe esik. Ezek távolsága legfeljebb annyi, mint a négyzet átlójának hossza, azaz $\sqrt{2}$.

7. Osszuk fel a körlapot hat darab 60 °-os középponti szögű körcikkre. Ekkor a skatulyaelv miatt lesz közöttük olyan, amelybe két találat esik, így e két pont távolsága legfeljebb 1 egység.

8. Osszuk fel a 15 méter oldalú szabályos háromszöget az oldalaival párhuzamos egyenesekkel 9 darab 5 méter oldalú szabályos háromszögre. Ekkor a skatulyaelv miatt lesz közöttük olyan, amelybe két rózsatő esik, így e két rózsatő távolsága legfeljebb 5 méter.

9. Mivel egy év 52 hétből áll, ezért 208 hallgató esetén még előforulhat az, hogy minden héten pontosan 4 hallgatónak van születésnapja. Így a skatulyaelv miatt 209 hallgató esetén már biztosan lesz olyan hét, amikor 5-en ünneplik a születésnapjukat.

10. Legalább 37-en, hiszen 36 hallgató esetén még előfordulhat, hogy minden hónapban 3-an születtek.

11. A megoldáshoz a legkedvezőtlenebb esetet kell megkeresnünk, azaz meg kell találni, hogy mekkora az a legnagyobb szám, amelyre a feltételek még épp nem teljesülnek.
a) A sárga golyók szempontjából a legrosszabb eset az, ha először az összes nem sárga golyót húzzuk ki (30 + 40 = 70 db). Ekkor még 5 golyót kell kihúzni ahhoz, hogy meglegyen az 5 sárga golyó, tehát összesen 75 golyó kihúzása szükséges.
b) A piros golyók szempontjából a legrosszabb eset az, ha először az összes nem piros golyót húzzuk ki (20 + 40 = 60 db). Ekkor még 20 golyót kell kihúzni ahhoz, hogy meglegyen a 20 piros golyó, tehát összesen 80 golyó kihúzása szükséges.
A két szín közül tehát a pirosra vonatkozó feltétel a szigorúbb, így a megoldás 80.