Algoritmuselmélet vizsga

A rendelkezésre álló munkaidő 100 perc. 2013. május 30.

Kérjük, minden résztvevő **nevét, NEPTUN kódját**, a dolgozat *minden* lapjának jobb felső sarkában *olvashatóan* és *helyesen* tüntesse fel. Ezen kívül a legfelső lapra írja rá **gyakorlatvezetője nevét** is (akihez a NEPTUN szerint jár), ill. egy, a személyazonosságát igazoló fényképes okmányt készítsen elő.
Minden egyes feladat helyes megoldása 10 pontot ér. A dolgozatok értékelése: 0-31 pont: 1, 32-43 pont: 2, 44-55 pont: 3, 56-67 pont: 4, 68-80 pont: 5. A puszta (indoklás nélküli) eredményközlést nem értékeljük. A megindokolt részeredményért arányos pontszám jár.
Írószeren és papírokon kívül semmilyen segédeszköz használata sem megengedett, így tilos az írott vagy nyomtatott jegyzet, a számoló- és számítógép ill. mobiltelefon használata, továbbá a dolgozatírás közbeni együttműködés.

Az eredményeket hétfő délig estéig igyekszünk közzétenni a honlapon.
Megtekintés, szóbeli: 2013. június 3. hétfő, 14:00-15:00, QBF10

1. Ebben a feladatban a Floyd algoritmussal kapcsolatos kérdésekre kell válaszolnia. (A Floyd-algoritmus egy gráfban minden pontpárra meghatározza a köztük levő legrövidebb út hosszát.)
   (a) Mit jelöl az F_k mátrix $F_k[i,j]$ eleme?
   (b) Hogyan kell kiszámolni az F_{k-1} mátrixból az F_k mátrixot?
   (c) Igazolja, hogy ez a kiszámítási mód helyes!
   (d) Mennyi a lépésszáma a (b) lépés egyszeri végrehajtásának? (A lépésszámot nem kell igazolni.)

2. Adja meg a 2-3 fa definícióját! Adjon felső becslést a fa szintszámára n tárolt elem esetén, állítását bizonyítsa is!

3. Adjon meg egy MAXKLIKK$\prec$ RÉSZGRÁFIZO Karp-redukciót és mutassa meg, hogy ez valóban Karp-redukció!

4. Van egy tábla ($n \times m$ kockából álló) mogyorós csokink. Az A $n \times m$-es mátrixban adott, hogy az egyes kockákban hány mogyoró van (a mogyorók nem lógnak át egyik kockából a másikba). Két gyerek akar osztozkodni a csokin, úgy, hogy a csokit kétfelé törik (egyenes vonal mentén, párhuzamosan a tábla valamelyik szélével). Egy osztozkodás igazságtalansági faktorát a következőképpen kaphatjuk: ha az egyik darabban k_1 kocka csoki és m_1 darab mogyoró van, a másikban pedig k_2 kocka csoki és m_2 darab mogyoró, akkor az igazságtalansági faktor $|(k_1 + m_1) - (k_2 + m_2)|$.
   Adjon $O(nm)$ lépést használó algoritmust, ami eldönti, hogy melyik szétosztásnak a legkisebb az igazságtalansági faktora. (Egy lépésnek számít, ha kiolvasunk egy értéket az A mátrixból vagy ha összeadást illetve kivonást hajtunk végre két számon.)

5. Egy algoritmus lépésszámáról tudjuk, hogy $T(n) = T(\lfloor n/4 \rfloor) + O(n^2)$ és tudjuk azt is, hogy $T(1) = T(2) = T(3) = 1$. Bizonyítsa be, hogy $T(n) = O(n^2)$.

6. Egy ország n kis szigetből áll. Szeretnénk néhány hajójáratot indítani a szigetek között úgy, hogy bárhonnan bárhova el lehessen jutni (esetleg átszállással). Ehhez ismerjük bármely két szigetre, hogy mennyibe kerül egy évben a hajójárat fenntartása közöttük illetve azt is tudjuk, hogy mekkora az itt várható éves bevétel. Adjon algoritmust, ami ezen adatok ismeretében $O(n^2)$ időben meghatározza, hogy hol indítsuk el a hajójáratokat, ha a lehető legnagyobb várható éves hasznot (vagy a lehető legkisebb veszteséget) szeretnénk elérni. (Egy szigeten egy hajóállomás van csak.)

7. Igaz-e, hogy ha egy X eldöntési problémáról be tudnánk látni, hogy $X \in NP \setminus P$ (vagyis X NP-ben van, de nincs P-ben), akkor 3-SZÍN$\notin P$?

8. Igazolja, hogy a következő eldöntési probléma P-ben van, vagy azt, hogy NP-teljes!
   Input: G irányítatlan gráf
   Kérdés: Igaz-e, hogy mind a G-ben található legnagyobb független ponthalmaz, mind a G-ben található legnagyobb klikk is pontosan 2013 csúcsot tartalmaz?