**Bevezetés a számításelméletbe II.**
**Zárthelyi feladatok**
2003. április 30.

**1.** Határozzuk meg $2003^{2003}$ utolsó három számjegyét!

**2.** Milyen maradékot adhat egy egész szám 92-vel osztva, ha az 54-szerese 24 maradékot ad 92-vel osztva?

**3.** Legyen $n$ páratlan egész szám, amely nem osztható egyetlen prímszám négyzetével sem. Bizonyítsuk be, hogy $n$ pozitív osztóinak átlaga egész szám!

**4.** Legyen $H = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ és értelmezzük a $H$ halmazon a $*$ műveletet az alábbi műveleti tábla szerint:

| $*$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $e$ | $f$ | $g$ | $h$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | $d$ | $g$ | $e$ | $a$ | $c$ | $h$ | $b$ | $f$ |
| $b$ | $g$ | $d$ | $h$ | $b$ | $f$ | $e$ | $a$ | $c$ |
| $c$ | $e$ | $h$ | $a$ | $c$ | $d$ | $b$ | $f$ | $g$ |
| $d$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $e$ | $f$ | $g$ | $h$ |
| $e$ | $c$ | $f$ | $d$ | $e$ | $a$ | $g$ | $h$ | $b$ |
| $f$ | $h$ | $e$ | $b$ | $f$ | $g$ | $a$ | $c$ | $d$ |
| $g$ | $b$ | $a$ | $f$ | $g$ | $h$ | $c$ | $d$ | $e$ |
| $h$ | $f$ | $c$ | $g$ | $h$ | $b$ | $d$ | $e$ | $a$ |

(A táblázat szerint tehát például $a * c = e$ és $g * f = c$.)

a) Bizonyítsuk be, hogy a $H$ halmaz csoportot alkot a $*$ műveletre nézve, ha azt már tudjuk, hogy $*$ asszociatív! (Az asszociativitást tehát nem kell ellenőrizni.)

b) Ciklikus csoport-e $(H, *)$?

**5.** Van-e olyan 20 elemű csoport, amelyben

a) van 5 rendű elem, de nincs 20 rendű elem;

b) van 20 rendű elem, de nincs 5 rendű elem?

**6.** A $G$ véges, Abel-csoport összes elemét összeszorozzuk valamilyen sorrendben. (A csoport műveletét tehát most szorzásnak neveztük.) Bizonyítsuk be, hogy eredményül $G$-nek olyan elemét kapjuk, amelynek a rendje 1 vagy 2!

**7.** Legyenek $A$, $B$ és $C$ diszjunkt, $r$ elemű halmazok (ahol $r \geq 1$ egész). Készítsünk egy $G$ gráfot úgy, hogy a csúcsainak halmaza legyen $A \cup B \cup C$ és két csúcsot akkor kössünk össze éllel, ha $A$, $B$ és $C$ közül nem ugyanabba a halmazba esnek. (A $G$ gráf tehát elképzelhető úgy is, mint ha három, „egymás mellé rajzolt" $r$ csúcsú teljes gráfból álló gráf komplementerét vennénk.) Határozzuk meg azt a maximális $k$ számot, amelyre a $G$ gráf $k$-szorosan összefüggő!

**8.** A $G(A, B; E)$ páros gráf olyan, hogy minden $A$-beli pont foka $r$ és minden $B$-beli pont foka $s$. Bizonyítsuk be, hogy $\sqrt{rs}$ sajátértéke $G$ szomszédossági mátrixának!