Bevezető matematika B, 1. zárthelyi dolgozat, A csoport

2020. október 15.
Munkaidő: 90 perc. A dolgozat megírásához semmilyen segédeszköz nem használható.

Név: ____________________ Neptun-kód: __________ Kurzus: _____

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	$\sum$

Feladatok

1. (6 pont) Egy számtani sorozat negyedik és tizedik elemének az összege 40, nyolcadik és második elemének a különbsége 120. Mennyi az első 20 tag összege?

2. (7 pont) Hozza a lehető legegyszerűbb alakra az alábbi kifejezést:

$$\left(\frac{b}{a^2+a\,b}-\frac{a}{b^2+a\,b}\right):\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}-2\right)$$

3. (6 pont) Hozza a lehető legegyszerűbb alakra az alábbi kifejezést:

$$\frac{\sqrt{x\sqrt{y^3}}}{\sqrt{x^5\sqrt{y^7}}}\cdot\frac{x}{y^{-2}}$$

4. (6 pont) Számítsa ki a következő kifejezés pontos értékét: $\left(\frac{7}{\sqrt{7}}\right)^{\log_{49}81}+5^{\log_{25}4+2}$

5. (6 pont) Kázmér 1 óra alatt 20 m^2 falfelületet fest ki, Töhötöm ennyi idő alatt 30 m^2 falfelülettel végez. Töhötöm csak fél órával később kezdett a munkának. Ebben az esetben mennyi idő alatt végeztek ketten a 100 m^2 terület kifestésével?

6. (6 pont) Mely x értékre lesz az $f(x)=6\,x^2-4\,x-3$ függvény értéke minimális, és mennyi a minimum értéke?

7. (6 pont) Hogyan válasszuk meg a p valós paraméter éktékét úgy, hogy az alábbi egyenletnek ne legyen valós gyöke?

$$x^2-(p+1)\;x-p+2=0$$

8. (7 pont) Oldja meg az alábbi egyenlőtlenséget a valós számok halmazán:

$$\frac{x^2+3\,x-4}{x-7}<0$$

Bevezető matematika B, 1. zárthelyi dolgozat, B csoport

2020. október 15.
Munkaidő: 90 perc. A dolgozat megírásához semmilyen segédeszköz nem használható.

Név: ____________________ **Neptun-kód:** __________ **Kurzus:** _____

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	$\sum$

Feladatok

1. (6 pont) Egy számtani sorozat ötödik és tizenkettedik elemének az összege 30, tizedik és harmadik elemének a különbsége 70. Mennyi az első 40 tag összege?

2. (7 pont) Hozza a lehető legegyszerűbb alakra az alábbi kifejezést:

$$\left(\frac{1}{(x+y)^2}-\frac{1}{(x-y)^2}\right)\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}\right):\frac{2}{x^2-y^2}$$

3. (6 pont) Hozza a lehető legegyszerűbb alakra az alábbi kifejezést:

$$\frac{\sqrt{a\sqrt{b^8\sqrt{a^{12}}}}}{\left(a^5\,b^{-3}\right)^2}$$

4. (6 pont) Számítsa ki a következő kifejezés pontos értékét: $16^{1-\log_4 8}+\left(\sqrt{2}\right)^{\log_8 64}$

5. (6 pont) Hedvig szeretné megnézni este a Harry Potter és a titkok kamrája c. filmet a TV-ben. Sajnos nem tudja, hogy pontosan mennyi az idő, sem azt, hogy mikor kezdődik a film. Pajtása, Makesz elárulja neki, hogy kétszer annyi idő van a film végéig, mint a film kezdetéig. De 2 óra múlva már csak ötöd annyi idő lesz a film kezdetéig, mint a film végéig. Hány perc múlva kezdődik a film?

6. (6 pont) Mely x értékre lesz a $g(x)=-8\,x^2-4\,x+7$ függvény értéke maximális, és mennyi a maximum értéke?

7. (6 pont) Hogyan válasszuk meg a p valós paraméter éktékét úgy, hogy az alábbi egyenletnek két különböző valós gyöke legyen?

$$x^2-(p+3)\;x-p+5=0$$

8. (7 pont) Oldja meg az alábbi egyenlőtlenséget a valós számok halmazán:

$$\frac{x^2-5\,x+6}{x+9}>0$$

Megoldások, **A** csopot

1. (6 pont) Egy számtani sorozat negyedik és tizedik elemének az összege 40, nyolcadik és második elemének a különbsége 120. Mennyi az első 20 tag összege?

$a_4 + a_{10} = (a_1 + 3\,d) + (a_1 + 9\,d) = 2\,a_1 + 12\,d = 40$ **(a: 3p)**

$a_8 - a_2 = (a_1 + 7\,d) - (a_1 + d) = 6\,d = 120$

$\Longrightarrow\ d = 20,\ a_1 = -100$ **(b: 1p)**

Az első 20 tag összege: $S_{20} = \frac{a_1 + a_{20}}{2} \cdot 20 = \frac{2\,a_1 + 19\,d}{2} \cdot 20 = \frac{2 \cdot (-100) + 19 \cdot 20}{2} \cdot 20 = 1800$ **(c: 2p)**

2. (7 pont) Hozza a lehető legegyszerűbb alakra az alábbi kifejezést:

$$\left(\frac{b}{a^2 + a\,b} - \frac{a}{b^2 + a\,b}\right) : \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b} - 2\right)$$

$= \left(\frac{b}{a(a+b)} - \frac{a}{b(a+b)}\right) : \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b} - 2\right) = \frac{b^2 - a^2}{a\,b(a+b)} : \frac{b^2 + a^2 - 2\,a\,b}{a\,b}$ **(a: 3p)**

$= \frac{b^2 - a^2}{a\,b(a+b)} \cdot \frac{\text{ab}}{a^2 - 2\,a\,b + b^2} = \frac{(b-a)(b+a)}{a\,b(a+b)} \cdot \frac{a\,b}{(a-b)^2}$ **(b: 2p)**

$= \frac{-1}{a-b} = \frac{1}{b-a}$ **(c: 2p)**

3. (6 pont) Hozza a lehető legegyszerűbb alakra az alábbi kifejezést ($x > 0$):

$$\frac{\sqrt{x\sqrt{y^3}}}{\sqrt{x^5\sqrt{y^7}}} \cdot \frac{x}{y^{-2}}$$

$= \frac{x^{\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{3}{4}}}{x^{\frac{5}{2}} \cdot y^{\frac{7}{4}}} \cdot \frac{x}{y^{-2}}$ **(a: 2p)** $= x^{\frac{1}{2}+1-\frac{5}{2}} \cdot y^{\frac{3}{4}-\frac{7}{4}-(-2)}$ **(b: 2p)** $= x^{-1} \cdot y$ **(c:2p)** $= \frac{y}{x}$

4. (6 pont) Számítsa ki a következő kifejezés pontos értékét: $\left(\frac{7}{\sqrt{7}}\right)^{\log_{49} 81} + 5^{\log_{25} 4+2}$

$\left(\frac{7}{\sqrt{7}}\right)^{\log_{49} 81} = \left(\sqrt{7}\right)^{\log_{49} 81} = \left(49^{\frac{1}{4}}\right)^{\log_{49} 81}$ **(a: 1p)** $= 49^{\log_{49} 81^{1/4}}$ **(b: 1p)** $= 81^{\frac{1}{4}} = 3$ **(c: 1p)**

$5^{\log_{25} 4+2} = 5^{\log_{25} 4} \cdot 5^2 = \left(25^{\frac{1}{2}}\right)^{\log_{25} 4} \cdot 25$ **(d: 1p)** $= 25^{\log_{25} 4^{1/2}} \cdot 25$ **(e: 1p)** $= 4^{\frac{1}{2}} \cdot 25 = 2 \cdot 25 = 50$ **(e: 1p)**

így a kifejezés értéke $3 + 50 = 53$.

5. (6 pont) Kázmér 1 óra alatt 20 m^2 falfelületet fest ki, Töhötöm ennyi idő alatt 30 m^2 falfelülettel végez. Töhötöm csak fél órával később kezdett a munkának. Ebben az esetben mennyi idő alatt végeztek ketten a 100 m^2 terület kifestésével?

Kázmér: 1 óra alatt 20 m^2-t fest ki $\Longrightarrow$ 0,5 óra alatt 10 m^2-t fest ki
Töhötöm: 1 óra alatt 30 m^2-t fest ki

Mivel Töhötöm csak fél órával később kezdett a munkának, azért az első 0,5 órában csak Kázmér dolgozott, így 10 m^2-t festett ki. **(a: 1p)**
Az a kérdés, hogy a maradék 90 m^2-t ketten együtt mennyi idő alatt festik ki.

Kázmér+Töhötöm együtt: 1 óra alatt 50 m^2-t festenek ki **(b: 1p)**
Kázmér+Töhötöm együtt: x óra alatt 90 m^2-t festenek ki **(c: 1p)**

Egyenes arányosságól: $\frac{x}{1} = \frac{9}{5} \Longrightarrow x = 1{,}8$ óra **(d: 2p)**
A válasz: ketten együtt 1,8+0,5=2,3 óra =2 óra 18 perc alatt végeznek a munkával. **(e: 1p)**

6. (6 pont) Mely x értékre lesz az $f(x) = 6x^2 - 4x - 3$ függvény értéke minimális, és mennyi a minimum értéke?

Teljes négyzetté alakítással:
$f(x) = 6\left(x^2 - \frac{4}{6} - \frac{3}{6}\right) = 6\left(\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{9} - \frac{1}{2}\right)$ **(a: 2p)**
$= 6\left(\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{11}{18}\right) = 6\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{11}{3}$ **(b: 2p)**
Így f-nek minimuma van $x = \frac{1}{3}$-nál, és a minimum értéke $f\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{11}{3}$ **(c: 2p)**

7. (6 pont)
Az egyenletnek pontosan akkor nincs valós gyöke, ha diszkriminánsa negatív, azaz $D < 0$. **(a: 1p)**
$D = (p+1)^2 - 4(-p+2)$ **(b: 2p)** $= p^2 + 6p - 7 =$ **(c: 1p)** $= (p+7)(p-1)$
E másodfokú polinom gyökei $p_1 = -7$ és $p_2 = 1$ **(d: 1p)**, így a
$D = (p+7)(p-1) < 0$ egyenlőtlenség pontosan akkor teljesül, ha $-7 < p < 1$. **(e: 2p)**

8. (7 pont) Oldja meg az alábbi egyenlőtlenséget a valós számok halmazán:

$\frac{x^2 + 3x - 4}{x - 7} < 0 \iff \frac{(x+4)(x-1)}{x-7} < 0$ **(a: 1p)**

A számláló előjele: $-4 < x < 1$ esetén negatív, $x < -4$ vagy $x > 1$ esetén pozitív **(b: 2p)**
A nevező előjele: $x < 7$ esetén negatív, $x > 7$ esetén pozitív **(c: 1p)**

Így az egyenlőtlenség megoldása $x < -4$ vagy $1 < x < 7$ **(d: 3p)**

Megoldások, **B** csoport

1. (6 pont) Egy számtani sorozat ötödik és tizenkettedik elemének az összege 30, tizedik és harmadik elemének a különbsége 70. Mennyi az első 40 tag összege?

$a_5 + a_{12} = (a_1 + 4\,d) + (a_1 + 11\,d) = 2\,a_1 + 15\,d = 30$ **(a: 3p)**

$a_{10} - a_3 = (a_1 + 9\,d) - (a_1 + 2\,d) = 7\,d = 70$

$\Longrightarrow\ d = 10,\ a_1 = -60$ **(b: 1p)**

Az első 40 tag összege: $S_{40} = \dfrac{a_1 + a_{40}}{2} \cdot 40 = \dfrac{2\,a_1 + 39\,d}{2} \cdot 40 = \dfrac{2 \cdot (-60) + 39 \cdot 10}{2} \cdot 40 = 5400$ **(c: 2p)**

2. (7 pont) Hozza a lehető legegyszerűbb alakra az alábbi kifejezést:

$$\left(\frac{1}{(x+y)^2} - \frac{1}{(x-y)^2}\right)\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}\right) : \frac{2}{x^2 - y^2}$$

$= \dfrac{(x-y)^2 - (x+y)^2}{(x+y)^2\,(x-y)^2} \cdot \dfrac{y^2 - x^2}{x^2\,y^2} \cdot \dfrac{x^2 - y^2}{2}$ **(a: 3p)**

$= \dfrac{x^2 - 2\,x\,y + y^2 - \left(x^2 + 2\,x\,y + y^2\right)}{(x+y)^2\,(x-y)^2} \cdot \dfrac{y^2 - x^2}{x^2\,y^2} \cdot \dfrac{x^2 - y^2}{2}$ **(b: 1p)**

$= \dfrac{-4\,x\,y}{\left(x^2 - y^2\right)^2} \cdot \dfrac{y^2 - x^2}{x^2\,y^2} \cdot \dfrac{x^2 - y^2}{2}$ **(c: 1p)**

$= \dfrac{-2}{x\,y} \cdot \dfrac{y^2 - x^2}{x^2 - y^2} = \dfrac{-2}{x\,y} \cdot (-1) = \dfrac{2}{x\,y}$ **(d: 2p)**

3. (6 pont) Hozza a lehető legegyszerűbb alakra az alábbi kifejezést ($x > 0$):

$$\frac{\sqrt{a\,\sqrt{b^8\,\sqrt{a^{12}}}}}{\left(a^5\,b^{-3}\right)^2}$$

$= \dfrac{a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{8}{4}} \cdot a^{\frac{12}{8}}}{a^{10} \cdot b^{-6}}$ **(a: 3p)** $= a^{\frac{1}{2} + \frac{12}{8} - 10} \cdot b^{2-(-6))}$ **(b: 2p)** $= a^{-8} \cdot b^8$ **(c:1p)** $= \dfrac{b^8}{a^8}$

4. (6 pont) Számítsa ki a következő kifejezés pontos értékét:$16^{1-\log_4 8} + \left(\sqrt{2}\right)^{\log_8 64}$

$16^{1-\log_4 8} = \dfrac{16}{16^{\log_4 8}}$ **(a: 1p)** $= \dfrac{16}{\left(4^2\right)^{\log_4 8}} = \dfrac{16}{4^{2 \cdot \log_4 8}} = \dfrac{16}{4^{\log_4 8^2}} = \dfrac{16}{4^{\log_4 64}}$ **(b: 1p)** $= \dfrac{16}{64} = \dfrac{1}{4}$ **(c: 1p)**

$\left(\sqrt{2}\right)^{\log_8 64} = \left(\sqrt{\sqrt[3]{8}}\right)^{\log_8 64} = \left(\sqrt[6]{8}\right)^{\log_8 64} = \left(8^{\frac{1}{6}}\right)^{\log_8 64}$ **(d: 1p)** $= 8^{\frac{1}{6}\log_8 64} = 8^{\log_8 64^{1/6}}$ **(e: 1p)** $= 64^{\frac{1}{6}} = 2$ **(e: 1p)**

így a kifejezés értéke $\dfrac{1}{4} + 2 = \dfrac{9}{4}$.

5. (6 pont) Hedvig szeretné megnézni este a Harry Potter és a titkok kamrája c. filmet a TV-ben. Sajnos nem tudja, hogy pontosan mennyi az idő, sem azt, hogy mikor kezdődik a film. Pajtása, Makesz elárulja neki, hogy kétszer annyi idő van a film végéig, mint a film kezdetéig. De 2 óra múlva már csak ötöd annyi idő lesz a film kezdetéig, mint a film végéig. Hány perc múlva kezdődik a film?

Jelölések:
x: ennyi idő van mostantól a film kezdetéig (ezt keressük)
$2x$: ennyi idő van mostantól a film végéig
t: 2 óra múlva ennyi idő van a film kezdetéig **(a: 1p)**

Ekkor:
$120 + t = x$ (t és x definíciója miatt) **(b: 1p)**
$5t = 2x - 120$ (mivel 2 óra múlva már csak ötöd annyi idő lesz a film kezdetéig, mint a film végéig) **(c: 2p)**

$\Longrightarrow\ t = x - 120 \Longrightarrow 5(x - 120) = 2x - 120 \Longrightarrow 3x = 4\cdot 120 \Longrightarrow x = 160$
Tehát 160 perc van a film kezdetéig. **(d: 2p)**

6. (6 pont) Mely x értékre lesz a $g(x) = -8x^2 - 4x + 7$ függvény értéke maximális, és mennyi a maximum értéke?

Teljes négyzetté alakítással:

$$f(x) = -8\left(x^2 + \frac{4}{8} - \frac{7}{8}\right) = -8\left(\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} - \frac{7}{8}\right) \quad \textbf{(a: 2p)}$$

$$= -8\left(\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{15}{16}\right) = -8\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{15}{2} \quad \textbf{(b: 2p)}$$

Így f-nek maximuma van $x = -\frac{1}{4}$-nél, és a maximum értéke $f\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{15}{2}$ **(c: 2p)**

7. (6 pont)
Az egyenletnek pontosan akkor van két különböző valós gyöke, ha diszkriminánsa pozitív, azaz $D > 0$. **(a: 1p)**
$D = (p+3)^2 - 4(-p+5)$ **(b: 2p)** $= p^2 + 10p - 11 =$ **(c: 1p)** $= (p+11)(p-1)$
E másodfokú polinom gyökei $p_1 = -11$ és $p_2 = 1$ **(d: 1p)**, így a
$D = (p+11)(p-1) > 0$ egyenlőtlenség pontosan akkor teljesül, ha $p < -11$ vagy $p > 1$. **(e: 2p)**

8. (7 pont) Oldja meg az alábbi egyenlőtlenséget a valós számok halmazán:

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{x + 9} > 0 \Longleftrightarrow \frac{(x-2)(x-3)}{x+9} > 0 \quad \textbf{(a: 1p)}$$

A számláló előjele: $2 < x < 3$ esetén negatív, $x < 2$ vagy $x > 3$ esetén pozitív **(b: 2p)**
A nevező előjele: $x < -9$ esetén negatív, $x > -9$ esetén pozitív **(c: 1p)**

Így az egyenlőtlenség megoldása $-9 < x < 2$ vagy $x > 3$ **(d: 3p)**