

SzA XI. gyakorlat

$P?NP$

2011. november 15.

Hasznos tudnivalók

- Eldöntési problémákról beszélünk!
- $P \subseteq NP$, $P \subseteq coNP$. Tehát ha valami P -beli, akkor **biztos**, hogy NP -beli és $coNP$ -beli is!!!
- **P -beliség bizonyítása**: adunk egy polinom idejű algoritmust. Nem vezetünk vissza, nem fejtegetjük P és NP viszonyát. Nem fontos a hatékonyság, n^{100} is polinomiális!
- **NP -beliség bizonyítása**: tanú mutatása, tanú mérete polinomiális, ellenőrzés polinomiális. **Nem kell algoritmus a tanú előállítására!!!** A tanú lehet pofátlanul egyszerű. Nem vezetünk vissza, nem fejtegetjük P és NP viszonyát.
- **NP -teljesség bizonyítása** π problémára:
 1. π NP -beliségének bizonyítása.
 2. π NP -nehézségének bizonyítása:
 - (a) Találunk egy vele kapcsolatba hozható problémát, ami ismert NP -teljes, ez legyen ρ (a feladatokban ez leggyakrabban: H-kör, H-út, k -szín, maxklick, maxftln).
 - (b) Bemutatunk egy $\rho \prec \pi$ Karp-redukciót, az irány fontos! Csak így jó!
 - (c) Bizonyítjuk a Karp-redukció helyességét. Azaz, ha f az átalakítás: $x \in \rho \Leftrightarrow f(x) \in \pi$ a bizonyítandó. Figyelem! \Leftrightarrow ! Akkor és csak akkor!
 - (d) Belátjuk, hogy f polinom időben elvégezhető.

Feladatok

1. Gondolkozzunk el az NP -beliség, $coNP$ -beliség, P -beliség és NP -teljesség fogalmakon!
2. Legyen a Π döntési probléma inputja egy G gráf, az output pedig pontosan akkor „igen”, ha van G -ben Hamilton-kör. Mutassuk meg, hogy $\Pi \in NP$.
3. **[pótZH 2010. ősz]** Legyen a Π döntési probléma inputja egy összefüggő G gráf, az output pedig pontosan akkor „igen”, ha van G -ben Euler-körséta. Mutassuk meg, hogy $\Pi \in coNP$.
4. Legyen a Π döntési probléma inputja egy G gráf, az output pedig pontosan akkor „igen”, ha G síkbarajzolható. Mutassuk meg, hogy $\Pi \in NP \cap coNP$.
5. Tegyük fel, hogy van egy algoritmusunk, ami polinom időben megmondja, hogy adott G gráf kiszínezhető-e legfeljebb k db színnel! (Vagyis input: G és k ; output: igen/nem). Hogy tudnánk ennek segítségével polinom időben meghatározni $\chi(G)$ -t?

6. Tegyük fel, hogy van egy algoritmusunk, ami polinom időben megmondja, hogy adott G gráf kiszínezhető-e legfeljebb k db színnel! A fentiek értelmében azt is megtudhatjuk polinom időben, hogy mennyi $\chi(G)$. Hogyan tudnánk kiszínezni polinom időben a gráfot $\chi(G)$ színnel?
-
7. Be tudjuk-e bizonyítani a következő problémák P , NP és $coNP$ -beliségét? A szorgalmasak bizonyíthatnak egyes problémákra NP -teljességet is. Az input egy $G(V, E)$ gráf ($|V| = n, |E| = e$).
- (a) Van-e G -ben legalább k hosszú kör? (k az input része.)
 - (b) Kiszínezhetők-e G pontjai 2 színnel úgy, hogy legfeljebb 2 él kivételével minden él végpontjai különböző színűek?
 - (c) Kiszínezhető-e G 4 színnel?
 - (d) Van-e G -ben egy legalább 15 pontú teljes részgráf?
 - (e) Van-e G -ben egy legalább k pontú teljes részgráf? (k az input része.)
 - (f) Teljesül-e az Ore-feltétel?
 - (g) Van-e G -ben legfeljebb S súlyú (egyszerű) út? (S az input része.)
 - (h) Van-e G -ben olyan feszítőfa, amelyben a maximális fokszám legfeljebb 2?
 - (i) Van-e G -ben Euler-kör?
8. **[PZH 2008. december 5.]** Bizonyítsuk be, hogy NP -teljes az a π döntési probléma, aminek a bemenete egy egyszerű G gráf, az n és m számok, a kimenete pedig pontosan akkor „igen”, ha G -nek van olyan n csúcsú részgráfja, aminek legalább m éle van.
9. **[ZH 2010. ősz]** Igazoljuk, hogy a P és NP problémaosztályba egyaránt beletartozik annak eldöntése, hogy egy inputként megadott G irányítatlan gráfban létezik-e két különböző kör.
10. **[ZH 2009. november 23.]** Mi az alábbi probléma bonyolultsága? (Vagy bizonyítsa be, hogy polinom időben megoldható, vagy bizonyítsa be, hogy NP -teljes!)
Input: G egyszerű gráf és $v \in V(G)$
Kérdés: Van-e G -nek olyan feszítőfája, amelyben v az egyetlen olyan pont, aminek a foka legalább 3?
11. A G irányítatlan gráf minden x pontjához tartozik egy $s(x)$ súly. Célunk, hogy olyan feszítőfát találjunk a gráfban, amiben a levelekhez tartozó súlyok összege minimális. Fogalmazzuk meg a feladathoz tartozó eldöntési problémát, és bizonyítsuk be, hogy NP -teljes!
12. Bizonyítsuk be, hogy P -beli az olyan négy színnel színezhető G gráfokból álló nyelv, melyekre igaz, hogy G csúcsai kiszínezhetők a piros, zöld, sárga, kék színekkel úgy, hogy pontosan egy csúcs legyen piros és pontosan két csúcs legyen kék!
13. **[ZH 2008. november 17.]** Bizonyítsuk be, hogy NP -teljes az a π döntési probléma, aminek a bemenete egy $100n$ pontú irányítatlan gráf, a kimenete pedig pontosan akkor „igen”, ha G -nek van legalább n pontú köre.