HÍRKÖZLÉSELMÉLET

5 EA

2 ZH – márc. 19. 18:00 – 20:00

ZH 2 rész – ~~teszt~~ teszt és példa – 15 pont

7,5 pont teszt

7,5 pont feladat

Hibakezelő eljárások

K – kódolandó forrásszimbólumok száma

m – forrásszimbólumok száma (hány lehetséges szimbólumot generál a forrás)

N – kódszóhossz

q – kódabc jeleinek száma

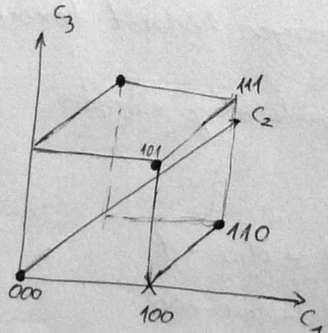
$\bar{u} = [u_1, u_2 \dots u_k]$ üzenetvektor

$K = 2 \quad m = q = 2 \quad N = 3$

$\bar{c} = [c_1, \dots \dots c_N]$ kódvektor

m^K lehetséges üzenetblokkunk van

q^N dimenziós tér



• – érvényes kódszavak

$\bar{c} = \Omega(\bar{u})$

Ω – kódolási szabály

$d \quad \bar{c}, \bar{v}$

$$d = \sum_{i=1}^{N} \chi(c_i \neq v_i)$$

Hamming-távolság

azon pozíciók száma, amelyben a két vektor különbözik

• pontok – Hamming-távolság 2

4 db lehetséges üzenethez ezt a 4 kódvektort rendeljük, akkor definiálható

a minimális Hamming-táv: KÓDTÁVOLSÁG: $d_{min} = \min d(\bar{c}, \bar{c})$, ami = bármely két kód közti Hammig-táv minimuma

Dekódolás

$\underline{v}$ - demodulátor kimenete

1 $\bar{v} \rightarrow \bar{c}'$ - $\bar{v}$ vektort hozzárendeljük c érvényes kódszót

2. $\bar{c}' \rightarrow \bar{u}'$ $\quad \bar{u}' = \Omega^{-1}(\bar{c}')$

demodulátor kimenetén megjelenő n dimenziós kódszóhoz hozzárendelünk egy vektort

1. - triviális

$\bar{v} = \bar{c}' = \bar{c}$ - demodulátor kimenete épp egy érvényes kódszó

- megoldhatatlan:

$\bar{v} = \bar{c}' \neq \bar{c}$

- van esély

$\bar{v} \neq \bar{c}'$ - ki kell választanom egy érvényes kódszót

legközelebb eső érvényes kódszót keresem

↓

Hamming-távolság alapján

t_{jel} - jelezhető hibák száma

$t_{jel} < d_{min}$; $t_{jel} = d_{min} - 1$

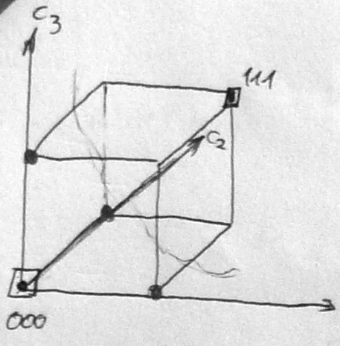
mert ha = lenne akkor megoldhatatlan eset

mi esetünkben 1 db hibát jelezhetünk

javítani viszont nem tudjuk, mert nem tudjuk hol történt rontás

t_{jav} - javítható hibák száma

döntési tartományt kell bevezetni



$K=1$ Hamming-táv: 3

két érvényes kódszó

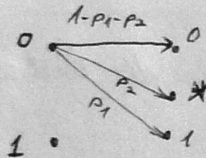
• – 000-hoz tartozó döntési tartományba eső kódszavak

nem ~~ha~~ hibamentes a döntés, mert lehet, hogy 2 hiba történt

$$t_{jav} < \frac{d_{min}}{2} \qquad \boxed{t_{jav} = \left[\frac{d_{min}-1}{2}\right]} \text{ egészrész}$$

legyen demodulátor bináris kimenetű, amikor bizonytalan:

BSC:



demodulátor azt mondja, hogy nem tudom

törléses hibák

lehetséges hiba pozíciója ismert

$$\boxed{t_{tör} = d_{min} - 1}$$

első példa:

	000
C =	110
érvényes	101
kódszavak	011
	*01
	1*1
	10*

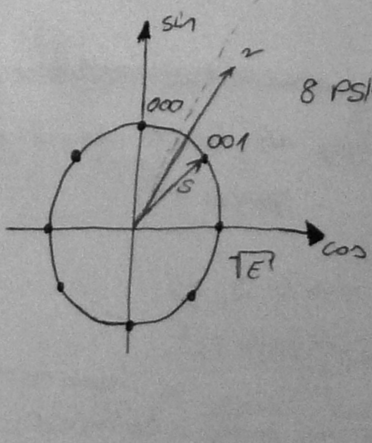
101-ben van bizonytalanság

↓

törléses hiba javítható, mert ismerem a hiba pozícióját

– döntési tartomány: közelében „nem tudom"

8 PSK



Kódkonstrukciós törvények

Singleton korlát. $m = q$

M - lehetséges üzenetszavak száma

$$M \leq q^{N-d_{min}+1}$$

biz.:

$M \leq q^k$ $m=q$ - forrásabc és kódabc

k - hosszúság

N dimenziósra bővítjük a teret

$$d_{min} \leq 1 + N - k$$

$$k \leq N - d_{min} + 1$$

$$M \leq q^k = q^{N-d_{min}+1}$$

azt mondja meg, hogy d_{min} feltétel mellett hány db lehetséges üzenet-szimbólumot tudok elhelyezni

MDS - maximális távolságú kódok

azok, ahol Singleton-korlát egyenlőséggel teljesül

$$M = q^{N-d_{min}+1}$$

első ezt teljesíti a Singleton korlátot $M=4$ $q=2$ $k=3$ $d_{min}=2$

és MDS is

Hamming-korlát

q állapotú

N dimenziós

~~adott m, k, q paraméterek mellett milyen~~

és ha tudjuk hány db hibát akarunk javítani → milyen blokkméretet (N, k, q paramétereket) válasszunk

egyszerű

adott $t_{jav} \longrightarrow N, k, q$

$$1 + N(q-1) + \binom{N}{2}(q-1)^2 \ldots$$

vagyis egy adott ponttól

azon pontok száma, amely a kódtól 1 Hamming-távra van

-//- -//- 2 Hamming

$$1 + N(q-1) + \binom{N}{2}(q-1)^2 + \dots + \binom{N}{i}(q-1)^i =$$

$$= \sum_{i=0}^{t_{jav}} \binom{N}{i}(q-1)^i$$

megmondja azon pontok számát a térben, amely egy adott ponttól t_{jav} távolságra vannak a térben

m - forrás m állapotú

K - üzenet hossza

$$\boxed{m^K \sum_{i=0}^{t_{jav}} \binom{N}{i}(q-1)^i \le q^N}$$

Hamming-korlát

$m = q \qquad \sum_{i=0}^{t_{jav}} \binom{N}{i}(q-1)^i \le q^{N-k}$ $\qquad m^K = q^K$ - leosztunk vele

$m = q = 2 \qquad \sum_{i=0}^{t_{jav}} \binom{N}{i} \le 2^{N-k}$

perfekt a kód, ha az egyenlőség teljesül

$\downarrow$

tér összes pontja fel van használva

K	N: $t_{jav} = 1$	$t_{jav} = 2$
1	3	5
4	7	–
11	15	–
57	63	–
78	–	90 ! - a döntési kör alatja is számít, amit nem tudtunk így leírni egyenlettel

ez nem létezik!

$\frac{K}{N}$ hatékonyabb az a kód, amelynek a kódaránya nagyobb

$$1 + N(q-1) = q^{N-K}$$

$$1 + N(2-1) = 2^{N-K}$$ — bináris eset, 1 hiba javítása

Hamming-korlát

$$1 + N = 2^{N-K}$$ perfekt a kód

$t_{jav} = 2$

$$1 + N + \frac{N(N-1)}{2} = 2^{N-K}$$

$N = 5$
$k = 1$

<u>lineáris bináris kód</u>

bináris Hamming-kód — 1 bitet javítani képes bináris perfekt kód

kódok egy lineáris tér lineáris alterét alkotják

lineáris tér bármely 2 elemén aritmetikai műveleteket végezve eredmény a térben lesz (nem vezet ki a térből)

0 0 0
1 1 0 — lineáris altér - zárt tér,
1 0 1
0 1 1

bármely 2őt összeadva valamelyiket kapjuk a 4-ből

bázis:

$$K\updownarrow \overset{\xleftrightarrow{\;N\;}}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}} = \bar{\bar{G}}$$

üzenetvektor, generátor mátrix

$$\boxed{\bar{c} = \bar{u}\,\bar{\bar{G}}}$$

kódhossz N

$\bar{G}$ mátrix sorai száma K, hossza N

üzenetvektorok

$\bar{u}$: $[0, 0]$
$[0, 1]$
$[1, 0]$
$[1, 1]$

$$\bar{c} = [0\;\;0] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [0\;\;0\;\;0]$$ — 0 0 üzenethez 0,0,0 kódot

$$c = [0\;\;1] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [1\;\;0\;\;1]$$ — 0 1 üzenethez generálta 1, 0, 1 kódot

$$c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [1, 1, 0]$$

mod2 miatt 0

$$\bar{c} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [0, 1, 1]$$

~~[illegible]~~ összes lehetséges kódszót legeneráltuk

$$\bar{c} = \bar{u}\,\bar{\bar{G}}$$

$\bar{\bar{H}}^T$ – paritás ellenőrző mátrix

$$\bar{\bar{G}}\,\bar{\bar{H}}^T = \bar{\bar{\phi}}$$

$$\underbrace{\bar{u}\,\bar{\bar{G}}}\,\bar{\bar{H}}^T = \bar{\bar{\phi}}$$

$$c \cdot \bar{\bar{H}}^T = \bar{\bar{\phi}} \quad \bar{\bar{H}} \cdot \bar{c}^T = \bar{\bar{\phi}}$$

bármely érvényes kódszóra 0-t ad

$$\bar{s}^T = \bar{\bar{H}}\,\bar{v}^T - \bar{\bar{H}}\,\bar{c}^T = H \cdot (\bar{v} - \bar{c})^T = \bar{\bar{H}}\,\bar{e}^T$$

$\downarrow$

tünet, szindróma vektor – megmutatja, hogy van-e <u>hiba</u>

$$\bar{e} = \bar{v} - \bar{c}$$

$\downarrow$

hibavektor

<u>Szisztematikus kód</u>

kódszó eleje vagy vége megegyezik az üzenetszóval

I – egységmátrix

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$K \times N$ (sor: K, oszlop: N)

szisztematikus mátrix : $\bar{\bar{G}} = [I \mid \bar{\bar{P}}]$ – paritásmátrix

vagy $[\bar{\bar{P}} \mid I]$ – is jó

bináris esetben −1. elhagyható

$$\bar{\bar{H}} = \left[-\bar{\bar{P}}^T \;\middle|\; I \right] \qquad \underset{}{N-K}^{\text{ sor}} \times N^{\text{ oszlop}}$$

$$\bar{\bar{H}}^T \Rightarrow \underset{}{N}^{\text{ sor}} \times N-K^{\text{ oszlop}} \qquad H = [1 \; 1 \mid 1]$$

$$H^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

000 – hibázzon : 100

$$[1 \; 1 \; 1] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1$$ – bármelyiktől 1 Hamming-távra van

$[1, 1, 1]$

HF: $N=7$, $K=4$ bináris Hamming-kód

generálj bináris Hamming kódot

javítani, hibát detektálni

mutasd meg, hogy 1 hibát javítani képes

*– H melyik oszlopa

pl: $K=1$ $N=3$ (000 és 111)

$$G = [1, 1, 1] \qquad H^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \bar{v} = (1, 0, 0)$$ – 1 bit hiba

$$H = \left[\begin{array}{c:cc} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$H \cdot v^T = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}} \rightarrow \bar{s}$$

s megmutatja, hogy hol a hiba*

1. pozícióban van a hiba