1. feladat (4+10 pont)
a) Hogyan kaphatjuk meg egy z komplex szám n-edik gyökeit? (Adja meg a formulát tetszőleges n pozitív egész szám esetén!)
b) Adja meg algebrai alakban az $\mathrm{i}z^2 + 2(\sqrt{3} - \mathrm{i}) = 0$ egyenletnek az összes megoldását!

---

a) Ha a $z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$ a szám trigonometrikus alakja (**1p**), akkor z n darab n-edik gyöke $z_1, \dots z_n$ (**1p**) ahol $z_j = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+(j-1)2\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\varphi+(j-1)2\pi}{n}\right)$, $j = 1, \dots n$ (**2p**)
b) $z^2 \overset{\mathbf{1p}}{=} \dfrac{-2(\sqrt{3}-\mathrm{i})}{\mathrm{i}} \overset{\mathbf{2p}}{=} 2\mathrm{i}(\sqrt{3}-\mathrm{i}) \overset{\mathbf{1p}}{=} 2(1+\sqrt{3}\mathrm{i}) \overset{\mathbf{2p}}{=} 4\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$, így
$z_1 \overset{\mathbf{1p}}{=} 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right) \overset{\mathbf{1p}}{=} \sqrt{3} + \mathrm{i}$, $z_2 \overset{\mathbf{1p}}{=} 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{6}\right) \overset{\mathbf{1p}}{=} -\sqrt{3} - \mathrm{i}$.

---

2. feladat (14 pont)
Legyen $a_1 = 4$, $a_{n+1} = 8 - \dfrac{15}{a_n}$ rekurzíve adott sorozat! Mutassa meg, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $3 \le a_n \le 5$ teljesül! Indokolja meg, hogy (a_n) konvergens, és határozza meg a határértékét!

Teljes indukcióval bizonyítunk. (**1p**)
I. $3 \le a_1 = 4 \le 5$ (**1p**)
II. $3 \le a_n \le 5 \overset{\mathbf{1p}}{\Rightarrow} 5 \ge \dfrac{15}{a_n} \ge 3 \overset{\mathbf{1p}}{\Rightarrow} -5 \le -\dfrac{15}{a_n} \le -3 \overset{\mathbf{1p}}{\Rightarrow} 3 = 8-5 \le a_{n+1} \le 8 - \dfrac{15}{a_n} \le 8-3 = 5.$

$a_2 = 5\frac{17}{4} > 4 = a_1$, teljes indukcióval bebizonyítjuk, hogy (a_n) monoton növő. (**1p**)
I. $a_2 > a_1$ (**1p**)
II. Az előbb bizonyított alsó korlát miatt $a_n \ge 0$, így
$a_{n+1} > a_n \overset{\mathbf{1p}}{\Rightarrow} \dfrac{15}{a_{n+1}} < \dfrac{15}{a_n} \overset{\mathbf{1p}}{\Rightarrow} -\dfrac{15}{a_{n+1}} > -\dfrac{15}{a_n} \overset{\mathbf{1p}}{\Rightarrow} a_{n+2} = 8 - \dfrac{15}{a_{n+1}} > 8 - \dfrac{15}{a_n} = a_{n+1}$
A sorozat tehát monoton növő és korlátos, így konvergens, vagyis létezik $A = \lim_{n\to\infty} a_n$ (**2p**). Ekkor $A = 8 - \dfrac{15}{A}$, tehát $A^2 - 8A + 15 = 0$. Ebből $A = 3$ vagy $A = 5$, de mivel $a_n \ge 4$, így $\lim_{n\to\infty} a_n = 5$ (**2p**)

---

3. feladat (4+10 pont)
a) Osztályozza a valós, egyváltozós függvények szakadásainak típusait!
b) Hol és milyen típusú szakadása van az $f(x) = \operatorname{arctg}\frac{1}{x+1} + x\operatorname{arcctg}\frac{3}{x}$ függvénynek?

---

a) Ha $\lim_{x\to x_0} f(x) \in \mathbb{R}$, de $\lim_{x\to x_0} f(x) \ne f(x_0)$, akkor az x_0 pontban megszüntethető szakadás van. (**1p**)
Ha $\lim_{x\to x_0+} f(x) \in \mathbb{R}$, és $\lim_{x\to x_0-} f(x) \in \mathbb{R}$, de $\lim_{x\to x_0+} f(x) \ne \lim_{x\to x_0-} f(x)$, akkor a függvénynek az x_0 pontban véges ugrás típusú szakadása van. (**1p**)
Amennyiben $\lim_{x\to x_0+} f(x)$ vagy $\lim_{x\to x_0-} f(x)$ nem létezik vagy nem véges, akkor a

---

függvénynek az x_0 pontban másodfajú szakadása van. (**2p**)
b) f folytonos függvények hányadosának kompozíciója, illetve ezek összege, így csak ott lehet szakadása, ahol a nevező 0. (**2p**)

$$\lim_{x\to 0} f(x) \overset{\mathbf{1p}}{=} \operatorname{arctg}(1) + \lim_{x\to 0} x \operatorname{arcctg}\frac{3}{x} \overset{\mathbf{1p}}{=} \frac{\pi}{4},$$

mert az összeg második tagja az arcctg függvény korlátossága miatt egy 0-hoz tartó és egy korlátos kifejezés szorzata, így 0-hoz tart (**1p**). A 0 pontban tehát a függvénynek megszüntethető szakadása van.(**1p**)

$$\lim_{x\to -1\pm} f(x) \overset{\mathbf{3p}}{=} \operatorname{arcctg} 3 \pm \frac{\pi}{2},$$

így az függvénynek az -1 pontban véges ugrása van. (**1p**)

---

4. feladat (8+10 pont)

a) Mondja ki és igazolja a szorzatfüggvény deriválási szabályát!
b) Keresse meg azokat az intervallumokat, amelyeken az $f(x) = xe^{-5x^2}$ függvény konvex, illetve konkáv! Hol van inflexiója az f függvénynek?

---

a) Ha f és g differenciálható egy x_0 pontban, akkor a szorzatuk is differenciálható, és $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$ (**2p**), mert

$$\begin{aligned}
(fg)'(x_0) &\overset{\mathbf{1p}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{(fg)(x_0+h) - (fg)(x_0)}{h} \overset{\mathbf{1p}}{=} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0+h)g(x_0) + f(x_0+h)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)}{h} \overset{\mathbf{2p}}{=} \\
&= \lim_{h\to 0} f(x_0+h) \lim_{h\to 0} \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} + g(x_0) \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \overset{\mathbf{1p}}{=} \\
&= f(x_0)g'(x_0) + g(x_0)f'(x_0),
\end{aligned}$$

hiszen ha f differenciálható az x_0 pontban, akkor ott folytonos is (**1p**.)
b) $f''(x) \overset{\mathbf{2p}}{=} \left(e^{-5x^2} - 10x^2e^{-5x^2}\right)' = \left((1-10x^2)e^{-5x^2}\right)' \overset{\mathbf{2p}}{=} -20xe^{-5x^2} - 10x(1-10x^2)e^{-5x^2} = -10x(3-10x^2)e^{-5x^2} = 0$ ha $x = 0$ vagy $x = \pm\sqrt{\frac{3}{10}}$. (**2p**) Így

	$\left(-\infty, -\sqrt{\frac{3}{10}}\right)$	$-\sqrt{\frac{3}{10}}$	$\left(-\sqrt{\frac{3}{10}}, 0\right)$	0	$\left(0, \sqrt{\frac{3}{10}}\right)$	$\sqrt{\frac{3}{10}}$	$\left(\sqrt{\frac{3}{10}}, \infty\right)$
f''	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\cap$	IP	$\cup$	IP	$\cap$	IP	$\cup$

(**4p**)

---

5. feladat* (10 pont)

Számolja ki az $\int \operatorname{sh}(5x)\cos(2x)\,\mathrm{d}x$ integrált!

Parciális integrálással $f'(x) = \operatorname{sh}(5x)$, $g(x) = \cos(2x)$, vagyis $f(x) = \frac{\operatorname{ch}(5x)}{5}$, $g'(x) = -2\sin(2x)$ (**2p**), így

$$\int \operatorname{sh}(5x)\cos(2x)\,\mathrm{d}x \overset{\mathbf{2p}}{=} \frac{\cos(2x)\operatorname{ch}(5x)}{5} + \frac{2}{5}\int \operatorname{ch}(5x)\sin(2x)\,\mathrm{d}x$$

Újabb parciális integrálással $f'(x) = \operatorname{ch}(5x)$, $g(x) = \sin(2x)$, vagyis $f(x) = \frac{\operatorname{sh}(5x)}{5}$, $g'(x) = 2\cos(2x)$, (**2p**)

$$\int \operatorname{ch}(5x)\sin(2x)\,\mathrm{d}x \overset{\mathbf{2p}}{=} \frac{\sin(2x)\operatorname{sh}(5x)}{5} - \frac{2}{5}\int \operatorname{sh}(5x)\cos(2x)\,\mathrm{d}x,$$

így az

$$I = \int \operatorname{sh}(5x)\cos(2x)\,\mathrm{d}x = \frac{\cos(2x)\operatorname{ch}(5x)}{5} + \frac{2}{5}\cdot\frac{\sin(2x)\operatorname{sh}(5x)}{5} - \frac{4}{25}I$$

egyenlethez jutunk (**1p**), amiből

$$\int \operatorname{sh}(5x)\cos(2x)\,\mathrm{d}x \overset{\mathbf{1p}}{=} \frac{25}{29}\left(\frac{\cos(2x)\operatorname{ch}(5x)}{5} + \frac{2}{5}\cdot\frac{\sin(2x)\operatorname{sh}(5x)}{5}\right) + c.$$

---

6. feladat* (4+10 pont)
a) Mondja ki a Newton-Leibniz tételt!
b) Számolja ki az $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^3 x\cos^2 x\,\mathrm{d}x$ integrált!

---

a) Ha $f \in \mathcal{R}[a,b]$ és $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in [a,b]$ esetén, akkor $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$ (**4p**)
b) $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, (**1p**) tehát

$$\int \sin^3 x\cos^2 x\,\mathrm{d}x \overset{\mathbf{1p}}{=}$$
$$= \int \sin x(1-\cos^2 x)\cos^2 x\,\mathrm{d}x \overset{\mathbf{2p}}{=} \int \sin x\cos^2 x\,\mathrm{d}x - \int \sin x\cos^4 x\,\mathrm{d}x \overset{\mathbf{2p}}{=}$$
$$= -\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5} + c$$

használva, hogy $\alpha \neq -1$ esetén $\int f^\alpha f' = \frac{f^{\alpha+1}}{\alpha} + c$. (**1p**) A Newton-Leibniz formula alapján

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^3 x\cos^2 x\,\mathrm{d}x \overset{\mathbf{2p}}{=} -\frac{\cos^3 0}{3} + \frac{\cos^5 0}{5} - \left(-\frac{\cos^3\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{3} + \frac{\cos^5\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{5}\right) \overset{\mathbf{1p}}{=} -\frac{1}{3} + \frac{1}{5}.$$

---

7. feladat* (5+11 pont)

a) Milyen $\alpha > 0$ esetén konvergens az $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ integrál? Válaszát indokolja!

b) Számolja ki az $\displaystyle\int_4^\infty \frac{2}{x^2-9}\,\mathrm{d}x$ integrált!

---

a) $\alpha \neq 1$ esetén

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}dx \overset{\mathbf{1p}}{=} \lim_{\omega\to\infty}\left[\frac{x^{-\alpha+1}}{1-\alpha}\right]_1^\omega \overset{\mathbf{1p}}{=} -\lim_{\omega\to\infty}\frac{\omega^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} < \infty,$$

ha $\alpha > 1$ (**1p**). $\alpha = 1$ esetén

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}dx = \lim_{\omega\to\infty}[\ln x]_1^\omega \overset{\mathbf{1p}}{=} \infty,$$

így az integrál $\alpha > 1$ esetén konvergens (**1p**).

b) $\displaystyle\int_4^\infty \frac{2}{x^2-9}\,\mathrm{d}x \overset{\mathbf{1p}}{=} 2\lim_{\omega\to\infty}\int_4^\omega \frac{1}{x^2-9}\,\mathrm{d}x$. Ehhez

$$\frac{1}{x^2-9} \overset{\mathbf{2p}}{=} \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+3} \overset{\mathbf{1p}}{=} \frac{AX+3A+Bx-3B}{x^2-9},$$

vagyis $A+B=0$, $A-B=\frac{1}{3}$, tehát $A=\frac{1}{6}$, $B=-\frac{1}{6}$, (**2p**) így

$$\begin{aligned}\int_4^\infty \frac{2}{x^2-9}\,\mathrm{d}x &\overset{\mathbf{1p}}{=} 2\lim_{\omega\to\infty}\frac{1}{6}\int_4^\omega\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+3}\right)\mathrm{d}x \overset{\mathbf{2p}}{=}\\ &= \frac{2}{6}\lim_{\omega\to\infty}\left[\ln(x-3)-\ln(x+3)\right]_4^\omega \overset{\mathbf{1p}}{=}\\ &= \frac{1}{3}\lim_{\omega\to\infty}\ln\frac{\omega-3}{\omega+3} - \frac{1}{3}\ln\frac{1}{7} \overset{\mathbf{1p}}{=} \frac{1}{3}\ln 7\end{aligned}$$

IMSC feladat (14 IMSC pont)

Igaz-e, hogy minden deriválható függvény deriváltja folytonos? Válasza indoklásához számolja ki az

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x = 0 \\ x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right), & \text{ha } x \neq 0 \end{cases}$$

függvény deriváltját!

Csak pontozási útmutatót adunk, nem teljes megoldást!

Az állítás nem igaz! **(2p)**

A deriválás definíciója alapján megmutatható, hogy $f'(0) = 0$ (**3p**), $x \neq 0$ esetén pedig a deriválási szabályokkal: $f'(x) = \underbrace{2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)}_{g(x)} - \underbrace{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}_{h(x)}$ (**3p**). Rendőr elvvel megmutatható, hogy g folytonos (**2p**), míg átviteli elvvel igazolható, hogy h nem folytonos az origóban (**4p**), tehát f' nem folytonos az origóban.

---

1. feladat (4+10 pont)
a) Hogyan kaphatjuk meg egy z komplex szám n-edik gyökeit? (Adja meg a formulát tetszőleges n pozitív egész szám esetén!)
b) Adja meg algebrai alakban az $\mathrm{i}z^2 - 8(\sqrt{3} + \mathrm{i}) = 0$ egyenletnek az összes megoldását!

---

a) Ha a $z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$ a szám trigonometrikus alakja (**1p**), akkor z n darab n-edik gyöke $z_1, \dots z_n$ (**1p**) ahol $z_j = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+(j-1)2\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\varphi+(j-1)2\pi}{n}\right)$, $j = 1, \dots n$ (**2p**)
b) $z^2 \overset{\mathbf{1p}}{=} \dfrac{8(\sqrt{3}+\mathrm{i})}{\mathrm{i}} \overset{\mathbf{2p}}{=} -8\mathrm{i}(\sqrt{3}+\mathrm{i}) \overset{\mathbf{1p}}{=} 8(1-\sqrt{3}\mathrm{i}) \overset{\mathbf{2p}}{=} 16\left(\cos\dfrac{-\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\dfrac{-\pi}{3}\right)$, így
$z_1 \overset{\mathbf{1p}}{=} 4\left(\cos\frac{-\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{-\pi}{6}\right) \overset{\mathbf{1p}}{=} 2(\sqrt{3}-\mathrm{i})$, $z_2 \overset{\mathbf{1p}}{=} 4\left(\cos\frac{5\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{6}\right) \overset{\mathbf{1p}}{=} 2(-\sqrt{3}+\mathrm{i})$.

---

2. feladat (14 pont)
Legyen $a_1 = 4$, $a_{n+1} = 8 - \dfrac{12}{a_n}$ rekurzíve adott sorozat! Mutassa meg, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $2 \le a_n \le 6$ teljesül! Indokolja meg, hogy (a_n) konvergens, és határozza meg a határértékét!

Teljes indukcióval bizonyítunk. (**1p**)
I. $2 \le a_1 = 4 \le 6$ (**1p**)
II. $2 \le a_n \le 6 \overset{\mathbf{1p}}{\Rightarrow} 6 \ge \dfrac{12}{a_n} \ge 2 \overset{\mathbf{1p}}{\Rightarrow} -6 \le -\dfrac{12}{a_n} \le -2 \overset{\mathbf{1p}}{\Rightarrow} 2 = 8 - 6 \le a_{n+1} \le 8 - \dfrac{12}{a_n} \le 8 - 2 = 6.$

$a_2 = 5 > 4 = a_1$, teljes indukcióval bebizonyítjuk, hogy (a_n) monoton növő. (**1p**)
I. $a_2 > a_1$ (**1p**)
II. Az előbb bizonyított alsó korlát miatt $a_n \ge 0$, így
$a_{n+1} > a_n \overset{\mathbf{1p}}{\Rightarrow} \dfrac{12}{a_{n+1}} < \dfrac{12}{a_n} \overset{\mathbf{1p}}{\Rightarrow} -\dfrac{12}{a_{n+1}} > -\dfrac{12}{a_n} \overset{\mathbf{1p}}{\Rightarrow} a_{n+2} = 8 - \dfrac{12}{a_{n+1}} > 8 - \dfrac{12}{a_n} = a_{n+1}$
A sorozat tehát monoton növő és korlátos, így konvergens, vagyis létezik $A = \lim_{n\to\infty} a_n$ (**2p**). Ekkor $A = 8 - \dfrac{12}{A}$, tehát $A^2 - 8A + 12 = 0$. Ebből $A = 2$ vagy $A = 6$, de mivel $a_n \ge 4$, így $\lim_{n\to\infty} a_n = 6$ (**2p**)

---

3. feladat (4+10 pont)
a) Osztályozza a valós, egyváltozós függvények szakadásainak típusait!
b) Hol és milyen típusú szakadása van az $f(x) = x \operatorname{arcctg}\frac{2}{x} + \operatorname{arctg}\frac{1}{x-1}$ függvénynek?

---

a) Ha $\lim_{x\to x_0} f(x) \in \mathbb{R}$, de $\lim_{x\to x_0} f(x) \ne f(x_0)$, akkor az x_0 pontban megszüntethető szakadás van. (**1p**)
Ha $\lim_{x\to x_0+} f(x) \in \mathbb{R}$, és $\lim_{x\to x_0-} f(x) \in \mathbb{R}$, de $\lim_{x\to x_0+} f(x) \ne \lim_{x\to x_0-} f(x)$, akkor a függvénynek az x_0 pontban véges ugrás típusú szakadása van. (**1p**)

Amennyiben $\lim_{x\to x_0+} f(x)$ vagy $\lim_{x\to x_0-} f(x)$ nem létezik vagy nem véges, akkor a függvénynek az x_0 pontban másodfajú szakadása van. (**2p**)
b) f folytonos függvények hányadosának kompozíciója, illetve ezek összege, így csak ott lehet szakadása, ahol a nevező 0. (**2p**)

$$\lim_{x\to 0} f(x) \overset{\mathbf{1p}}{=} \lim_{x\to 0} x \operatorname{arcctg} \frac{2}{x} + \operatorname{arctg}(-1) \overset{\mathbf{1p}}{=} -\frac{\pi}{4},$$

mert az összeg első tagja az arcctg függvény korlátossága miatt egy 0-hoz tartó és egy korlátos kifejezés szorzata, így 0-hoz tart (**1p**). A 0 pontban tehát a függvénynek megszüntethető szakadása van.(**1p**)

$$\lim_{x\to 1\pm} f(x) \overset{\mathbf{3p}}{=} \operatorname{arcctg} 2 \pm \frac{\pi}{2},$$

így az függvénynek az 1 pontban véges ugrása van. (**1p**)

---

4. feladat (8+10 pont)
a) Mondja ki és igazolja a szorzatfüggvény deriválási szabályát!
b) Keresse meg azokat az intervallumokat, amelyeken az $f(x) = xe^{-2x^2}$ függvény konvex, illetve konkáv! Hol van inflexiója az f függvénynek?

---

a) Ha f és g differenciálható egy x_0 pontban, akkor a szorzatuk is differenciálható, és $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$ (**2p**), mert

$$\begin{aligned}
(fg)'(x_0) &\overset{\mathbf{1p}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{(fg)(x_0+h) - (fg)(x_0)}{h} \overset{\mathbf{1p}}{=} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0+h)g(x_0) + f(x_0+h)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)}{h} \overset{\mathbf{2p}}{=} \\
&= \lim_{h\to 0} f(x_0+h) \lim_{h\to 0} \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} + g(x_0) \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \overset{\mathbf{1p}}{=} \\
&= f(x_0)g'(x_0) + g(x_0)f'(x_0),
\end{aligned}$$

hiszen ha f differenciálható az x_0 pontban, akkor ott folytonos is (**1p.**)
b) $f''(x) \overset{\mathbf{2p}}{=} \left(e^{-2x^2} - 4x^2e^{-2x^2}\right)' = \left((1-4x^2)e^{-2x^2}\right)' \overset{\mathbf{2p}}{=} -8xe^{-2x^2} - 4x(1-4x^2)e^{-2x^2} = -4x(3-4x^2)e^{-2x^2} = 0$ ha $x = 0$ vagy $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. (**2p**) Így

	$\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$	0	$\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \infty\right)$
f''	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\cap$	IP	$\cup$	IP	$\cap$	IP	$\cup$

(**4p**)

---

5. feladat* **(10 pont)**
Számolja ki az $\displaystyle\int \operatorname{ch}(2x)\sin(3x)\,\mathrm{d}x$ integrált!

Parciális integrálással $f'(x) = \operatorname{ch}(2x)$, $g(x) = \sin(3x)$, vagyis $f(x) = \frac{\operatorname{sh}(2x)}{2}$, $g'(x) = 3\cos(3x)$ (**2p**), így

$$\int \operatorname{ch}(2x)\sin(3x)\,\mathrm{d}x \overset{\mathbf{2p}}{=} \frac{\sin(3x)\operatorname{sh}(2x)}{2} - \frac{3}{2}\int \operatorname{sh}(2x)\cos(3x)\,\mathrm{d}x$$

Újabb parciális integrálással $f'(x) = \operatorname{sh}(2x)$, $g(x) = \cos(3x)$, vagyis $f(x) = \frac{\operatorname{ch}(2x)}{2}$, $g'(x) = -3\sin(3x)$, (**2p**)

$$\int \operatorname{sh}(2x)\cos(3x)\,\mathrm{d}x \overset{\mathbf{2p}}{=} \frac{\cos(3x)\operatorname{ch}(2x)}{2} + \frac{3}{2}\int \operatorname{ch}(2x)\sin(3x)\,\mathrm{d}x,$$

így az

$$I = \int \operatorname{ch}(2x)\sin(3x)\,\mathrm{d}x = \frac{\sin(3x)\operatorname{sh}(2x)}{2} - \frac{3}{2}\cdot\frac{\cos(3x)\operatorname{ch}(2x)}{2} - \frac{9}{4}I$$

egyenlethez jutunk (**1p**), amiből

$$\int \operatorname{ch}(2x)\sin(3x)\,\mathrm{d}x \overset{\mathbf{1p}}{=} \frac{4}{13}\left(\frac{\sin(3x)\operatorname{sh}(2x)}{2} - \frac{3}{2}\cdot\frac{\cos(3x)\operatorname{ch}(2x)}{2}\right) + c.$$

6. feladat* (4+10 pont)
a) Mondja ki a Newton-Leibniz tételt!
b) Számolja ki az $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\cos^3 x\,\mathrm{d}x$ integrált!

a) Ha $f \in \mathcal{R}[a,b]$ és $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in [a,b]$ esetén, akkor $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$ (**4p**)
b) $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, (**1p**) tehát

$$\int \sin^2 x\cos^3 x\,\mathrm{d}x \overset{\mathbf{1p}}{=}$$
$$= \int \sin^2 x(1-\sin^2 x)\cos x\,\mathrm{d}x \overset{\mathbf{2p}}{=} \int \sin^2 x\cos x\,\mathrm{d}x - \int \sin^4 x\cos^x\,\mathrm{d}x \overset{\mathbf{2p}}{=}$$
$$= \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + c$$

használva, hogy $\alpha \neq -1$ esetén $\int f^\alpha f' = \frac{f^{\alpha+1}}{\alpha} + c$. (**1p**) A Newton-Leibniz formula alapján

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\cos^3 x\,\mathrm{d}x \overset{\mathbf{2p}}{=} \frac{\sin^3\frac{\pi}{2}}{3} - \frac{\sin^5\frac{\pi}{2}}{5} - \left(\frac{\sin^3 0}{3} - \frac{\sin^5 0}{5}\right) \overset{\mathbf{1p}}{=} \frac{1}{3} - \frac{1}{5}.$$

7. feladat* **(5+11 pont)**

a) Milyen $\alpha > 0$ esetén konvergens az $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ integrál? Válaszát indokolja!

b) Számolja ki az $\displaystyle\int_3^\infty \frac{5}{x^2-4}\,\mathrm{d}x$ integrált!

a) $\alpha \neq 1$ esetén

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}dx \overset{\mathbf{1p}}{=} \lim_{\omega\to\infty}\left[\frac{x^{-\alpha+1}}{1-\alpha}\right]_1^\omega \overset{\mathbf{1p}}{=} -\lim_{\omega\to\infty}\frac{\omega^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} < \infty,$$

ha $\alpha > 1$ (**1p**). $\alpha = 1$ esetén

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}dx = \lim_{\omega\to\infty}[\ln x]_1^\omega \overset{\mathbf{1p}}{=} \infty,$$

így az integrál $\alpha > 1$ esetén konvergens (**1p**).

b) $\displaystyle\int_3^\infty \frac{5}{x^2-4}\,\mathrm{d}x \overset{\mathbf{1p}}{=} 5\lim_{\omega\to\infty}\int_3^\omega \frac{1}{x^2-4}\,\mathrm{d}x$. Ehhez

$$\frac{1}{x^2-4} \overset{\mathbf{2p}}{=} \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} \overset{\mathbf{1p}}{=} \frac{AX+2A+Bx-2B}{x^2-4},$$

vagyis $A+B=0$, $A-B=\frac{1}{2}$, tehát $A=\frac{1}{4}$, $B=-\frac{1}{4}$, (**2p**) így

$$\begin{aligned}\int_3^\infty \frac{5}{x^2-4}\,\mathrm{d}x &\overset{\mathbf{1p}}{=} 5\lim_{\omega\to\infty}\frac{1}{4}\int_3^\omega\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}\right)\mathrm{d}x \overset{\mathbf{2p}}{=} \\ &= \frac{5}{4}\lim_{\omega\to\infty}[\ln(x-2)-\ln(x+2)]_3^\omega \overset{\mathbf{1p}}{=} \\ &= \frac{5}{4}\lim_{\omega\to\infty}\ln\frac{\omega-2}{\omega+2} - \frac{5}{4}\ln\frac{1}{5} \overset{\mathbf{1p}}{=} \frac{5}{4}\ln 5\end{aligned}$$

IMSC feladat (14 IMSC pont)

Igaz-e, hogy minden deriválható függvény deriváltja folytonos? Válasza indoklásához számolja ki az

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x = 0 \\ x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{ha } x \neq 0 \end{cases}$$

függvény deriváltját!

Csak pontozási útmutatót adunk, nem teljes megoldást!

Az állítás nem igaz! **(2p)**

A deriválás definíciója alapján megmutatható, hogy $f'(0) = 0$ **(3p)**, $x \neq 0$ esetén pedig a deriválási szabályokkal: $f'(x) = \underbrace{2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)}_{g(x)} - \underbrace{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}_{h(x)}$ **(3p)**. Rendőr elvvel megmutatható, hogy g folytonos **(2p)**, míg átviteli elvvel igazolható, hogy h nem folytonos az origóban **(4p)**, tehát f' nem folytonos az origóban.