1. feladat (5+9=14 pont)
a) Adja meg $x_0 \in \mathbb{R}$ esetén $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ definícióját. (x_0 az f értelmezési tartományának torlódási pontja.)
b) A definíció alapján lássa be, hogy $\lim\limits_{x\to 1} \sqrt{7x+9} = 4$.

Mo. a) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\delta(\varepsilon) > 0$, hogy $0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ esetén $|f(x) - A| < \varepsilon$. **(5p)**
b) Legyen $\varepsilon > 0$.

$$|\sqrt{7x+9} - 4| \overset{\textbf{(3p)}}{=} \left|\frac{7x+9-16}{\sqrt{7x+9}+4}\right| \overset{\textbf{(2p)}}{<} \frac{7|x-1|}{4} < \varepsilon \overset{\textbf{(2p)}}{\Longleftarrow} |x-1| < \frac{4\varepsilon}{7}$$

vagyis $\delta(\varepsilon) \overset{\textbf{(2p)}}{=} \dfrac{4\varepsilon}{7}$.

---

2. feladat (16 pont)
Adja meg az $z^4-(1-2i)z^2-i-1=0$ egyenlet összes megoldását exponenciális alakban!

Mo. $\dfrac{1-2i+\sqrt{(1-2i)^2+4i+4}}{2} = \dfrac{1-2i+\sqrt{1}}{2}$ **(5p)** , vagyis $z^2 \overset{\textbf{(1p)}}{=} -i \overset{\textbf{(2p)}}{=} e^{-i\frac{\pi}{2}}$ vagy $z^2 \overset{\textbf{(2p)}}{=} 1-i \overset{\textbf{(2p)}}{=} \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$, vagyis $z_1 \overset{\textbf{(1p)}}{=} e^{-i\frac{\pi}{4}}$, $z_2 \overset{\textbf{(1p)}}{=} e^{i\frac{3\pi}{4}}$, $z_3 \overset{\textbf{(1p)}}{=} \sqrt[4]{2}e^{-i\frac{\pi}{8}}$, $z_4 \overset{\textbf{(1p)}}{=} \sqrt[4]{2}e^{i\frac{7\pi}{8}}$.

---

3. feladat (10+10+10=30 pont)
Számolja ki az alábbi sorozatok határértékét:

$$a_n = \left(\frac{2n-5}{2n+3}\right)^{3n}, \qquad b_n = \sqrt{9n^2+2n-6} - 3n, \qquad c_n = \sqrt[n]{\frac{n^3+2n}{2n^2+4}}.$$

Mo.

$$a_n \overset{\textbf{(6p)}}{=} \left(\frac{\left(1-\frac{5}{2n}\right)^{2n}}{\left(1+\frac{3}{2n}\right)^{2n}}\right)^{\frac{3}{2}} \overset{\textbf{(2p)}}{\to} \left(\frac{e^{-5}}{e^3}\right)^{\frac{3}{2}} \overset{\textbf{(2p)}}{=} e^{-12}$$

$$b_n \overset{\textbf{(4p)}}{=} \frac{9n^2+2n-6-9n^2}{\sqrt{9n^2+2n-6}+3n} \overset{\textbf{(4p)}}{=} \frac{2-\frac{6}{n}}{\sqrt{9+\frac{2}{n}-\frac{6}{n^2}}+3} \overset{\textbf{(1p)}}{\to} \frac{2}{3+3} \overset{\textbf{(1p)}}{=} \frac{1}{3}.$$

$$\frac{n}{6} = \frac{n^3}{2n^2+4n^2} \le \frac{n^3+2n}{2n^2+4} \le \frac{n^3+2n^3}{2n^2} = \frac{3n}{2}\,\textbf{(6p)}$$

$$1 \leftarrow \sqrt[n]{n}\sqrt[n]{\frac{1}{6}} \le c_n \le \sqrt[n]{n}\sqrt[n]{\frac{3}{2}} \to 1. \qquad \textbf{(3p)}$$

Így a rendőrelv miatt $c_n \to 1$. **(1p)**

---

4. feladat (20 pont)
Adja meg az alábbi sorozatok torlódási pontjainak halmazát, limesz szuperiorját, illetve limesz inferiorját. Létezik-e határérték?

$$a_n = \frac{(-n)^n + 7^n}{n! + n^7}, \qquad b_n = \frac{n! + n^7}{(-n)^n + 7^n}$$

Mo.

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{n^n}{n!} \cdot \dfrac{1 + \left(\frac{7}{n}\right)^n}{1 + \frac{n^7}{n!}} \to \infty, & \text{ha } n \text{ páros} \\[2ex] \dfrac{n^n}{n!} \cdot \dfrac{-1 + \left(\frac{7}{n}\right)^n}{1 + \frac{n^7}{n!}} \to -\infty, & \text{ha } n \text{ páratlan} \end{cases} \qquad \textbf{(6p)}$$

A sorozat torlódási pontjainak halmaza $\{-\infty, \infty\}$ **(1p)** , vagyis $\limsup a_n = \infty$, **(1p)** $\liminf a_n = -\infty$ **(1p)** , így a sorozat nem konvergens **(1p)** .

$$b_n = \begin{cases} \dfrac{n!}{n^n} \cdot \dfrac{1 + \frac{n^7}{n!}}{1 + \left(\frac{7}{n}\right)^n} \to 0, & \text{ha } n \text{ páros} \\[2ex] \dfrac{n!}{n^n} \cdot \dfrac{1 + \frac{n^7}{n!}}{-1 + \left(\frac{7}{n}\right)^n} \to 0, & \text{ha } n \text{ páratlan} \end{cases} \qquad \textbf{(6p)}$$

A sorozat egyetlen torlódási pontja a 0 **(1p)** , vagyis $\limsup b_n = \liminf b_n = 0 = \lim b_n$ **(3p)** .

---

5. feladat (20 pont)
Hol folytonos, hol és milyen típusú szakadása van a következő függvénynek?

$$f(x) = \frac{\sin(x-3)}{|x^2 - x - 6|}$$

A szakadási helyeken határozza meg a függvény bal és jobb oldali határértékét!

Mo. $x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$ **(2p)** , tehát $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 3\}$ **(1p)** . A függvény folytonos az értelmezési tartományának minden pontjában **(2p)** , mert folytonos függvények hányadosa, és a nevező nem nulla.

$$\lim_{x\to 3\pm 0} f(x) = \lim_{x\to 3\pm 0} \frac{\sin(x-3)}{|x-3|} \cdot \frac{1}{|x+2|} (\mathbf{2p}) = \lim_{x\to 3\pm 0} \underbrace{\frac{\sin(x-3)}{\pm(x-3)}}_{\to\pm 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{|x+2|}}_{\to\frac{1}{5}} (\mathbf{3p}) = \pm\frac{1}{5}$$

(1p) , tehát a függvénynek a 3 pontban véges ugrás típusú szakadása van **(2p)** .

$$\lim_{x\to -2} f(x) = \lim_{x\to -2} \underbrace{\frac{\sin(x-3)}{|x-3|}}_{\to\frac{\sin(-5)}{5}>0} \cdot \underbrace{\frac{1}{|x+2|}}_{\to+\infty} = +\infty$$ **(5p)** , azaz a -2 pontban a bal és a jobb oldali határérték is $+\infty$, így itt függvénynek másodfajú szakadása van **(2p)** .

---

6. feladat (10 pont, IMSC-seknek javasolt.)
Legyen N pozitív természetes szám! Adja meg az $a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi}{N}$ sorozat torlódási pontjait! (Segítség: Határozza meg a_{2N} értékét!)

Mo. $a_{2N} = 0$ **(2p)** . Indoklás: Az origó középpontú egységkörbe írt szabályos $2N$ szög csúcsaiba mutató vektorok összege az elrendezés szimmetriája miatt a nullvektor, és $2N \cdot a_{2N}$ éppen ezen vektorok vízszintes koordinátáinak összege. **(3p)**

Hasonlóan igazolható, hogy ha n a $2N$ többszöröse, akkor $a_n = 0$. **(2p)**

Így ha $n = \alpha 2N + \beta$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{N}$, $\beta < 2N$), akkor

$$a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{k\pi}{N}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\beta}\cos\left(\frac{k\pi}{N}\right) \qquad \text{ezért} \qquad |a_n| \le \frac{2N}{n} \to 0.$$

Tehát az (a_n) sorozat konvergens, határértéke 0 **(2p)** , így egyetlen torlódási pontja a 0 **(1p)** .

Az a_n képletében szereplő összegzés el is végezhető, ha észrevesszük, hogy $\cos\frac{k\pi}{N} = \mathrm{Re}(q^k)$, $q = e^{i\frac{\pi}{N}}$ mellett, tehát na_n egy q hányadosú, n tagú mértani sor összegének valós része, így $a_n = \frac{1}{n}\mathrm{Re}\left(q\frac{1-q^n}{1-q}\right)$. Innen is megkapható, hogy $|a_n| \le \frac{1}{n}\left|q\frac{1-q^n}{1-q}\right| \le \frac{2}{n|1-q|} \to 0$.
