ANALÍZIS(2) **II. ZÁRTHELYI pótlása, javítása** **2010. november 22.**
Mérnök Informatikus szak Munkaidő: 90 perc
BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

1. feladat (12 pont)

Adja meg az alábbi sor konvergencia tartományát!

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n+2}}{n\ 3^{2n}} \quad (x-4)^n$$

Adjon meg egy olyan $[\alpha, \beta]$ intervallumot, melyben a sor egyenletesen konvergens!

$a_n = \frac{9(-3)^n}{n\ 9^n} = 9\,\frac{1}{n}\left(\frac{-1}{3}\right)^n \quad ; \quad x_0 = 4$

$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{9}\ \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \cdot \frac{1}{3} \to 1 \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} = \frac{1}{R} \Rightarrow R = 3$ (5)

Végpontok:

1 4 7

(2) $x = 1: \quad \sum^{\infty} 9\frac{1}{n}\left(-\frac{1}{3}\right)^n (-3)^n = 9\sum^{\infty} \frac{1}{n}$ div.

(2) $x = 7: \quad \sum^{\infty} 9\frac{1}{n}\left(-\frac{1}{3}\right)^n 3^n = 9\sum^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ konv. (Leibniz sor)

K. T.: $(1, 7]$

(3) Pl. $[0, 5] \subset (x_0 - R, x_0 + R)$, így itt egyenletes a konvergencia

2. feladat (14 pont)

a) A Taylor polinom definíciójával írja fel az $f(x) = \cos 2x + 3x^2 - 5x$ függvény $x_0 = 0$ pontbeli ötödrendű Taylor polinomját és a Lagrange-féle hibatagot!

b) A $\left(0, \frac{1}{2}\right]$ intervallumon az f függvényt a fenti ötödrendű Taylor polinomjával közelítjük. Adjon becslést az elkövetett hibára!

$f(x) = \cos 2x + 3x^2 - 5x \qquad f(0) = 1$
$f'(x) = -2\sin 2x + 6x - 5 \qquad f'(0) = -5$
$f''(x) = -4\cos 2x + 6 \qquad f''(0) = 2$
$f'''(x) = 8\sin 2x \qquad f'''(0) = 0$
$f^{IV}(x) = 16\cos 2x \qquad f^{IV}(0) = 16$
$f^{V}(x) = -32\sin 2x \qquad f^{V}(0) = 0$
$f^{VI}(x) = -64\cos 2x$

$T_5(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \dots + \frac{f^{V}(0)}{5!}x^5 = 1 - 5x + \frac{2}{2!}x^2 + \frac{16}{4!}x^4$ (8)

an2z2p101122/1.

$$R_5(x) = \frac{f^{VI}(\xi)}{6!} x^6 = \frac{-64\cos 2\xi}{6!} x^6 \quad (2)$$

b) $f(x) \approx T_5(x)$

$$|H| = |R_5(x)| = \frac{64\cos 2\xi}{6!} x^6 \underset{\substack{x\in(0,\frac{1}{2}]\\ \xi\in(0,x)}}{\leq} \frac{64 \cdot 1}{6!}\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{6!} \quad (4)$$

3. feladat (17 pont)

Adja meg az alábbi függvények megadott pontra támaszkodó Taylor sorát és annak konvergencia tartományát! Írja ki a sorok első négy nem nulla tagját!

a) $f(x) = e^{-6x}, \quad x_0 = 1$

b) $g(x) = x^2\, e^{2x^2}, \quad x_0 = 0$

c) A g függvény sorfejtésének segítségével adja meg az alábbi deriváltak értékét!
$g^{100}(0) = ?, \qquad g^{101}(0) = ?$

a) $\boxed{6}$

$$f(x) = e^{-6(x-1)-6} = e^{-6}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-6(x-1))^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-6}\frac{(-6)^n}{n!}(x-1)^n =$$

$$= e^{-6} + e^{-6}\frac{-6}{1}(x-1) + e^{-6}\frac{(-6)^2}{2!}(x-1)^2 + e^{-6}\frac{(-6)^3}{3!}(x-1)^3 + \dots$$

KT: $(-\infty, \infty)$

b) $\boxed{6}$

$$g(x) = x^2 e^{2x^2} = x^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}x^{2n+2} =$$

$$= x^2 + \frac{2}{1}x^4 + \frac{2^2}{2!}x^6 + \frac{2^3}{3!}x^8 + \dots$$

KT: $(-\infty, \infty)$

c) $\boxed{5}$

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad : \quad a_k = \frac{g^{(k)}(0)}{k!}$$

$$\Rightarrow g^{(k)}(0) = k!\, a_k \quad (2)$$

$$g^{100}(0) = 100!\, \underbrace{a_{100}}_{x^{100}\text{ együtthatója } (n=49)} = 100!\,\frac{2^{49}}{49!} \quad (2)$$

$$g^{101}(0) = 100!\, \underbrace{a_{101}}_{x^{101}\text{ együtthatója} = 0} = 0 \quad (1)$$

an2z2p101122/2.

4. feladat (17 pont)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{8+24x^2}}$$

a) Adja meg az függvény $x_0 = 0$ bázispontú Taylor sorát és annak konvergenciasugarát! Írja fel a sor első négy nem nulla tagját elemi műveletekkel!

b) Adja meg az

$$\int_0^{1/2} f(x)\, \mathrm{d}x$$

integrál közelítő értékét, ha az integrálandó függvényt 4-edrendű Taylor polinomjával közelítjük!
Adjon becslést az elkövetett hibára!

a) $\boxed{10}$ $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{8}} \frac{1}{\sqrt[3]{1+3x^2}} = \frac{1}{2}(1+3x^2)^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/3}{n}(3x^2)^n =$

$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/3}{n}3^n x^{2n} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{-1/3}{1}\cdot 3x^2 + \frac{(-\frac{1}{3})(-\frac{4}{3})}{1\cdot 2}3^2x^4 + \frac{(-\frac{1}{3})(-\frac{4}{3})(-\frac{7}{3})}{1\cdot2\cdot3}3^3x^6 + \ldots\right)$

5 3

$|3x^2| = 3|x|^2 < 1 \Rightarrow |x| < \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow R = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 2

b.) $\boxed{7}$ $\int_0^{1/2} \frac{1}{2}\left(\underbrace{1 - x^2 + 2x^4}_{T_4(x)} - \frac{14}{3}x^6 + \ldots\right) dx =$

$[0, \frac{1}{2}] \subset (-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$: szabad tagonként integrálni

$= \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{3} + 2\frac{x^5}{5} - \frac{14}{3}\frac{x^7}{7} + \ldots\right)\Big|_0^{1/2} =$

$= \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3\cdot 2^3} + \frac{2}{5}\frac{1}{2^5}\right)}_{:=a} - \underbrace{\frac{1}{2}\frac{14}{3\cdot 7}\frac{1}{2^7}}_{:=b} + \ldots \approx a$

$|H| \le |b|$, mert Leibniz sorról van szó

5. feladat (6 pont)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2+3y^2}{4x^2+15y^2} = ?$$

$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} \frac{2x^2+3y^2}{4x^2+15y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{4x^2} = \frac{1}{2}$

$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} \frac{2x^2+3y^2}{4x^2+15y^2} = \lim_{y\to 0}\frac{3y^2}{15y^2} = \frac{1}{5} \neq \frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \nexists$

an2z2p101122/3.

6. feladat (12 pont)

$$f(x,y) = \frac{2x\ e^{3y}}{x^2+1}\,, \qquad P_0(1,0)$$

a) $f'_x(x,y) = ?$; $\quad f'_y(x,y) = ?$
grad$f(P_0) = ?$

b) Írja fel az f függvény P_0 pontbeli érintősíkjának egyenletét!

a.) $\boxed{8}$

$f_x' = e^{3y}\, \frac{2(x^2+1) - 2x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}$ 3

$f_y' = \frac{2x}{x^2+1}\, e^{3y} \cdot 3$ 2

$\operatorname{grad} f(P_0) = f_x'(P_0)\,\underline{i} + f_y'(P_0)\,\underline{j} = 0\,\underline{i} + 3\,\underline{j}$ 2

b.) $\boxed{4}$

$f_x'(P_0)(x-x_0) + f_y'(P_0)(y-y_0) - (z - \underbrace{f(P_0)}_{=1}) = 0$ 3

$3(y-0) - (z-1) = 0$ 2

7. feladat (22 pont)

$$f(x,y) = \sqrt{3x^4 + 2y^2}$$

a) $f'_x(0,0) = ?\,;\quad f'_y(0,0) = ?$ (A definícióval dolgozzon!)

b) $\operatorname{grad} f|_{(2,-1)} = ?$

c) $\left.\frac{df}{d\underline{e}}\right|_{(2,-1)} = ?\,,\quad$ ha $\quad \underline{e} \parallel -5\,\underline{i}$

d) Adja meg $\min \left.\frac{df}{d\underline{e}}\right|_{(2,-1)}$ értékét!

a.) $\boxed{9}$

$f_x'(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\sqrt{3h^4} - 0}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \sqrt{3}\,\frac{h^2}{\underbrace{|h|}_{=h}} = 0$ 4

$f_y'(0,0) = \lim\limits_{k\to 0} \frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \lim\limits_{k\to 0} \frac{\sqrt{2k^2} - 0}{k} = \lim\limits_{k\to 0} \sqrt{2}\,\frac{|k|}{k} = \nexists$ 5
$(\pm\sqrt{2})$

b.) Ha $(x,y) \neq (0,0)$:

$\boxed{6}$

$f_x' = \frac{1}{2\sqrt{3x^4+2y^2}} \cdot 12x^3$ 2

$P_0(2,-1)$

$f_y' = \frac{1}{2\sqrt{3x^4+2y^2}} \cdot 4y$ 2

$\operatorname{grad} f(P_0) = f_x'(P_0)\,\underline{i} + f_y'(P_0)\,\underline{j} = \frac{48}{\sqrt{50}}\,\underline{i} - \frac{2}{\sqrt{50}}\,\underline{j}$ 2

an2z2p101122/4.

c.) $\boxed{5}$ $\left.\frac{df}{d\underline{e}}\right|_{(2,-1)} = \operatorname{grad} f(P_0) \cdot \underline{e}$ (2) ; $\underline{e} = -\underline{i}$ (1)

$$\left.\frac{df}{d\underline{e}}\right|_{P_0} = \left(\frac{48}{\sqrt{50}}\underline{i} - \frac{2}{\sqrt{50}}\underline{j}\right)(-\underline{i}) = -\frac{48}{\sqrt{50}} \quad (2)$$

d.) $\boxed{2}$ $\min \left.\frac{df}{d\underline{e}}\right|_{P_0} = -\left|\operatorname{grad} f(P_0)\right| = -\sqrt{\frac{48^2}{50} + \frac{4}{50}}$

Pótfeladatok (csak az elégséges eléréséhez javítjuk ki):

8. feladat (12 pont)

Írja fel az alábbi függvény megadott ponthoz tartozó Taylor sorát és adja meg annak konvergencia tartományát!

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 6}$, $\quad x_0 = 0$ $\qquad$ b) $g(x) = \dfrac{1}{x + 5}$, $\quad x_0 = 2$

a.) $\boxed{6}$ $f(x) = -\frac{1}{6}\frac{1}{1-\frac{x^2}{6}} = -\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^2}{6}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{6^{n+1}}x^{2n}$ (4)

K.T.: $|q| = \left|\frac{x^2}{6}\right| = \frac{|x|^2}{6} < 1 \Rightarrow |x| < \sqrt{6}$

K.T.: $(-\sqrt{6}, \sqrt{6})$ (2)

b.) $\boxed{6}$ $g(x) = \frac{1}{(x-2)+7} = \frac{1}{7}\frac{1}{1-\frac{-(x-2)}{7}} =$

$$= \frac{1}{7}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-(x-2)}{7}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{7^{n+1}}(x-2)^n \quad (4)$$

K.T.: $|q| = \left|\frac{-(x-2)}{7}\right| = \frac{|x-2|}{7} < 1 \Rightarrow |x-2| < 7$

K.T.: $(-5, 9)$ (2)

9. feladat (8 pont)

$$f(x,y) = 3xy^2 + 4x^4y - 2x + 15$$

a) $f'_x = ?$, $f'_y = ?$

b) $\mathrm{grad} f|_{(0,1)} = ?$ $\mathrm{d}f\,((0,1),(h,k)) = ?$

a.) $f_x' = 3y^2 + 16x^3y - 2$ 2

$f_y' = 6xy + 4x^4$ 2

b.) $\mathrm{grad} f|_{(0,1)} = f_x'(0,1)\,\underline{i} + f_y'(0,1)\,\underline{j} = \underline{i} + 0 \cdot \underline{j}$ 2

$df((0,1),(h,k)) = f_x'(0,1)\,h + f_y'(0,1)\cdot k = h$ 2