1. feladat (18 pont)
Írja fel algebrai alakban az $iz^6 + 27z^3 = 0$ egyenlet megoldásait.

Mo. $iz^6 + 27z^3 = z^3(iz^3 + 27)$, így $z_1 = 0$ megoldás **(3p)** . $iz^3 = -27$, ha $z^3 = 27i = 27\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$ **(6p)** , tehát a megoldások $z_2 = 3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$ **(3p)** , $z_3 = 3\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$ **(3p)** , $z_4 = 3\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = -3i$ **(3p)**

---

2. feladat (5+12=17 pont)
a) Adja meg a $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ definícióját!
b) A definíció alapján mutassa meg, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[5]{n^3 - 2n - 1} = \infty$!

Mo. *a*) $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ ha minden $P > 0$ számhoz létezik $N(P) \in \mathbb{N}$, melyre $n \geq N(P)$ esetén $a_n > P$. **(5p)**
b) Legyen $P > 0$. Ekkor $n \geq 3$ esetén

$$\sqrt[5]{n^3 - 2n - 1} > \sqrt[5]{\frac{n^3}{2}} > P, \qquad \textbf{(7p)}$$

ha $n^3 > 2P^5$ **(3p)** , így $N(P) = \max\left(3, \left[\sqrt[3]{2P^5}\right] + 1\right)$. **(2p)**

---

3. feladat (17 pont)
Számolja ki az alábbi sorozatok határértékét:

$$a_n = \left(\frac{n-2}{3+n}\right)^{5n}, \qquad b_n = \left(\frac{n-2}{3+n}\right)^{n^5}.$$

Mo.

$$a_n = \left(\frac{\left(1 - \frac{2}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{3}{n}\right)^n}\right)^5 \to e^{-25} \qquad \textbf{(7p)}$$

$b_n = a_n^{\frac{n^4}{5}}$ **(4p)** , így elég nagy n esetén $|b_n| < \left(e^{-5} + \varepsilon\right)^{n^4} \to 0$, ha $\varepsilon < 1 - e^{-5}$ **(4p)** . Így $\lim b_n = 0$ **(2p)** .

---

4. feladat (23 pont)
Konvergens-e az $a_1 = 3$, $a_{n+1} = 7 - \frac{10}{a_n}$ rekurzióval megadott sorozat? Állítását igazolja, és konvergencia esetén adja meg a határértéket!

Mo. Ha a sorozat korlátos, és mondoton, akkor konvergens, és határértéke a sorozat legkisebb felső, vagy legnagyobb alsó korlátja **(3p)** . A lehetséges A határérték kielégíti az $A = 7 - \frac{10}{A}$ egyenletet **(2p)** , vagyis $A = 2$ vagy $A = 5$ **(2p)** . Belátjuk, hogy $2 < a_n < 5$ **(2p)** . $2 < a_1 < 5$, és ha $2 < a_n < 5$, akkor $\frac{1}{2} > \frac{1}{a_n} > \frac{1}{5}$, tehát $-5 < -\frac{10}{a_n} < -2$, így $2 = 7 - 5 < a_{n+1} = 7 - \frac{10}{a_n} < 7 - 2 = 5$ **(5p)** $a_2 = 3 + \frac{2}{3} > a_1$, és ha $a_n < a_{n+1}$, akkor $\frac{1}{a_n} > \frac{1}{a_{n+1}}$, és $-\frac{10}{a_n} < -\frac{10}{a_{n+1}}$ tehát $a_{n+1} = 7 - \frac{10}{a_n} < 7 - \frac{10}{a_{n+1}} = a_{n+2}$, vagyis a sorozat monoton nő **(5p)** . Mivel $a_n \geq 3$, így a határérték csak 5 lehet **(2p)** . A sorozat tehát monoton és korlátos, így konvergens, tehát határértéke 5. **(2p)**

---

5. feladat (25 pont)
Adja meg az alábbi sorozatok torlódási pontjainak halmazát, limesz szuperiorját, illetve limesz inferiorját. Létezik-e határérték?

$$a_n = \sqrt[n]{\frac{n^3 - (-1)^n n^3 + 5}{n^2 + (-1)^n n^2 + 6}}, \qquad b_n = \sqrt{\frac{n^3 - (-1)^n n^3 + 5}{n^2 + (-1)^n n^2 + 6}}$$

Mo. Ha n páros:

$$1 \leftarrow \sqrt[n]{\frac{5}{8}} \cdot \frac{1}{\left(\sqrt[n]{n}\right)^2} = \sqrt[n]{\frac{5}{8n^2}} \leq a_n = \sqrt[n]{\frac{5}{2n^2+6}} \leq \sqrt[n]{\frac{5}{n^2}} = \frac{\sqrt[n]{5}}{\left(\sqrt[n]{n}\right)^2} \to 1 \qquad \mathbf{(7p)},$$

ha pedig n páratlan, akkor

$$1 \leftarrow \sqrt[n]{\frac{2}{6}}(\sqrt[n]{n})^3 = \sqrt[n]{\frac{2n^3}{6}} \leq a_n = \sqrt[n]{\frac{2n^3+5}{6}} \leq \sqrt[n]{\frac{7n^3}{6}} = \sqrt[n]{\frac{7}{6}}(\sqrt[n]{n})^3 \to 1, \qquad \mathbf{(5p)}$$

így a sorozat egyetlen torlódási pontja 1 **(1p)** , tehát $\limsup a_n = 1 = \liminf a_n = 1 = \lim a_n$ **(2p)** .

Páros n esetén

$$0 \le b_n = \sqrt{\frac{5}{2n^2+6}} \le \sqrt{\frac{5}{2}} \cdot \frac{1}{n} \to 0, \qquad \textbf{(3p)}$$

páratlan n esetén

$$b_n = \sqrt{\frac{2n^3+5}{6}} \ge \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot n^{\frac{3}{2}} \to \infty, \qquad \textbf{(3p)}$$

tehát a két torlódási pont 0 és ∞ **(1p)** , így $\limsup b_n = \infty$ **(1p)** , $\liminf b_n = 0$ **(1p)** , és a sorozat divergens. **(1p)**

IMSC feladat (4+4= 8 IMSC pont)

a) Igazolja, hogy ha az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ valós számsorozat határértéke $A \in \mathbb{R}$, akkor

$$\exists \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{a_n}{n}\right)^n = \mathrm{e}^A.$$

b) Igazolja, hogy minden $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{\mathrm{i}\alpha}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}.$$

A bizonyításhoz felhasználhatja, hogy $\lim_{n\to\infty} n \operatorname{arctg}(\frac{\alpha}{n}) = \alpha$.

Mo. *a*) Rendőr elvvel dolgozunk. **(1p)** Minden pozitív ε esetén elegendően nagy n-ekre teljesül, hogy $A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$, így $\left(1 + \frac{A-\varepsilon}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{a_n}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{A+\varepsilon}{n}\right)^n$, és limeszt véve $\mathrm{e}^{A-\varepsilon} \le \liminf \left(1 + \frac{a_n}{n}\right)^n \le \limsup \left(1 + \frac{a_n}{n}\right)^n \le \mathrm{e}^{A+\varepsilon}$. **(2p)** Az $\varepsilon \to 0$ határátmenetet véve megkapjuk a bizonyítandó állítást. **(1p)**

b) Írjuk fel az alapot exponenciális alakban:

$$1 + \frac{\mathrm{i}\alpha}{n} = \rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}, \quad \text{ahol} \quad \rho = \sqrt{1 + \left(\frac{\alpha}{n}\right)^2}, \quad \phi = \operatorname{arctg}\left(\frac{\alpha}{n}\right). \qquad \textbf{(2p)}$$

Ezen az alakon elvégezzük a hatványozást:

$$\left(1 + \frac{\mathrm{i}\alpha}{n}\right)^n = \rho^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\phi} = \left(1 + \frac{\alpha^2/n}{n}\right)^{\frac{n}{2}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}n \operatorname{arctg}\left(\frac{\alpha}{n}\right)} \xrightarrow{n\to\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha},$$

hiszen $\left(1 + \frac{\alpha^2/n}{n}\right)^{\frac{n}{2}} \xrightarrow{n\to\infty} 1$ az *a*) állítás miatt, és $\mathrm{e}^{\mathrm{i}n \operatorname{arctg}\left(\frac{\alpha}{n}\right)} \xrightarrow{n\to\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$ az exponenciális függvény folytonossága és a megadott összefüggés miatt. **(2p)**
